Differentialgeometrische Betrachtungen der biharmonischen Flächen $r \cdot l = const.$

Eberhard Mittermayer, Berlin

Grundlage der geometrischen Lösung der Mercator-Abbildung der Kugel in der Ebene als Projektion sind Raumkurven ($\bar{y}$ = *const.*, $\bar{z}$ = *const.*) *(Mittermayer,* 1999a). Diese Raumkurven sind der geometrische Ort zweier Flächen $\bar{y}$ = *const.* und $\bar{z}$ = *const.*, die eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung erfüllen. Es ist die biharmonische Differentialgleichung. In diesem Beitrag werden die differentialgeometrischen Eigenschaften der Flächen $\bar{y}$ = *const.* betrachtet.

1 Einleitung

Mit der isothermen Mercator-Länge l und der isothermen Mercator-Breite q der Kugelfläche $r = const.$ sind in zweidimensionaler Betrachtung die Größen $\bar{y}$ und $\bar{z}$

$$\bar{y} = r \cdot l \tag{1}$$
$$\bar{z} = r \cdot q \tag{2}$$

metrische isotherme Mercator-Koordinaten (Lagekoordinaten). In dreidimensionaler Betrachtung erkennen wir mit der Mercator-Länge l und der Mercator-Breite q

$$l = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3}$$
$$q = \operatorname{artanh}\left(\frac{z}{r}\right) \tag{4}$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{5}$$

in $\bar{y}$ (1) und $\bar{z}$ (2) Ortsfunktionen kartesischer Koordinaten

$$\bar{y} = r \cdot l = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = const. \tag{6}$$
$$\bar{z} = r \cdot q = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\operatorname{artanh}\left(\frac{z}{r}\right) = const. \tag{7}$$

implizierte Darstellungen von Flächen, die die biharmonische Differentialgleichung erfüllen

$$\begin{aligned}
\Delta^2\bar{y} &= \frac{\partial^4\bar{y}}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial z^4}+2\left[\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4\bar{y}}{\partial y^2\partial z^2}\right] = 0\\
\Delta^2\bar{z} &= \frac{\partial^4\bar{z}}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\bar{z}}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\bar{z}}{\partial z^4}+2\left[\frac{\partial^4\bar{z}}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\bar{z}}{\partial x^2\partial z^2}+\frac{\partial^4\bar{z}}{\partial y^2\partial z^2}\right] = 0
\end{aligned}\ ; \tag{8}$$

siehe Mittermayer (1999d, 1999e) und das folgende Programm in Mathematica

```
In[1]:= r = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2];
        l = ArcTan[y / x];
        q = ArcTanh[z / r];
        ys = r * l
        zs = r * q
        a = D[D[D[D[ys, x], x], x], x];
        b = D[D[D[D[ys, y], y], y], y];
        c = D[D[D[D[ys, z], z], z], z];
        d = D[D[D[D[ys, x], x], y], y];
        e = D[D[D[D[ys, x], x], z], z];
        f = D[D[D[D[ys, y], y], z], z];
        erg = Simplify[a + b + c + 2 * (d + e + f)]
        a = D[D[D[D[zs, x], x], x], x];
        b = D[D[D[D[zs, y], y], y], y];
        c = D[D[D[D[zs, z], z], z], z];
        d = D[D[D[D[zs, x], x], y], y];
        e = D[D[D[D[zs, x], x], z], z];
        f = D[D[D[D[zs, y], y], z], z];
        erg = Simplify[a + b + c + 2 * (d + e + f)]

Out[1]= Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] ArcTan[y/x]

Out[2]= Sqrt[x^2 + y^2 + z^2] ArcTanh[z/Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]]

Out[3]= 0

Out[4]= 0
```

Differentialgeometrische Betrachtungen der Flächen $\bar{z} = const.$ siehe Mittermayer (1999b, 1999c). Die Abb. 1 zeigt die hyperbolische Drehfläche

$$\bar{z} = r \cdot q = 5$$

Mit der Einführung einer Parameterdarstellung der Flächen (6)

$$\bar{y} = r \cdot l = const. \tag{9}$$

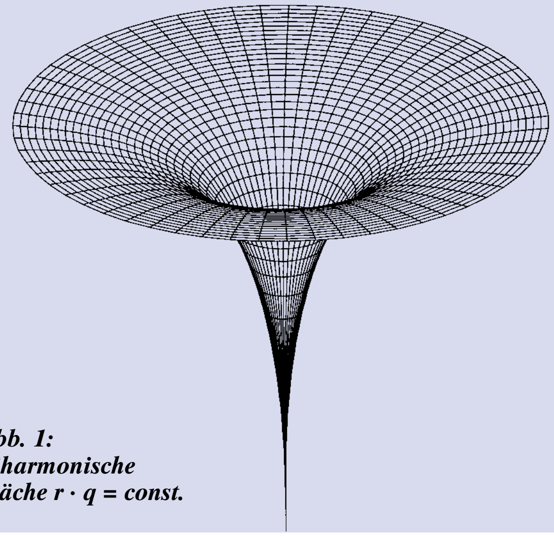

Abb. 1: Biharmonische Fläche r · q = const.

ist eine differentialgeometrische Betrachtung dieser Flächen im Sinne von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) möglich.

