Konzentrische Kegelschnitte (außer Kreise) gibt es nicht

Helmuth Späth, Oldenburg

Die Bestimmung von zwei konzentrischen Kreisen bzw. Kugeln, die eine gemessene Punktemenge enthalten und minimalen Abstand haben, gehört zu den Standardaufgaben der Koordinatenmesstechnik. Der Versuch, diese Fragestellung auf konzentrische Kegelschnitte (außer Kreisen) zu übertragen, führt zu der Erkenntnis, dass solche Kurven keine Kegelschnitte sind.

1 Problemstellung

Sind zwei konzentrische Kreise, d. h. solche mit gleichem Mittelpunkt (o. B. d. A. Ursprung) und Radien r_I und r_A mit $r_A > r_I > 0$ gegeben, so nennen wir den Kreis mit Radius r_I den inneren und den mit Radius r_A den äußeren Kreis; den Kreis (mit gleichem Mittelpunkt) und Radius $r = (r_I + r_A)/2$ nennen wir den mittleren Kreis (siehe Fig. 1). Ist umgekehrt der mittlere Kreis gemäß

$$x(t) = r\cos t, \quad y(t) = r\sin t \quad (0 \le t < 2\pi) \tag{1}$$

vorgegeben, so erhalten wir, wenn der Abstand des inneren und äußeren Kreises vom mittleren Kreis $\pm d$ $(0 < d < r_I)$ sein soll, für den inneren Kreis

$$x_I(t) = (r-d)\cos t, \quad y_I(t) = (r-d)\sin t \tag{2}$$

und für den äußeren Kreis

$$x_A(t) = (r+d)\cos t, \quad y_A(t) = (r+d)\sin t \tag{3}$$

und es gilt

$$x(t) = \left(x_I(t) + x_A(t)\right)/2, \quad y(t) = \left(y_I(t) + y_A(t)\right)/2, \tag{4}$$

d. h. der mittlere Kreis ist Mittelwert von innerem und äußerem Kreis.

Beim Minimum-Zone-Problem für den Kreis ist eine Punktemenge in der Ebene gegeben, die von einem inneren und einem äußeren Kreis mit minimaler Radiendifferenz $2d$ eingeschlossen werden soll. Wir stellen die Frage, ob das Minimum-Zone-Problem auch für andere Kegelschnitte, also (bis auf Entartungen) für Ellipse, Hyperbel und Parabel sinnvoll formulierbar ist. Zu diesem Zweck setzen wir das unbekannte d zunächst als bekannt voraus und definieren den Begriff „konzentrisch" so, dass er der Situation beim Kreis entspricht, nämlich dass die beiden Strecken, die man erhält, wenn man eine Normale in einem Punkt $(x(t), y(t))$ eines Kegelschnitts errichtet und diese mit der inneren und äußeren Kurve schneidet, gleiche Länge 1 haben (siehe Fig. 1 für den Kreis).

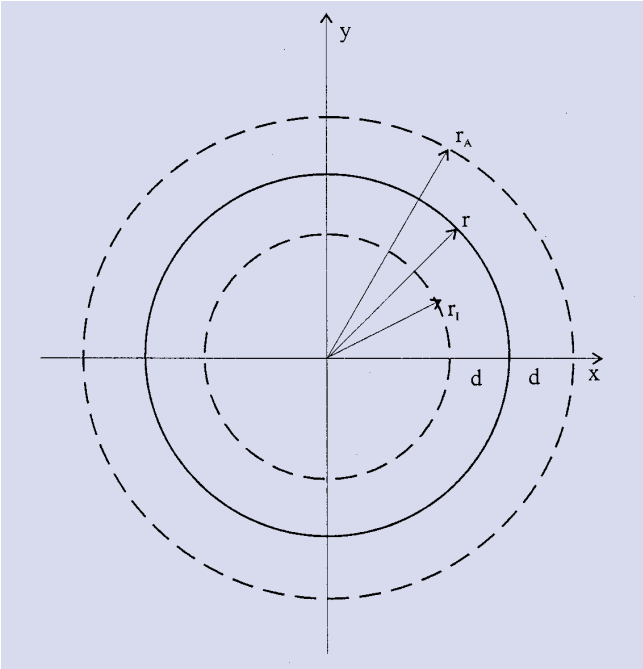

Fig. 1

2 Ellipse und Hyperbel

Wir gehen von der mittleren Ellipse

$$x(t) = p\cos t, \quad y(t) = q\sin t \quad (0 \le t < 2\pi,\ p \ne q) \tag{5}$$

