

SST-Regularisierung durch Multiresolutionstechniken auf der Basis von CHAMP-Daten

Willi Freeden, Thorsten Maier

Die detaillierte und präzise Bestimmung des Erdgravitationspotentials aus CHAMP-Daten stellt eine Herausforderung der modernen Geodäsie dar, kann man doch mit diesen Informationen zukünftig mittels GPS gemessene ellipsoidische Höhen in schwerefeldbezogene Höhen umrechnen.

1 Einleitung

Immer häufiger werden moderne Satelliten zur Vermessung geodätischer und geophysikalischer Parameter der Erde eingesetzt. Der deutsche Forschungssatellit CHAMP, zum Beispiel, wird zur Untersuchung des Erdgravitationsfeldes, des Erdmagnetfeldes, der Erdatmosphäre und daraus ableitbarer physikalischer Größen des Erdkörpers genutzt. Der immense Datenfluss solcher Satellitenmissionen macht eine dezidierte, an die Datensituation angepasste mathematische Auswertung der Daten und Modellierung der entsprechenden physikalischen Felder notwendig.

Da die gesuchten physikalisch relevanten Felder im Allgemeinen Funktionen des Ortes sind, wollen wir zunächst annehmen, dass diese Funktionen Elemente eines linearen Vektorraums sind. Ein linearer Vektorraum ist ein Raum, der alle möglichen Kombinationen, die man durch skalare Multiplikation und Linearkombination der Elemente bilden kann, enthält. Setzen wir voraus dass es einen physikalischen Zusammenhang zwischen den vom Satelliten gesammelten Messwerten und der gesuchten physikalischen Eigenschaft gibt, so weist dieser Zusammenhang einer Funktion (eben der physikalischen Eigenschaft) eine bestimmte Zahl (den Messwert) zu. Eine solche Relation bezeichnet man als Funktional. Ein reelles Funktional liefert eine Abbildung von einem Funktionenraum auf den Raum der reellen Zahlen. Wir fassen im Folgenden also die Messwerte des Satelliten als durch Funktionale, die auf dem Vektorraum der Modelle definiert sind, gegeben auf. Ist der Zusammenhang zwischen Messwerten und physikalischer Eigenschaft linear (wie z. B. in der Gravitation bei Benutzung des Störpotentials im Allgemeinen voraussetzbar), so spricht man von einem linearen Funktional. Ein bekanntes lineares Funktional ist das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Elemente eines Vektorraums. Das innere Produkt ermöglicht die Definition eines besonderen linearen Vektorraums, des Hilbertraums: Ein Hilbertraum ist ein linearer vollständiger Vektorraum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet ist. Hilberträume haben eine mathematische Struktur die, aus Sicht der mathematischen Modellierung von (georelevanten) Funktionen, besonders praktikabel ist. So ist in einem Hilbertraum das innere Produkt zu einem festen Element ein lineares, beschränktes Funktional. Umgekehrt lässt sich jedes beschränkte, lineare Funktional als inneres Produkt schreiben. Weiterhin kann jedes Element aus einem Hilbertraum (bei bekannter Basis) eindeutig als Linearkombination aller Basisfunktionen des Hilbertraums dargestellt werden (Fourierreihe).

Der letztgenannte Aspekt führt auf ein Standardverfahren zur Approximation und Modellierung speziell georelevanter Felder, nämlich die Kugelfunktionsanalyse skalarer oder vektorieller Funktionen bzw. Daten (z. B. Gravitationspotential, Schwerefeld, Erdmagnetfeld, etc.) in Hilberträumen, wie etwa dem Raum der Potentiale mit quadratintegrabler Einschränkung auf Referenzflächen. Die klassische Orthogonalentwicklung nach Kugelfunktionen lässt sich mathematisch einordnen in die Kategorie der Fouriermethoden mit polynomialen skalaren oder vektoriellen Ansatz- oder Testfunktionen. Genauer gesagt werden die zu untersuchende Funktion bzw. die entsprechenden Daten als Elemente eines separablen Hilbertraums mit bekannter polynomialer Basis angesehen und können somit nach den entsprechenden Basisfunktionen entwickelt werden. Es ist charakteristisch für diese Verfahren, dass, während die polynomialen Ansatzfunktionen keinerlei Lokalisation im Ortsbereich aufzeigen, sie sich im Raum der Fouriertransformierten (Spektral- oder Frequenzbereich genannt) immer genau einem Koeffizienten (Frequenz) zuordnen lassen; man spricht hierbei von idealer Frequenzlokalisation. Eine Konsequenz der nicht vorhandenen Ortslokalisation bei gleichzeitiger idealer Frequenzlokalisation ist die Tatsache, dass regionale Änderungen der zu analysierenden Funktion im Ortsbereich sich auf den kompletten Satz der Fourierkoeffizienten auswirken und somit die Darstellung global, d. h. im gesamten Ortsbereich, verändern. Die ideale Frequenzlokalisation allerdings erweist sich häufig bei der physikalischen Interpretation als vorteilhaft (z. B. Multipolmomente, Frequenzen von Elementarwellen etc.). Unter diesen Gesichtspunkten wären also Ansatzfunktionen mit idealer Frequenz- und Ortslokalisation wünschenswert. Dies allerdings ist aufgrund von Unschärferelationen (vgl. z. B. [FREEDEN und WIND-