2 Der Ortsvektor

Ausgehend von dem Ortsvektor isothermer Kugelkoordinaten

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos l / \cosh q \\ r \sin l / \cosh q \\ r \tanh q \end{pmatrix} \tag{10}$$

(MITTERMAYER, 1998, S. 39 ff.) und der Mercator-Länge l mit (9)

$$l = \frac{r \cdot l}{r} = \frac{\bar{y}}{r} \tag{11}$$

folgt die Parameterdarstellung der Flächen $\bar{y} = const.$

$$\vec{X}(r,q) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh q \\ r \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh q \\ r \tanh q \end{pmatrix} = r \cdot \vec{e}_1 \tag{12}$$

mit dem r-abhängigen Einheitsvektor

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh q \\ \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh q \\ \tanh q \end{pmatrix} \tag{13}$$

und dem Betrag des Ortsvektors (12)

$$\left| \vec{X} \right| = r \quad . \tag{14}$$

Die Abb. 2 bis Abb. 5 geben einen Eindruck der biharmonischen Fläche

$$\boxed{\bar{y} = r \cdot l = 1}$$

jeweils in $0 \leq q \leq 3$.

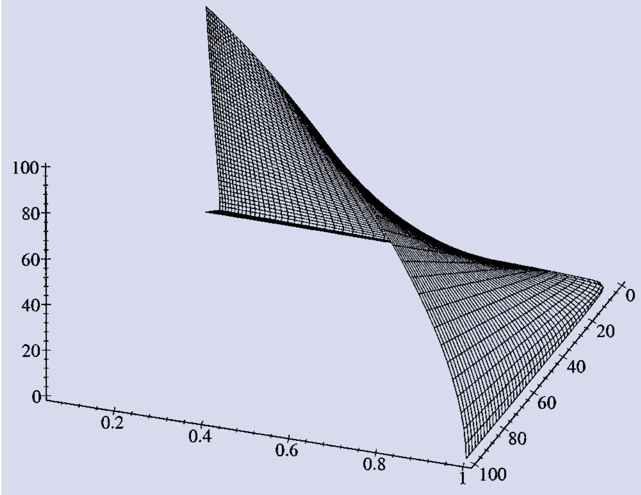

Abb. 2: Biharmonische Fläche in $\frac{2}{\pi} \leq r \leq 100$

In den Abb. 3 bis Abb. 5 gilt

$$\boxed{\frac{2}{(n+1)\,\pi} \leq r \leq \frac{2}{n\pi}} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{15}$$

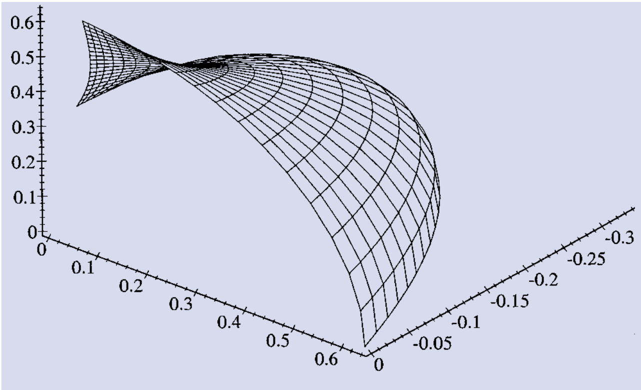

Abb. 3: Biharmonische Fläche in $\frac{1}{\pi} \leq r \leq \frac{2}{\pi}$ ***(n = 1)***

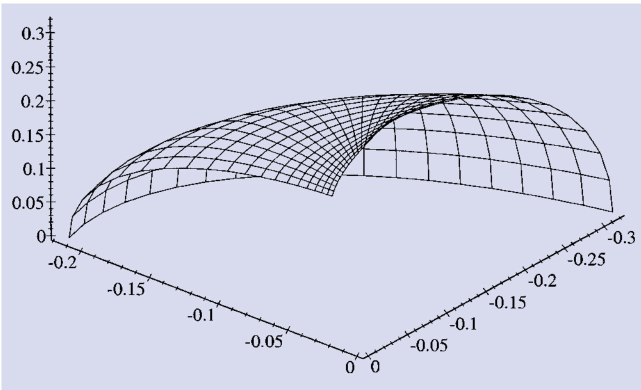

Abb. 4: Biharmonische Fläche in $\frac{2}{3\pi} \leq r \leq \frac{1}{\pi}$ ***(n = 2)***