aus o. B. d. A. mit dem Ursprung als Mittelpunkt und ohne Drehung. Wir suchen für jedes $t \in [0, 2\pi)$ zu $(x(t), y(t))$ einen Punkt $(x_E, y_E) = (x_E(t), y_E(t))$, $E \in \{I, A\}$ auf der Normale in $(x(t), y(t))$ derart, dass dieser im Inneren $(E = I)$ oder im Äußeren $(E = A)$ der Ellipse liegt und von $(x(t), y(t))$ einen gegebenen Abstand d mit $0 < d \le \min(p, q)$ hat. (Für das Minimum-Zone-Problem würde man noch ein minimales d, so dass die soeben definierten inneren und äußeren „Ellipsen" gegebene Punkte enthalten, zu bestimmen sein.)

Die Tangente an die mittlere Ellipse im Punkt $(x(t), y(t))$ hat die Steigung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = -\frac{q\cos t}{p\sin t} = -\frac{q}{p} ctg\ t,$$

weshalb dann die Steigung der dazu senkrechten Normalen

$$\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{p}{q} tg\ t$$

ist. Somit lautet die Gleichung der Normalen in $(x(t), y(t))$ mit dieser Steigung

$$\frac{y - y(t)}{x - x(t)} = \frac{p}{q} tg\ t. \tag{6}$$

Nun soll (x_E, y_E) auf dieser Normalen liegen, was

$$y_E - y(t) = \frac{p}{q} tgt(x_E - x(t)) \tag{7}$$

ergibt. Weiter soll der Abstand zwischen $(x(t), y(t))$ und (x_E, y_E) gleich $\pm d$ sein, was

$$(x_E - x(t))^2 + (y_E - y(t))^2 = d^2 \tag{8}$$

bedeutet. Setzt man (7) in (8) ein, so erhält man

$$(x_E - x(t))^2 \left(1 + \frac{p^2}{q^2} tg^2 t\right) = d^2,$$

was unter nochmaliger Verwendung von (8)

$$x_E = x_E(t) = x(t) + s \frac{d}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2} tg^2 t}}, \tag{9}$$

$$y_E = y_E(t) = y(t) + s \cdot \frac{p}{q} \frac{d\ tg\ t}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2} tg^2 t}} \tag{10}$$

ergibt. Aus anschaulichen Gründen bei x_E und bei y_E zusätzlich wegen des Vorzeichens der tg-Funktion in $[0, 2\pi]$ ist dabei für $E = A$ das Vorzeichen s gemäß

$$\begin{aligned} s &= +1 \text{ für } 0 \le t < \frac{\pi}{2} \text{ und } \frac{3}{2}\pi \le t < 2\pi, \\ s &= -1 \text{ für } \frac{\pi}{2} \le t < \frac{3}{2}\pi \end{aligned} \tag{11}$$

zu setzen und für $E = I$ muss s durch $-s$ ersetzt werden. Wie beim Kreis ergibt sich die mittlere Ellipse als Mittelwert der inneren und äußeren Kurven $(x_I(t), y_I(t))$ und $(x_A(t), y_A(t))$, nur dass (9) und (10) eben keine Ellipsen darstellen! Die Abweichungen zu einer Ellipse sind umso größer, je mehr $\frac{p}{q}$ von Eins abweicht; für $p = q = r$ wird aus (9) und (10) für $E = I$ (2) und für $E = A$ (3), d. h. unser Vorgehen ist mit diesem Grenzfall konsistent.

Fig. 2 zeigt für $p = 5$, $q = 3$ und $d = 1$ die mittlere Ellipse nach (5) (ausgezogen) und die innere und äußere „Ellipse“ nach (9) und (10) (gestrichelt).

Es ist klar, dass für eine Hyperbel

$$\begin{aligned} x(t) &= p \cosh t, \\ y(t) &= q \sinh t \end{aligned} \tag{12}$$

die Betrachtungen ganz analog verlaufen.