AVN 5/2003

HEUSER 1997]), welche Zusammenhänge zwischen Frequenz- und Ortslokalisation herstellen, ausgeschlossen. Extreme Testfunktionen im Sinne der Unschärferelationen sind z.B. die skalaren und vektoriellen Kugelfunktionen (keine Ortslokalisation, ideale Frequenzlokalisation) einerseits, als auch die Dirac Funktionale (ideale Orts-, keine Frequenzlokalisation) andererseits. In der theoretischen Physik treten verwandte Probleme z.B. bei der Behandlung von nicht monochromatischen elektromagnetischen Wellen bzw. bei der quantenmechanischen Beschreibung von freien Teilchen auf. Dort sind ebene Wellen einer festen Frequenz (ideale Frequenzlokalisation, keine Ortslokalisation) zwar Lösungen fundamentaler Differentialgleichungen, entsprechen aber nicht der physikalischen Realität. Man behilft sich damit, dass man ebene Wellen unterschiedlicher Frequenzen zu Wellenpaketen zusammenschnürt, d. h. gewichtet überlagert. Als Resultat erhält man Wellenpakete, die, im Gegensatz zur ebenen Welle, im Ortsbereich eine gewisse Lokalisation aufweisen, dafür aber ihre ideale Lokalisation im Frequenzbereich verloren haben (d. h. nicht mehr monochromatisch sind).

Auf ähnliche Art und Weise kann man, durch geschickte Überlagerung von Kugelfunktionen zu verschiedenen Frequenzen, so genannte Kernfunktionen/Kerne erzeugen, die auf Grund der so verringerten Frequenzlokalisation eine erhöhte räumliche Lokalisation aufweisen. Diese Kerne können so konstruiert werden dass sie verschiedenste Frequenzbänder überdecken und somit alle intermediären Stufen der Frequenz- und Ortslokalisation aufweisen. Die Breite der entsprechenden Frequenzbänder und somit auch die Schärfe der Lokalisation im Ortsbereich werden durch einen Parameter, die so genannte Skala, kontrolliert. Die konkrete Form der Frequenzbänder wird durch eine zum Kern gehörende, im Allgemeinen skalenabhängige Funktion - die Erzeugende des Kerns - festgelegt (die Erzeugende entspricht der Gewichtsfunktion beim Schnüren von Wellenpaketen). Kann man die Kerne als Überlagerung von endlich vielen polynomialen Testfunktionen darstellen, so spricht man von bandlimitierten Kernen. Nicht bandlimitierte Kernfunktionen sind solche, die aus der Überlagerung unendlich vieler polynomialer Testfunktionen hervorgehen. Es zeigt sich, im Sinne der Unschärferelation (vgl. [FREEDEN und WINDHEUSER 1997]), dass die bandlimitierten Kernfunktionen geringere Ortslokalisation aufweisen als die nicht-bandlimitierten. Dies liegt begründet in der höheren Lokalisation der bandlimitierten Kerne im Spektralbereich (endliches Frequenzband) im Vergleich zu der der nicht-bandlimitierten Kerne (unendliches Frequenzband). Dies führt zu folgender Charakterisierung von Ansatzfunktionen: Fouriermethoden mit polynomialen Testfunktionen, z. B. Kugelfunktionen, sind der kanonische Ausgangspunkt zur Approximation von niederfrequenten Phänomenen (globale Approximationen), während bandlimitierte Kerne für den Ubergang von langwelligen zu kurzwelligen Phänomenen (globale bis regionale Modelle) verwendet werden können. Wegen ihrer sehr guten Ortslokalisation können die nicht bandlimitierten Kerne zur Approximation von kurzwelligen Effekten (lokale Modellierung) herangezogen werden. Ta-

Tab. 1: Veranschaulichung des Unschärfeprinzips

Ideale Frequenzlokalisation Keine Ortslokalisation		Keine Frequenzlokalisation Ideale Ortslokalisation
Kugelfunktionen	Kerne	Dirac Funktionale
bandlimitiert	nicht-bandlimitiert	