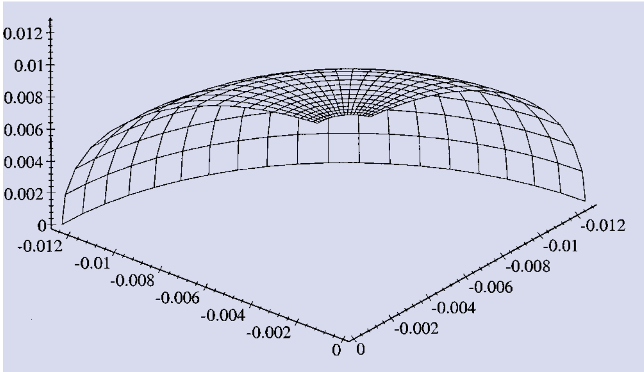

Abb. 5: Biharmonische Fläche in** $\frac{2}{51\pi} \leq r \leq \frac{2}{50\pi}$ **(n = 50)

Man erkennt für $r \to 0$ eine Folge von Bildern der biharmonischen Fläche $\bar{y} = 1$, deren Anzahl mit $n \to \infty$ über alle Grenzen wächst.

Betrachten wir die radiale Differenz aus (15)

$$\delta r\,(n) = r_n - r_{n+1} = \frac{2}{n\,(n+1)\,\pi} \ , \tag{16}$$

so folgt für $n \to \infty$ der Grenzwert

$$\lim_{n \to \infty} \delta r\,(n) = 0 \ , \tag{17}$$

ein Nullfolge. Im weiteren erhalten wir zu einer beliebig kleinen Größe $\epsilon > 0$

$$\left| \frac{2}{n\,(n+1)\,\pi} - 0 \right| < \epsilon \tag{18}$$

die Abschätzung

$$n > \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon}} - 1 \ . \tag{19}$$

3 Die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art

Gegeben ist der Ortsvektor der Fläche $\bar{y} = const. \neq 0$ (12) mit den Flächenparametern (r, q)

$$\boxed{\begin{array}{lllll} x & = & x\,(r,q) & = & r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh q \\ y & = & y\,(r,q) & = & r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh q \\ z & = & z\,(r,q) & = & r\tanh q \end{array}} \ . \tag{20}$$

Für das Linienelement im Quadrat ds^2 gilt die quadratische Form

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ dq \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dq \end{pmatrix} \tag{21}$$

mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art. E, F, G.

Ausgehend von den Tangentenvektoren

a) an die r-Linie *($q = const.$)*

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r \\ \partial y / \partial r \\ \partial z / \partial r \end{pmatrix} \tag{22}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial r} & = & \dfrac{\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{\cosh q} + \dfrac{\bar{y}\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{r\cosh q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & = & \dfrac{\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{\cosh q} - \dfrac{\bar{y}\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{r\cosh q} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & = & \tanh q \end{array}}$$

b) an die q-Linie *($r = const.$)*

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial q} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial q \\ \partial y / \partial q \\ \partial z / \partial q \end{pmatrix} \tag{23}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\boxed{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial x}{\partial q} & = & -\dfrac{r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\sinh q}{\cosh^2 q} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q} & = & -\dfrac{r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\sinh q}{\cosh^2 q} \\ \dfrac{\partial z}{\partial q} & = & \dfrac{r}{\cosh^2 q} \end{array}}$$

erhalten wir die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art als Skalarprodukte der Tangentenvektoren (22) und (23)

$$E = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \right\rangle = 1 + \frac{\bar{y}^2}{r^2\cosh^2 q} \tag{24}$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \right\rangle = 0 \tag{25}$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial q}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \right\rangle = \frac{r^2}{\cosh^2 q} \quad \left[m^2\right] . \tag{26}$$

Es folgt die differentialgeometrische Größe

$$W = \sqrt{EG - F^2} \tag{27}$$

mit dem Ergebnis

$$W = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + r^2\cosh^2 q}}{\cosh^2 q} \quad [m] \ . \tag{28}$$

Betrachten wir den Winkel α zwischen dem Tangentenvektor an die r-Linie (22) und dem Einheitsvektor $\vec{e}_1$ (13) in Richtung des Ortsvektors (12), so folgt die allgemeine Formel