3 Parabel

Eine Standardparabel mit Brennpunkt $(a, 0)$ durch den Ursprung wird durch

$$y^2 = 4ax$$

bzw. parametrisch durch

$$x(t) = at^2$$

$$y(t) = 2\ at\ (0 \le t < \infty)$$

beschrieben. Dann ist die Steigung der Tangente in $(x(t), y(t))$ gleich $1/t$ und die der Normalen gleich $-t$. Mit derselben Rechnung wie bei der Ellipse erhalten wir

$$\begin{aligned} x_E(t) &= x(t) + s \frac{d}{\sqrt{1 + t^2}}, \\ y_E(t) &= y(t) - s \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}, \end{aligned} \tag{14}$$

wobei für die innere „Parabel“ $(E = I)$ $s = 1$ und für die äußere $(E = A)$ $s = -1$ zu setzen ist. Mit

$$t = tg\ \mathrm{v} \tag{15}$$

kann man (14) auch in der Form

$$\begin{aligned} x_E(t) &= x(t) + sd \cos \mathrm{v}, \\ y_E(t) &= y(t) - sd \sin \mathrm{v} \end{aligned} \tag{16}$$

schreiben. Wieder ergibt die Mittelwertbildung (4) die Ausgangsparabel (13). Aber wieder stellen die Formeln (14) für $E = I$ und $E = A$ keine Parabeln dar!

Fig. 3 zeigt für $a = 1/2$ und $d = 1$ die Ausgangsparabel (13) (ausgezogen) und die innere und äußere „Parabel“ (gestrichelt).

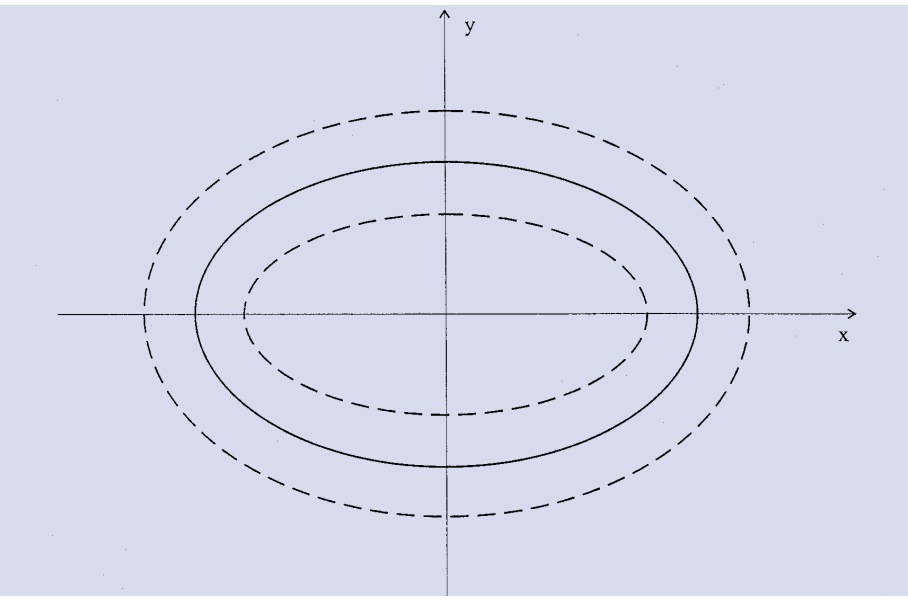

Fig. 2

4 Schlussfolgerung

Da es keine konzentrischen Standardkegelschnitte (außer Kreise) gibt, ist klar, dass dies auch für sol-