belle 1 illustriert den Sachverhalt. Durch die Verwendung von Kernen variierender Skala - Multiskalentechnik – kann man nun Modellierungsansätze verwenden, die der entsprechenden Daten- bzw. physikalischen Situation in ihrem Lokalisationsverhalten angepasst sind. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich auf mathematischer Seite mit so genannten Wavelet-Techniken, d.h. mit Multiskalenverfahren, welche auf speziellen Kernen - den so genannten Skalierungsfunktionen und den dazu korrespondierenden Wavelets - basieren. Die Erzeugenden der Skalierungsfunktionen weisen typischerweise die Charakteristika von Tiefpassfiltern auf, d. h. polynomiale Basisfunktionen zu niedrigen Frequenzen werden voll, Basisfunktionen zu höheren Frequenzen werden nur geschwächt oder gar nicht zur Konstruktion der Skalierungsfunktionen herangezogen. Im Gegensatz dazu weisen die Erzeugenden der Wavelets typische Bandpasseigenschaften auf, so dass polynomiale Basisfunktionen zu niedrigen bzw. hohen Frequenzen nur geschwächt oder gar nicht bei der Überlagerung zu Wavelets berücksichtigt werden. Man kann dies so interpretieren, dass die Skalierungsfunktionen Approximationen des Dirac-Funktionals darstellen, wobei mit steigender Skala die Approximation immer weiter verbessert wird. Die Wavelets der jeweiligen Skala bilden, in diesem Sinne, gerade die jeweils fehlenden Details die man zur entsprechenden Skalierungsfunktion hinzu nehmen muss, um die nächst bessere Approximationsstufe zu erreichen. Dies hat zur Folge, dass Wavelet-Techniken eine Multiresolution des Hilbertraums der zu untersuchenden Funktionen ermöglichen. Das heißt, der entsprechende Hilbertraum wird zerlegt in eine Folge von verschachtelten, approximierenden Teilräumen, den Skalenräumen. In jedem Skalenraum wird mittels der Skalierungsfunktionen eine Approximation der zu untersuchenden Funktionen (Daten) zu einer bestimmten Skala (und somit Auflösung) berechnet. Mit wachsender Skala verbessert sich die Approximation (die Auflösung), und die Information von kleineren Skalen bleibt dabei erhalten. Die Differenz zweier aufeinander folgender Approximationen, d.h. die Information, die von einem Skalenraum zum nächst höheren hinzu kommt, wird Detailinformation genannt und ist in den Detailräumen zu finden. Die Wavelets bilden Basisfunktionen in diesen Detailräumen, und somit kann jede Funktion des Hilbertraumes (Daten) als Linearkombination von Skalilerungsfunktionen und Wavelets dargestellt werden (Multiskalen-Approximation). Folglich wird es möglich, komplizierte Funktionen wie das Gravitationspotential der Erde in einzelne Teilstücke verschiedenster Auflösung zu zerlegen und diese einzeln zu analysieren. Damit kann die Genauigkeit der Approximation in Bereichen, in denen die Daten nur wenig Struk-

Approx. Methode	Fourier	Splines/Wavelets	Wavelets
	orthogonale Approximation		nicht notwendig orthogonale Approximation
Approx. Struktur	Kugelfunktionen (Polynome)		bandlimitiert/nicht-bandlimitiert Kerne
	zooming-out		zooming-in
Lokalisation	zunehmende Frequenz-,	T 1 1 4	abnehmende Frequenz-
	abnehmende Orts-,	Lokalisation	zunehmende Orts-
	zunehmende Korrelation		abnehmende Korrelation
Daten Struktur	homogen	schwach	stark heterogen
	Lineare Gleichungssysteme	Linea	re Gleichungssysteme/Numerische Integration
Auflösung	lang	mittel Wellenlänge	kurz

Tab. 2: Multiskalen-Philosophie der AG Geomathematik

tur aufweisen, niedriger, in Bereichen mit komplizierteren Merkmalen höher gewählt werden. Dies ermöglicht eine Dekorrelation der Daten, d. h., obwohl die zu untersuchende Funktion im Allgemeinen sowohl im Orts- als auch im Frequenzbereich Korrelationen aufweist, genügen zur effizienten Darstellung wichtiger Strukturen oft nur Teile der gesamten, in den kompletten Daten enthaltenen Informationen. Diese in der Arbeitsgruppe Geomathematik, Universität Kaiserslautern, entwickelte Philosophie ist in Tabelle 2 nochmals illustriert.

Die Bestimmung des Gravitationspotentials der Erde aus den Meßdaten des Forschungssatelliten CHAMP lässt sich als inverses Problem in Form einer Operatorgleichung formulieren (vgl. z. B. [FREEDEN et al. 1999]). Genauer gesagt gehen wir in dem von uns verfolgten Ansatz davon aus, dass aus den Meßdaten des Satelliten CHAMP die Bahn des Satelliten (geometrischer Orbit) hochgenau bestimmt werden kann. Mittels numerischer Differentiation kann aus dem geometrischen Orbit dann der Gradient des Gravitationspotentials und damit insbesondere auch die Radialableitung des Potentials bestimmt werden. Die Kenntnis der Radialableitung dient als Ausgangspunkt für die Formulierung der Operatorgleichung des Meßprinzips high-low SST (high-low Satellite-to Satellite Tracking) (vgl. [FREEDEN et al. 1999] und [FREEDEN et al. 2002]). Die Bestimmung des Potentials aus der Kenntnis der Radialableitung auf der Satellitenbahn ist ein sogenanntes "exponentiell" schlecht gestelltes Problem, das mit Hilfe geeigneter Regularisierungstechniken behandelt werden muß. Ein solcher Regularisierungsansatz kann in Form einer Multiskalenanalyse realisiert werden (vgl. [FREEDEN 1999]).