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}, \vec{e}_1 \right\rangle}{\left| \frac{\partial\vec{X}}{\partial r} \right|} \quad . \tag{29}$$

Mit dem bemerkenswerten Skalarprodukt

$$\left\langle \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}, \vec{e}_1 \right\rangle = 1 \tag{30}$$

und dem Skalarprodukt (24) erhalten wir die Rechenformel für den Winkel α bez. beliebiger biharmonischer Flächen $\bar{y} = const. \neq 0$.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{r\cosh q}{\sqrt{\bar{y}^2 + r^2\cosh^2 q}}} \quad . \tag{31}$$

Wir erkennen mit der Umformung

$$\cos\alpha = \frac{\cosh q}{\sqrt{\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)^2 + \cosh^2 q}}$$

für $q = const.$ die Grenzwerte

$$\lim_{r\to\infty}\left[\cos\alpha(r)\right] = 1 \tag{32}$$

$$\lim_{r\to 0}\left[\cos\alpha(r)\right] = 0 \; . \tag{33}$$

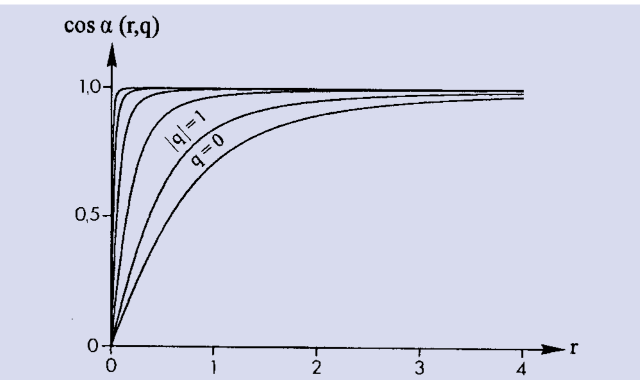

Abb. 6: Der Winkel · (r, q) bez. |ȳ| = 1

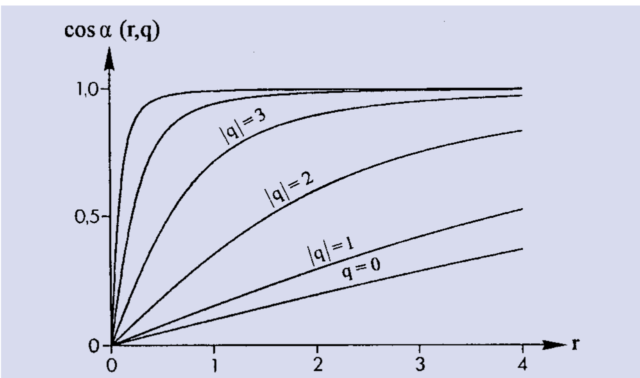

Abb. 7: Der Winkel · (r, q) bez. |ȳ| = 10

Die Abb. 6 zeigt die Funktion (31) bez. der Fläche $|\bar{y}| = r \cdot l = 1$ für $q = 0(1)5$, entsprechend Abb. 7 bez. der Fläche $|\bar{y}| = r \cdot l = 10$.

4 Die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art L, M, N

Wir bilden die zweiten partiellen Ableitungen des Ortsvektors (12)

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial r^2 \\ \partial^2 y/\partial r^2 \\ \partial^2 z/\partial r^2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} &= -\frac{\bar{y}^2\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{r^3\cosh q} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} &= -\frac{\bar{y}^2\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)}{r^3\cosh q} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 0 \end{aligned}} \; ,$$

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial q} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial r\partial q \\ \partial^2 y/\partial r\partial q \\ \partial^2 z/\partial r\partial q \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial q} &= -\frac{\sinh q\left[\bar{y}\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) + r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\right]}{r\cosh^2 q} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial q} &= \frac{\sinh q\left[\bar{y}\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) - r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\right]}{r\cosh^2 q} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial q} &= \frac{1}{\cosh^2 q} \end{aligned}}$$

und

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial q^2} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial q^2 \\ \partial^2 y/\partial q^2 \\ \partial^2 z/\partial q^2 \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= \frac{r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\left[\sinh^2 q - 1\right]}{\cosh^3 q} \quad [m] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} &= \frac{r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)\left[\sinh^2 q - 1\right]}{\cosh^3 q} \quad [m] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} &= -\frac{2r\sinh q}{\cosh^3 q} \quad [m] \end{aligned}} \; .$$

Die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art *L, M, N* folgen aus

$$L = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) \tag{37}$$

$$M = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial q}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) \tag{38}$$

$$N = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial q^2}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) \quad . \tag{39}$$