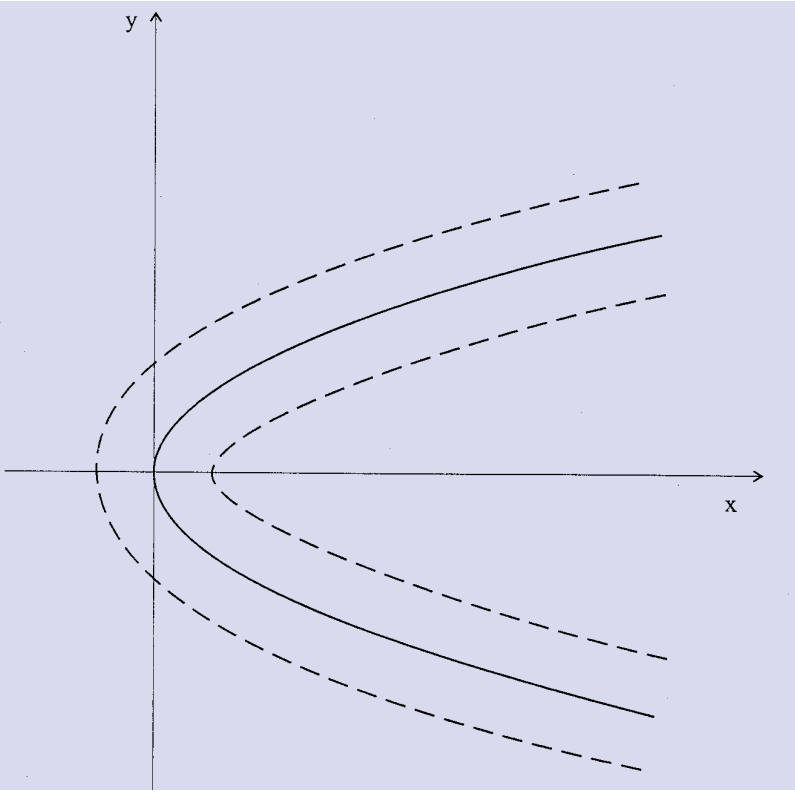

Fig. 3

che in allgemeiner Lage (Translation plus Drehung) gilt, ebenso für andere geschlossene Kurven wie z. B. die Astroide nicht und ebenso nicht für räumliche Kegelschnitte (außer Kugel) wie z. B. das Ellipsoid.

Damit macht die Minimum-Zone-Fragestellung für geschlossene Kurven und Flächen (außer Kreise bzw. Kugeln und Geraden bzw. Ebenen) keinen Sinn, sofern die inneren und äußeren Kurven bzw. Flächen vom selben Typ wie die mittlere sein sollen.

Literatur

[1] Dörflinger, J.: Approximation durch Kreise: Algorithmen zur Ermittlung der Formabweichung mit Koordinatenmessgeräten. Diplomarbeit in Mathematik, Ulm 1986.

[2] Srinivasan, V.: How tall is the pyramid of Cheops?… And other problems in Computational Metrology, SIAM News, Vol. 29, pp. 8–9 and 17 (1996).

[3] Späth, H.: Minimum Zone Kreis und Kugel mittels sequentieller linearer Optimierung, AVN 106, S. 292–294 (1999).

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Helmuth Späth, Fachbereich Mathematik, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany
E-Mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Die Bestimmung von zwei konzentrischen Kreisen bzw. Kugeln und von zwei parallelen Geraden bzw. Ebenen, die eine gemessene Punktemenge enthalten und minimalen Abstand haben, gehört zu den Standardaufgaben [1, 2, 3] der Koordinatenmesstechnik. Wir versuchen diese Fragestellung auf konzentrische Kegelschnitte (außer Kreisen) zu übertragen und stellen fest, dass solche Kurven leider keine Kegelschnitte sind.

Abstract

The determination of two concentric circles or spheres and of two straight lines or planes, which contain a measured set of points between them and have minimal distance, belongs to the standard tasks of computational metrology [1, 2, 3]. We try to put this question also for conic sections (except for circles) and state that the corresponding concentric curves sorrily not are conic sections.

Vandalismus am Kronstädter Pegel

Von der Beobachtungsdauer her (seit 1777) ist der Kronstädter Pegel (auf der Insel Kotlin in der Kronstädter Bucht des Finnischen Meerbusens, vor St. Petersburg) der älteste in Russland und nach Amsterdam (seit 1700) und Stockholm (seit 1744) der drittälteste in der Welt. Aufgrund des Beschlusses des Ministerrats der UdSSR vom 7. 4. 1946 wurde sein Nullpunkt Ausgangspunkt des staatlichen Nivellementnetzes und des einheitlichen Baltischen Höhensystems. Heute dient er für Niveaubeobachtungen und zur Sicherung der Höhenangaben.

Er befindet sich in der Obhut des Föderalen Dienstes Russlands für Meteorologie und Umwelt. Für die ständige Verbindung des Pegels mit dem staatlichen Nivellementnetz ist der Föderale Dienst für Geodäsie und Kartographie verantwortlich, für den technischen Zustand der Brücke am Kronstädter Umleitungskanal – an der sich der Nullpunkt befindet – sind es verschiedene Ingenieurdienste von St. Petersburg. Eine Koordinierung dieser Arbeiten fehlt jedoch. Damit und in Anbetracht der heutigen Situation in Russland wird dem Vandalismus am Pegel Vorschub geleistet. So ergaben sich im letzten Jahrzehnt Mängel an der Einrichtung des Pegels. Verschiedene Teile wurden zerstört oder entfernt. Der Föderale Dienst für Geodäsie und Kartographie Russlands wurde nun gebeten, Arbeiten zur ordnungsgemäßen Wiederherstellung des Pegels zu finanzieren.

Aus: Kronštadtskij futštok i vandalizm. Von Bogdanov, V.I. – Geodez. i Kartogr., Moskva (1999) 11, S. 24–27

Deumlich