Ausgehend von der Operatorgleichung zur Beschreibung von high-low SST (vgl. [FREEDEN et al. 1999]), werden wir einen Regularisierungsansatz mit Multiskalentechnik vorstellen und numerische Ergebnisse zeigen, die auf detaillierten Simulationen von CHAMP-Daten basieren. Dabei spielt neben der Wahl eines geeigneten Regularisierungsverfahrens und einer numerisch realisierbaren Parameterwahlstrategie eine geeignete Diskretisierung der Operatorgleichung, die mit Daten auf einer realen Satellitenbahn umgehen kann, eine ebenso große Rolle wie deren effiziente numerische Umsetzung mittels schneller Summationsverfahren und Gebietszerlegungsmethoden. Der ganze Ansatz arbeitet mit Lokalstrukturen (Skalierungsfunktionen, Wavelets und Splines), die sich auf Grund ihrer stark ortslokalisierenden Natur hervorragend zur hochauflösenden Rekonstruktion lokaler Phänomene aus (nur) lokalem Datenmaterial eignen. Es sei an dieser Stelle erwähnt dass, aus Gründen der Übersichtlichkeit und der besseren Zugänglichkeit für den Leser, die mathematische Behandlung im Folgenden stark verkürzt und vereinfacht dargestellt wird.

2 Modellierung, Simulationen und Ergebnisse

2.1 High-low SST – Der Ansatz über die Radialableitung

Bei high-low SST (high-low Satellite-to-Satellite Tracking), welches im Folgenden kurz als SST bezeichnet wird, umläuft ein tieffliegender Satellit wie CHAMP die Erde auf einem nahezu kreisförmigen und polaren Orbit. Durch die Anomalien des Erdgravitationspotentials bewegt der Satellit sich nicht auf einer genau kreisförmigen oder elliptischen Bahn, sondern seine reale Bahn spiegelt die Anomalien des Gravitationspotentials im Außenraum der Erde wieder. Ein LEO (Low Earth Orbiter) wie CHAMP empfängt mit Hilfe eines GPS-Receivers die Daten der GPS-Satelliten und kann aus diesen seinen Abstand zu den GPS-Satelliten bestimmen. Nichtgravitative Einflüsse, welche die Bahn des Satelliten mitbestimmen, werden mit Hilfe eines Akzelerometers gemessen und können später beim Preprocessing der Daten herausgerechnet werden. Desgleichen müssen die gravitativen Einflüsse anderer Planeten aus den Meßdaten herausgerechnet werden. Der hier verfolgte Ansatz (vgl.

[FREEDEN 1999]) geht davon aus, dass aus den Meßdaten von CHAMP die Bahn des Satelliten (geometrischer Orbit) berechnet worden ist. Diese Annahme ist durchaus realistisch. Wenngleich solche Daten nicht vom GFZ-Potsdam bereitgestellt werden, ist es der Gruppe von Herrn Prof. M. Rothacher am IAPG (Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie) an der TU München gelungen, aus den Meßdaten von CHAMP den geometrischen Orbit zu bestimmen. Aus dem geometrischen Orbit kann nun mit Hilfe zweifacher numerischer Differentiation der Gradient des Potentials und damit insbesondere auch die Radialableitung des Potentials bestimmt werden (vgl. [FENGLER 2001]), und diese Daten können mit Hilfe der Akzelerometermessungen von den nicht-gravitativen Einflüssen bereinigt werden. Der hier verfolgte Ansatz geht davon aus, dass die erste Radialableitung des Gravitationspotentials auf einem Punktegitter auf der Bahn des Satelliten bekannt ist. In einem erdfesten Koordinatensystem bedeutet das, dass eine relativ dichte Überdeckung über der Erde auf Bahnhöhe vorliegt (mit Ausnahme sogenannter Polar Gaps, Datenlücken über den Polen, die bei einer nicht vollständig polaren Bahn des Satelliten auftreten).

Der Ansatz zur Formulierung des SST-Problems in Form einer skalaren isotropen Operatorgleichung $\Lambda F = G$ wurde in den vergangenen Jahren in der AG Geomathematik entwickelt (siehe die Monographie [FREEDEN 1999] sowie [FREEDEN et al. 1999]) und wurde dort und auch in der Gruppe von Herrn Prof. Grafarend (siehe z. B. [Aus-TEN et al. 2002]) weiter untersucht. Dieser Ansatz erlaubt die Behandlung des SST-Problems und des SGG-Problems in einem einheitlichen integrierten Konzept (vgl. auch [Freeden und Schneider 1998]). Dies bedeutet, dass alle Methoden, die in diesem Rahmen für SST oder respektive Satellite Gravity Gradiometry (SGG) entwickelt wurden, mit minimalen Anpassungen auch für das jeweils andere Szenario anwendbar sind. Der Zugang über die Radialableitung wird hier noch einmal kurz zusammengefaßt, da er zur Darstellung der erzielten Ergebnisse erforderlich ist.