Mit den Volumenprodukten

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) = \frac{\bar{y}^3}{r^3\cosh^4 q} \tag{40}$$

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial q}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) = -\frac{\bar{y}\sinh q}{\cosh^3 q} \tag{41}$$

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial q^2}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\;\frac{\partial\vec{X}}{\partial q}\right) = \frac{\bar{y}r}{\cosh^4 q} \tag{42}$$

und der Größe *W* (28) erhalten wir als Ergebnis die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{\bar{y}^3}{r^3\cosh^2 q\sqrt{\bar{y}^2+r^2\cosh^2 q}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ M &= -\frac{\bar{y}\tanh q}{\sqrt{\bar{y}^2+r^2\cosh^2 q}} \\ N &= \frac{\bar{y}r}{\cosh^2 q\sqrt{\bar{y}^2+r^2\cosh^2 q}} \quad [m] \end{aligned}} \quad . \tag{43}$$

5 Die Gaußsche Krümmung *K*

Die Gaußsche Krümmung *K* einer Fläche, auch Flächenkrümmung genannt, folgt aus den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. und 2. Art

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \left[\frac{1}{m^2}\right] \tag{44}$$

mit dem Ergebnis

$$\boxed{K = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\bar{y}^4 - \bar{y}^2 r^2 \sinh^2 q\cosh^2 q}{\left(\bar{y}^2 + r^2\cosh^2 q\right)^2} \quad \left[\frac{1}{m^2}\right]} \quad . \tag{45}$$

Es folgt eine zweite Herleitung der Gaußschen Krümmung *K* (45) mit dem Theorema egregium (Gauß), hier

$$K = -\frac{1}{2W}\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E_q}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G_r}{W}\right)\right] \tag{46}$$

mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art *E* (24) und *G* (26) sowie der Größe *W* (28). Wir erhalten als Zwischenergebnisse die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial E}{\partial q} = -\frac{2\bar{y}^2\sinh q}{r^2\cosh^3 q} \tag{47}$$

und

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{2r}{\cosh^2 q} \tag{48}$$

im weiteren

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{E_q}{W}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{G_r}{W}\right) = A \tag{49}$$

mit

$$A = -\frac{2\left(\bar{y}^4 - \bar{y}^2 r^2\sinh^2 q\cosh^2 q\right)}{r^2\cosh^2 q\left(\bar{y}^2 + r^2\cosh^2 q\right)^{3/2}} \quad . \tag{50}$$

Damit folgt die Gaußsche Krümmung *K*

$$K = -\frac{A}{2W} = \frac{\bar{y}^4 - \bar{y}^2 r^2\sinh^2 q\cosh^2 q}{r^2\left(\bar{y}^2 + r^2\cosh^2 q\right)^2} \;, \tag{51}$$

Formel (45).

Die Abb. 8 zeigt die Gaußsche Krümmung *K* bez. der Fläche $\bar{y} = r \cdot l = 0.1$

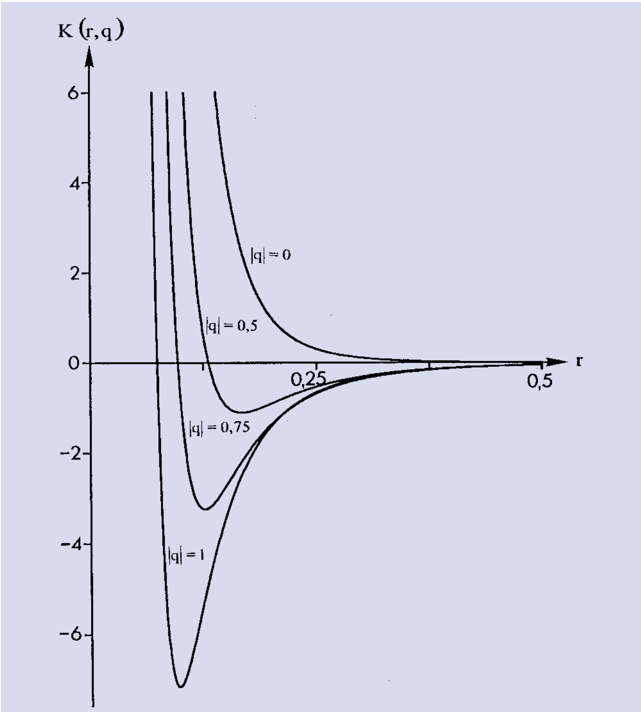

Abb. 8: Die Gaußsche Krümmung K (r, q)

Betrachten wir die Gaußsche Krümmung der biharmonischen Flächen $\bar{y} = const.$ für $r \to \infty$ und $q = const.$ Mit der Umformung der Formel *K* (45)

$$K(r) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)^4 - \left(\frac{\bar{y}}{r}\right)^2\sinh^2 q\cosh^2 q}{\left[\left(\frac{\bar{y}}{r}\right)^2 + \cosh^2 q\right]^2} \tag{52}$$

erhalten wir unmittelbar den Grenzwert

$$\boxed{\lim_{r\to\infty} K(r) \;=\; 0} \quad .$$

Für welche radialen Abstände

$$r < r_0 \tag{53}$$

ist die Gaußsche Krümmung K (45) der biharmonischen Flächen $\bar{y} = const. \neq 0$ positiv?

Aus der Forderung

$$\bar{y}^4 - \bar{y}^2 r^2 \sinh^2 q \cosh^2 q > 0 \tag{54}$$

folgt für $|q| = const.$ die Bedingung

$$\boxed{r < \frac{2 \mid \bar{y} \mid}{\left| \sinh 2q \right|} = r_0} \quad .$$

Wie verhält sich die Gaußsche Krümmung der biharmonischen Flächen $\bar{y} = const. \neq 0$ für $r \to 0$ und $q = const.$?

Mit der Gaußschen Krümmung K (45)

$$K = \frac{1}{r^2} \cdot F(r, \bar{y}, q) \tag{55}$$

und der Ortsfunktion

$$F(r, \bar{y}, q) = \frac{\bar{y}^4 - \bar{y}^2 r^2 \sinh^2 q \cosh^2 q}{\left(\bar{y}^2 + r^2 \cosh^2 q\right)^2} \tag{56}$$

erkennen wir unmittelbar für $\bar{y} = const. \neq 0$, $q = const.$ und $r = 0$ den Funktionswert

$$F(0, \bar{y}, q) = 1 ; \tag{57}$$

d. h. die Gaußsche Flächenkrümmmung verhält sich für $r \to 0$ asymptotisch wie $1/r^2$

$$K \to \frac{1}{r^2} \text{ (Kugel).} \tag{58}$$

6 Die Flächennormale

Die Flächennormale $\vec{N}$ der Fläche $\bar{y} = const.$ in der Parameterdarstellung (12) folgt als Vektorprodukt der Tangentenvektoren (22) und (23)

$$\vec{N} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} = \frac{1}{\cosh^3 q} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{59}$$

mit den Ortsfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} f_1 &= -\,\bar{y} \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) + r \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh^2 q \\ f_2 &= -\,\bar{y} \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) - r \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh^2 q \\ f_3 &= -\,\bar{y} \sinh q \end{aligned}} \quad . \tag{60}$$

Es folgt der Betrag der Flächennormale

$$\left| \vec{N} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \right| \tag{61}$$

mit dem erwarteten Ergebnis

$$\left| \vec{N} \right| = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + r^2 \cosh^2 q}}{\cosh^2 q} \,, \tag{62}$$

denn es gilt der Zusammenhang

$$\left| \vec{N} \right| = \sqrt{EG - F^2} \,, \tag{63}$$

siehe Formel (28).

Damit erhalten wir als Ergebnis den Flächeneinheitsvektor

$$\vec{N}^\circ = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{64}$$

mit den Komponenten

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\cosh q \sqrt{\bar{y}^2 + r^2 \cosh^2 q}} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \tag{65}$$

und den Ortsfunktionen (60).

Als Beispiel zeigen die Abb. 9 bis Abb. 11 bez. der Fläche $\bar{y} = 1$ die Komponenten des Flächennormaleneinheitsvektors (65) längs der r-Linie $q = 1$

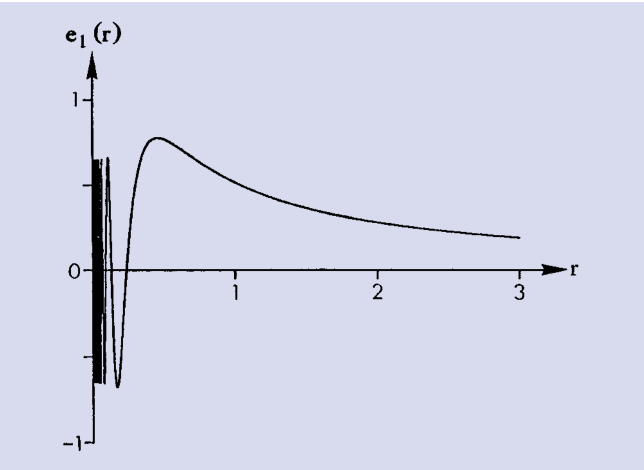

Abb. 9: Die Komponente e_1 (r) in r = [0, ∞]