Der Formulierung von SST und SGG als (kompakte) Pseudodifferentialoperatorgleichungen liegt die in Abbildung 1 skizzierte Geometrie zu Grunde. Wie in Abbildung 1 angedeutet, wird die reale Erdoberfläche als C^2 reguläre Fläche Σ_E angenommen, und der Massenschwerpunkt liegt im Ursprung des Euklidischen Raumes \Re^3 . Es liegt eine sogenannte Bjerhammarsphäre $\Omega_R := \{x \in \Re^3 ||x| = R\}$ unterhalb der Erdoberfläche, und eine weitere Sphäre $\Omega_{\gamma} := \{x \in \Re^3 ||x| = \gamma\}$ liegt unterhalb der Satellitenbahn. Das Gravitationspotential Vder Erde ist eine Funktion im Raum Pot⁽⁰⁾($\overline{\sum_{E}^{ext}}$) der im Aussenraum der Erde harmonischen Funktionen Fendlicher Energie auf Σ_E , d. h. mit $\Delta F|_{\overline{\sum_{E}^{ext}}} = 0$ und $|F(x)| = O(|x|^{-1})$ für $|x| \to \infty$ (wobei $\overline{\sum_{E}^{ext}}$ der abgeschlossene Außenraum der Erde ist). Gemäß des Runge-Walsh Approximationssatzes (vgl. [FREEDEN 1980]) kann ein Potential in Pot⁽⁰⁾(\sum_{E}^{ext}) durch Funktionen, die sogar auf $\Omega_R^{ext} := \{x \in \Re^3 ||x| > R\}$ harmonisch



Abb. 1: Σ_E ist die Erdoberfläche, Ω_R ist eine Bjerhammarsphäre für Σ_E , und Ω_γ ist eine Sphäre dicht unterhalb der Satellitenbahn

sind approximiert werden. Daher ist es möglich SST und SGG durch Pseudodifferentialoperatoren, die auf geeigneten Hilberträumen von Funktionen, welche harmonisch auf dem Außenraum einer Sphäre sind, zu beschreiben. Dies bietet auf Grund der einfacheren Topologie solcher Räume erhebliche Vorteile und gestattet es, die einfache Geometrie der Sphäre zu nutzen. Letzendlich führt das auf eine Operatorgleichung der folgenden Form:

$$\Lambda : \mathscr{H}(\{A_n\}; \Omega_R^{\text{ext}}) \to \mathscr{H}(\{A_n\}; q; \Omega_{\gamma}^{\text{ext}}))$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} F_{n,k}^R H_{n,k}(R; \cdot) \mapsto \Lambda F :$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \Lambda^{\wedge}(n) F_{n,k}^R H_{n,k}^{(q)}(\gamma; \cdot)$$
(1)

Dabei sind $\mathscr{H}(\{A_n\}; \overline{\Omega_R^{\text{ext}}})$ und $\mathscr{H}(\{A_n\}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})$ Hilberträume von Funktionen, die jeweils auf dem abgeschlossenen Außenraum der Sphären Ω_R und Ω_γ wohldefiniert sind und im Falle von $\mathscr{H}(\{A_n\}; \overline{\Omega_R^{\text{ext}}})$ auf Ω_R^{ext} harmonisch sind. Der Hilbertraum $\mathscr{H}(\{A_n\}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})$ enthält alle Bilder von $\mathscr{H}(\{A_n\}; \overline{\Omega_R^{\text{ext}}})$ unter der Abbildung Λ . Die Folge $\{A_n\}$ ermöglicht es uns, den entsprechenden Raum so zu gestalten, dass er für Funktionen bzw. Daten auf der Erdoberfläche bzw. dem Satellitenorbit die notwendige mathematische Struktur hat. Der Raum $\mathscr{H}(\{A_n\}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})$ besitzt eine Struktur, welche geeignet ist, um erste (STT, q = 1) bzw. zweite (SGG, q = 2) Radialableitungen harmonischer Funktionen **Z**11 $\{H_{n,k}(R;\cdot)\}_{n\in\mathfrak{N}_0;k=1,\ldots,2n+1}$ Die beschreiben. und $\{H_{n,k}^{(q)}(\gamma; \cdot)\}_{n \in \mathfrak{N}_0; k=1,\dots,2n+1}$ sind jeweils ein \mathscr{L}^2 -vollständiges Orthonormalsystem. Der Operator Λ ist ein sogenannter isotroper Pseudodifferentialoperator und wird durch sein Symbol $\{\Lambda^{\wedge}(n)\}_{n\in\mathfrak{N}_0}$ charakterisiert: Es ist für SST und SGG gegeben durch

$$\Lambda^{\wedge}(n) := \begin{cases} \frac{(n+1)}{\gamma} \left(\frac{R}{\gamma}\right)^n \\ \frac{(n+1)(n+2)}{\gamma^2} \left(\frac{R}{\gamma}\right)^n \\ \text{für } n \in \mathfrak{N}_0; \ k = 1, \dots, 2n+1 \text{ für } \text{SST}(q=1) \\ \text{für } n \in \mathfrak{N}_0; \ k = 1, \dots, 2n+1 \text{ für } \text{SGG}(q=2) \end{cases}$$

Die kompliziert aussehende Pseudodifferentialoperatorgleichung (1) bildet die harmonische Funktion *F* auf $(-1)^q \frac{\partial^q F}{\partial r^q} \Big|_{\overline{\Omega_{\gamma}^{ext}}}$ eingeschränkt auf $\overline{\Omega_{\gamma}^{exp}}$ ab (wobei q = 1 für SST und q = 2 für SGG). Das Symbol $\{\Lambda^{\wedge}(n)\}_{n\in\mathfrak{R}_0}$ wird wesentlich durch den führenden Term $(R/\gamma)^n$ bestimmt. Eine leichte Umformung zeigt, dass die Operatorgleichung (1) ein inverses schlecht-gestelltes Problem ist: Der Operator Λ ist injektiv und kompakt, besitzt die singulären Werte $\{\Lambda^{\wedge}(n)\}_{n\in\mathfrak{R}_0}$ und hat eine unstetige Inverse $\Lambda^{-1} : \operatorname{im}(\Lambda) \to \mathscr{H}(\{A_n\}; \overline{\Omega_R^{ext}}),$ die durch

$$egin{aligned} &\Lambda^{-1}G := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} (\Lambda^{\wedge}(n))^{-1} \; G_{n,k}^{\gamma} H_{n,k}(R;\cdot) \ & ext{für} \; G = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} G_{n,k}^{\gamma} H_{n,k}^{(q)}(\gamma;\cdot) \end{aligned}$$

gegeben ist. Die Unstetigkeit der Inversen Λ^{-1} sowie die Tatsache, dass Λ im Allgemeinen nicht surjektiv ist, bewirken, dass $\Lambda F = G$ erstens nicht für alle (verrauschten) rechten Seiten $G \in \mathscr{H}(\{/A_n\}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})$ lösbar ist und dass zudem Meßfehler (in der rechten Seite *G*) beliebig verstärkt werden können. Daher ist es nötig, die Operatorgleichung mit Hilfe eines Regularisierungsverfahrens zu lösen. Hinzu kommt, dass keine (verrauschte) rechte Seite G von $\Lambda F = G$ vorliegt sondern lediglich ein Satz Meßdaten $\{(y_i^N, G(y_i^N)) | i = 1, \ldots, N\}$ mit $G(y_i^N) = \frac{\partial^q V(y_i^N)}{\partial r^q} + \epsilon_i, i = 1, \ldots, N$, wobei $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_N$ die Meßfehler sind.

2.2 Regularisierung und Parameterwahlstrategie

Die Prinzipien und die Notwendigkeit einer Regularisierung für inverse Probleme, hier insbesondere für das SST-Problem und das SGG-Problem, sind weitläufig bekannt und motiviert, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen wird. Es scheint nicht möglich die beiden gewählten Zugänge, die im einzelnen in Abschnitt 2.4 und Abschnitt 2.5 beschrieben sind, so als Projektionsverfahren zu interpretieren, dass die aus der Literatur bekannten nicht-heuristischen Parameterwahlstrategien (für Projektionsverfahren) angewendet werden können. Vielmehr ist es so, dass die Diskretisierung der Operatorgleichung mit Hilfe von Splines (vgl. auch Abschnitt 2.4) dazu führt, dass so genannte empirische Parameterwahlstrategien wie z. B. die L-Curve Method angewendet werden sollten. Dies liegt daran, dass es nötig ist die rechte Seite der Operatorgleichung, d. h. die erste bzw. zweite Radialableitung des Potentials auf Höhe der Satellitenbahn, durch einen Spline zu approximieren, der aus den diskreten Meßdaten auf der Satellitenbahn berechnet wird. Selbst wenn der Fehler dieser Meßdaten genau bekannt wäre, ist es nicht möglich den Fehler des approximierenden Splines quantitativ zu kontrollieren. Daher kann auch die in [FREEDEN und PEREVERZEV 2001] vorgeschlagene Parameterwahlstrategie nur nach einigen Vorüberlegungen angewendet werden. Die L-Curve Method (siehe [ENGL et al. 1996]) erfordert dagegen keinerlei Informationen über die Fehlerbehaftetheit der Meßdaten und kann deshalb problemlos benutzt werden (vgl. [BAUMANN 2001], [GLOCKNER 2001], [HESSE 2002], und [MICHEL 2001]). Es muß allerdings beachtet werden, dass die L-Curve Method auch fehlschlagen kann und dazu tendiert eine etwas zu glatte Lösung zu bestimmen.

Die Regularisierungsstrategien, die hier verwendet wurden, basieren alle auf einer Filterung der singulären Werte der Operatorgleichung und können mit Hilfe einer sogenannten Regularisierungsskalierungsfunktion $\{\Phi_j^{\text{reg}}\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ und des zugehörigen Regularisierungswavelets $\{\Psi_j^{\text{reg}}\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ realisiert werden. Genauer bedeutet das Folgendes: $\{\Phi_j^{\text{reg}}\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ ist eine Familie von Produktkernen, $\Phi_j^{\text{reg}}: \overline{\Omega_R^{\text{ext}}} \times \overline{\Omega_\gamma^{\text{ext}}} \to \Re$ mit der Eigenschaft, dass die Operatoren

$$(R_{j}G)(x) := \Phi_{j}^{\operatorname{reg}}(x, \cdot)^{*}_{\mathscr{H}(\{A_{n}\};q;\overline{\Omega_{\gamma}^{\operatorname{ext}}})} G, \quad x \in \overline{\Omega_{R}^{\operatorname{ext}}},$$