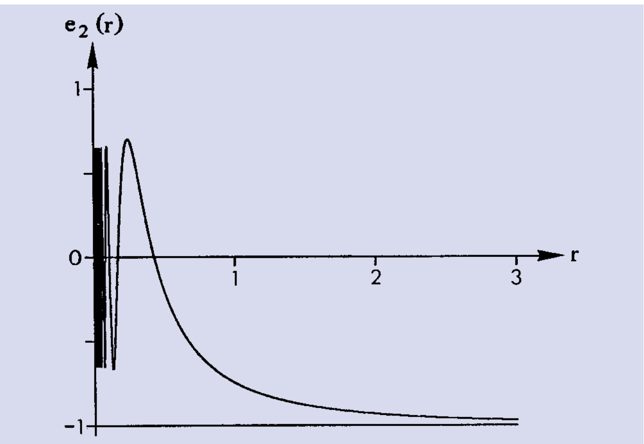

Abb. 10: Die Komponente e_2 (r) in r = [0, ∞]

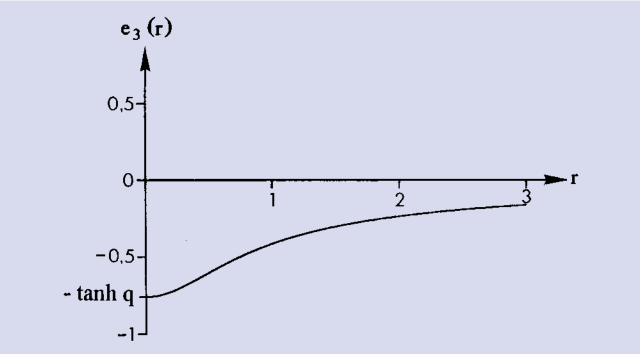

Abb. 11: Komponente e_3 (r) in r = [0, ∞]

Im weiteren betrachten wir die Projektion des Flächennormaleneinheitsvektors

$$d_{12} = \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \tag{66}$$

mit dem Ergebnis

$$d_{12} = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + r^2 \cosh^4 q}}{\cosh q \sqrt{\bar{y}^2 + r^2 \cosh^2 q}} \tag{67}$$

und der Kontrolle

$$d_{12}^2 + e_3^2 \;=\; 1 \;; \tag{68}$$

siehe Abb. 12.

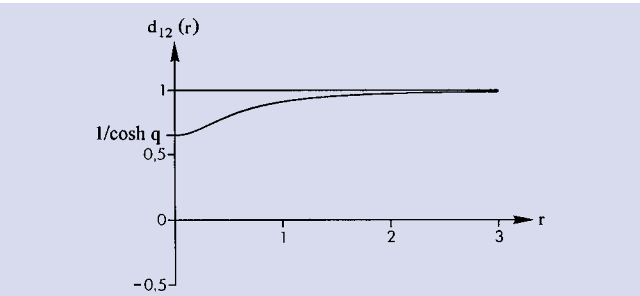

Abb. 12: Die Projektion d_{12} (r) in r = [0, ∞]

Es folgt eine zweite Herleitung des Flächennormaleneinheitsvektors (64).

Bilden wir bez. der Ortsfunktion (6)

$\bar{y} = r \cdot l = const.$

den Gradienten

$$\text{grad } \bar{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \;=\; r \text{ grad } l \;+\; l \text{ grad } r \;\;, \tag{69}$$

so folgen die Komponenten des Gradienten

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{x}{r} \text{ arctan}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{yr}{x^2+y^2} \\ Y &= \frac{y}{r} \text{ arctan}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{xr}{x^2+y^2} \\ Z &= \frac{z}{r} \text{ arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}} \tag{70}$$

mit dem Betrag

$$\left|\text{ grad } \bar{y} \;\right| = \sqrt{\text{arctan}^2\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{r^2}{x^2+y^2}} \tag{71}$$

und dem Einheitsvektor

$$\vec{N}^\circ = \frac{\text{grad } \bar{y}}{|\text{grad } \bar{y}|} = \begin{pmatrix} e_1(x,y,z) \\ e_2(x,y,z) \\ e_3(x,y,z) \end{pmatrix} . \tag{72}$$

Mit dem Ortsvektor (12) und der Mercator-Länge

$$l = \text{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\bar{y}}{r} \;, \tag{73}$$

eingesetzt in (72), folgt der Flächennormaleneinheitsvektor (64), allerdings mit einem Vorzeichenwechsel. Dies ist ohne Bedeutung.

Mit dem Gradienten der Ortsfunktion (7)

$\bar{z} = r \cdot q = const.$

$$\text{grad } \bar{z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \;=\; r \text{ grad } q \;+\; q \text{ grad } r \tag{74}$$

folgen die Komponenten des Gradienten

$$\boxed{\begin{aligned} X &= \frac{x}{r} \text{ artanh}\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{xz}{x^2+y^2} \\ Y &= \frac{y}{r} \text{ artanh}\left(\frac{z}{r}\right) - \frac{yz}{x^2+y^2} \\ Z &= \frac{z}{r} \text{ artanh}\left(\frac{z}{r}\right) + 1 \end{aligned}} \;. \tag{75}$$

Wir erhalten das Skalarprodukt der Gradienten (69) und (74)

$$\left\langle \text{grad } \bar{y},\; \text{grad } \bar{z} \right\rangle = \text{arctan}\left(\frac{y}{x}\right) \text{artanh}\left(\frac{z}{r}\right) = l \cdot q \;. \tag{76}$$

Dieses Skalarprodukt (76) erfüllt die Laplace-Gleichung

$$\Delta \left\langle \text{grad } \bar{y},\; \text{grad } \bar{z} \right\rangle \;=\; 0 \;, \tag{77}$$

denn es gilt die Laplace-Gleichung

$$\Delta \left(l \cdot q \right) \;=\; 0 \;; \tag{78}$$

siehe hierzu MITTERMAYER (1999e) und das folgende Programm in Mathematica

```
In[1]:= r = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2];
        l = ArcTan[y / x];
        q = ArcTanh[z / r];
        a = r * l
        b = r * q
        ax = D[a, x];
```

```
ay = D[a, y];
az = D[a, z];
bx = D[b, x];
by = D[b, y];
bz = D[b, z];
f = Simplify[ax * bx + ay * by + az * bz]
fxx = D[D[f, x], x];
fyy = D[D[f, y], y];
fzz = D[D[f, z], z];
Simplify[fxx + fyy + fzz]
```

Out[1]= $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$

Out[2]= $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \mathrm{ArcTanh}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]$

Out[3]= $\mathrm{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]\ \mathrm{ArcTanh}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right]$

Out[4]= 0

Literatur

BAULE, B. (1979): Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Teil 2 (Band VII, Differentialgeometrie). Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/M.

MITTERMAYER, E. (1998): Die Kugel (im Oktober 1998). Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 10999 Berlin, Dresdner Str. 26 (2. erweiterte Auflage, 507 S., 162 Abb.).

MITTERMAYER, E. (1999a): Projektionen der r-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 22–27.

MITTERMAYER, E. (1999b): Hyperbolische Drehflächen bez. der r-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 175–187.

MITTERMAYER, E. (1999c): Die Flächennormale der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 258–265.

MITTERMAYER, E. (1999d): Implizite Darstellung der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) und Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 295–299.

MITTERMAYER, E. (1999e): Die Gaußschen Koordinaten als Ortsfunktionen und Funktionentheorie/Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 405–416.

Anschrift des Verfassers:
DR.-ING. EBERHARD MITTERMAYER, Univ.-Prof., TU Berlin, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, Sekr. H12, Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin.

Zusammenfassung

Eine Parameterdarstellung der biharmonischen Flächen $\bar{y} = r \cdot l = const.$ im dreidimensionalen Euklidischen Raum wird eingeführt, Grundlage für eine differentialgeometrische Studie dieser Flächen im Sinne von Carl Friedrich Gauß (1777–1855). Die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. und 2. Art werden hergeleitet, im weiteren die Gaußsche Flächenkrümmung sowohl mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. und 2. Art als auch mit Hilfe des Theorema egregiums (Gauß). Man erkennt, die Flächenkrümmung strebt für $r \to \infty$ gegen Null und bei Annäherung an den Ursprung des Koordinatensystems wächst die Flächenkrümmung positiv über alle Grenzen. Im weiteren wird der Flächennormaleneinheitsvektor angegeben und sein Verhalten für $r \to \infty$ und $r \to 0$ betrachtet.

Summary

A parametric representation for the biharmonic surfaces $\bar{y} = r \cdot l = const.$ in a three-dimensional Euclidean Space is introduced as a basis for a differential-geometric study of these surfaces in the sense of Carl Friedrich Gauß (1777–1855). The Gaussian fundamental quantities of the 1st and 2nd kind are derived. Furthermore, the Gaussian curvature is represented in both ways: as a function of the fundamental quantities of the 1st and 2nd kind as well as using the Theorema Egregium (Gauß). For $r \to \infty$ the Gaussian curvature tends towards zero, when approaching the origin of the coordinates the curvature becomes positive and its amount grows beyond all limits. Additionally, the unit vector of the surface normal is given and its behaviour for $r \to \infty$ and $r \to 0$ is considered.