$$(2)$$

eine Regularisierung $\{R_j\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ bilden: D. h. $\{R_j\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ ist eine Familie stetiger Operatoren, die die Inverse Λ^{-1} punktweise approximieren und zusätzlich auf einer Filterung der singulären Werte von Λ basieren. Dabei beschreibt die sogenannte Faltung $G_1 * \mathscr{H}_{(\{A_n\};q;\overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})} G_2$ das innere Produkt in $\mathscr{H}(\{A_n\};q;\overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}})$ zwischen den Funktionen G_1 und G_2 . Zum Beispiel kann $\{\Phi_j^{\text{reg}}\}$ eine Tikhonov Regularisierungsskalierungsfunktion sein, die nicht bandlimitiert ist und auf eine Tikhonov Regularisierung führt. Die in [BAUMANN 2001], [FENGLER 2001], [GLOCKNER 2001], [HESSE 2002] betrachteten nicht bandlimitierten Regularisierungsskalierungsfunktionen sind alle Familien von Produktkernen, die für relevante Parameter *j* so stark ortslokalisierend sind, dass sie numerisch als lokal-kompakt betrachtet werden können. Daher können Approximationen $(R_iG)(x)$ der Lösung F der Operatorgleichung $\Lambda F = G$ für x aus einem bestimmten Lokalgebiet auf der Erdoberfläche auch aus nur lokalen Daten berechnet werden. Die Familie der Approximationen $\{R_jG\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$, die durch (2) gegeben ist kann als eine Familie von Tiefpaßfilterungen der Lösung F von $\Lambda F = G$ betrachtet werden. In Analogie zu Euklidischen und harmonischen Wavelets kann zu $\{\Phi_j^{\text{reg}}\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ ein zugehöriges Regularisierungswavelet $\{\Psi_j^{\text{reg}}\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ mittels $\Psi_j^{\text{reg}} := \Phi_{j+1}^{\text{reg}} - \Phi_j^{\text{reg}}$ definiert werden, welches mittels

$$(T_{j}G)(x) := \Psi_{j}^{\operatorname{reg}}(x, \cdot)^{*}_{\mathscr{H}(\{A_{n}\}; \overline{\Omega_{\gamma}^{\operatorname{ext}}})} G, \quad x \in \overline{\Omega_{R}^{\operatorname{ext}}},$$

eine Familie von bandpaßgefilterten Anteilen (Details) von F mit $\Lambda F = G$ beschreibt. Es gilt die folgende Multiskalenrekonstruktion von F:



Abb. 2: Links: Beispiel einer Tikhonov Regularisierungsskalierungsfunktion im Ortsraum. Rechts: Symbol des inversen SST-Operators (gepunktet) und verschiedene Tikhonov-Filterungen desselben im Frequenzraum

$$F(x) \approx (R_J G)(x) = (R_{J_0} G)(x) + \sum_{j=J_0}^{J-1} (T_j G)(x)$$

$$= \underbrace{\Phi_{J_0}^{\text{reg}}(x, \cdot)^* \mathscr{H}_{(\{A_n\}; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}\}}} G}_{\text{Basisapproximation}} + \underbrace{\sum_{j=J_0}^{J-1} \underbrace{\Psi_j^{\text{reg}}(x, \cdot)^* \mathscr{H}_{(\{A_n\}; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}\}}} G}_{\text{Details}}$$
(3)

Für detailliertere Informationen über Regularisierungsskalierungsfunktionen und die zugehörigen Regularisierungswavelets sei auf das Buch [FREEDEN 1999] sowie auf die numerischen Realisationen in [BAUMANN 2001], [FREEDEN 1999], [GLOCKNER 2001], [HESSE 2002] verwiesen.

Die rechte Seite der Abbildung 2 illustriert den Regularisierungsprozess. Während der inverse SST-Operator unbeschränkt ist (d. h. sein Symbol (gepunktet) mit wachsendem n über alle Grenzen wächst) wird durch die Tikhonov-Filterung künstlich, "durch Herunterziehen der Werte" für wachsendes n, Konvergenz herbeigeführt. Man erkennt deutlich, wie der Tikhonov-Filter, je nach Wahl des Regularisierungsparameters, dem wirklichen Verlauf des Symbols unterschiedlich lange folgt, um dann, ab einem bestimmten Grad, das Anwachsen des Symbols zu unterdrücken.

Die eigentlich schwierige Aufgabe ist die Diskretisierung der Faltungen in (3) mit Hilfe der gemessenen verrauschten Daten und die Entscheidung, wann die Regularisierung zu stoppen ist. Dabei ist zu beachten, dass zum einen diese Faltungen nur in einem Sonderfall $\mathscr{L}^2(\Omega_{\gamma})$ -Integrale sind und zum anderen die verrauschten Meßdaten $\{(y_i^N, G(y_i^N))|i = 1, ..., N\}$ in Punkten $\{y_i^N|i = 1, ..., N\}$ auf der realen Satellitenbahn in Au-Benraum $\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}$ und nicht auf der Sphäre Ω_{γ} gegeben sind.

2.3 Der Schwarzsche alternierende Algorithmus – eine Gebietszerlegungsmethode

Bei den im Folgenden häufig erwähnten Spline-Interpolations- und Spline-Smoothingproblem treten große lineare Gleichungssysteme mit vollbesetzten positiv definiten symmetrischen Matrizen auf. Um solche Gleichungssysteme zu lösen, sind effiziente und schnelle Gleichungslöser erforderlich. Ein Weg solche Systeme für gewisse Typen von Splines zu lösen ist ein iteratives Verfahren, z.B. das CG-Verfahren oder GMRES, in Kombination mit sogenannten schnellen Summationsverfahren, die für gewisse Klassen von Splines in [GLOCKNER 2001] entwickelt und in [GLOCKNER 2001], [MICHEL 2001] numerisch getestet wurden. Diese werden in Abschnitt 2.6 genauer beschrieben werden. Eine andere Herangehensweise stellt der Schwarzsche alternierende Algorithmus dar. Bei der multiplikativen Variante des Schwarzschen alternierenden Algorithmus, die in [BAU-MANN 2001], [GUTTING 2002], [HESSE 2002] zur Lösung solcher Gleichungssysteme verwendet wird, handelt es sich um ein Verfahren, das zur Lösung eines beliebigen linearen Gleichungssystems mit einer positiv definiten symmetrischen Matrix verwendet werden kann. Dabei spielt es keine Rolle, welche Anwendung auf das lineare Gleichungssystem geführt hat. Das Verfahren hat die Standardstruktur eines iterativen Algorithmus, nämlich $x_{n+1} = x_n + \tilde{A}^{-1}(y - Ax_n)$, wobei Ax = y gelöst werden soll und \tilde{A} eine Approximation von A ist, so dass $Az = (y - Ax_n)$ leicht zu lösen ist. In diesem Fall wechselt allerdings dauernd. Genauer wird die Matrix A des großen Gleichungssystems Ax = y (nach eventuellem Permutieren von Zeilen und Spalten von A) in (überlappende) Blockmatrizen längs der Diagonale aufgesplittet. Die Matrizen A entsprechen diesen kleineren Blockmatrizen, eingebettet in den größeren Raum des ursprünglichen linearen Gleichungssystems. In jedem Iterationsschritt muß also jedes dieser kleineren linearen Gleichungssysteme einmal gelöst werden. Auf Grund der geringeren Größe der kleineren Gleichungssysteme kann in einem Preprocessing Step z. B. eine Cholesky Faktorisierung dieser Matrizen berechnet und im Arbeitsspeicher gehalten werden, so dass die kleinen Systeme in jedem Iterationsschritt mit der zugehörigen Rückersetzungsroutine schnell und effizient gelöst werden können. Den größten numerischen Aufwand bei diesen Verfahren erfordert der Update des Residuums $y - Ax_n$, weil dazu in einem Iterationsschritt nacheinander alle Einträge der großen Matrix A gebraucht werden. Da bei den hier interessanten Anwendungen die Matrixeinträge als elementare Funktionen (die von dem Meßpunkttupeln abhängen) leicht berechenbar sind, können diese während

des Updates ausgerechnet werden. Durch eine Verwendung der in Abschnitt 2.6 beschriebenen Summationsverfahren kann dieser Update noch erheblich beschleunigt werden.

Zur Illustration der Effizienz des Schwarzschen alternierenden Algorithmus seien folgende Zahlen genannt: Ein lineares Gleichungssystem eines Spline-Interpolationsproblems mit ca. 10 000 Unbekannten, welches bei direktem Lösen mit Cholesky 2,5 Stunden dauert, kann bei geeigneter Wahl der Parameter im Schwarzschen alternierenden Algorithmus in 18 min gelöst werden (vgl. [BAUMANN 2001], [HESSE 2002]). Die verwendete multiplikative Variante des Schwarzschen alternierenden Algorithmus bewirkt nicht nur eine erhebliche Reduzierung der Rechenzeit, sondern auch des Speicherbedarfs. Einen fundamentalen Einfluß auf die Konvergenz des Algorithmus hat der Überlapp der Blockmatrizen auf der Diagonale der ursprünglichen Matrix. Dies wird in [BAUMANN 2001, GUTTING 2002, HESSE 2002] und [FREEDEN und HESSE 2002] ausführlich untersucht. In unserem Fall entspricht jeder Eintrag der Matrix A einem Tupel (y_i^N, y_i^N) von Meßdatenpunkten, daher entspricht das Splitten der ursprünglichen großen Matrix einem Aufteilen des Meßpunktesystems in (überlappende) Teilsysteme. Einer solchen Aufteilung der Meßpunkte kann natürlich eine geometrische Aufteilung des Gebietes zu Grunde liegen, in dem die Messungen vorgenommen wurden - daher wird der Schwarzsche alternierende Algorithmus auch als ein Gebietszerlegungsverfahren bezeichnet.

Die Idee des Schwarzschen alternierenden Algorithmus geht auf die Publikation [SCHWARZ 1890] aus dem Jahr 1890 zurück und wurde seither von vielen Autoren untersucht. Das Interesse am Schwarzschen alternierenden Algorithmus hat sich seit 1985 durch die Verfügbarkeit moderner, schneller und paralleler Computer verstärkt. Grundsätzlich können die verschiedenen Varianten des Schwarzschen alternierenden Algorithmus in zwei Klassen unterteilt werden: multiplikative Varianten, wie die in [BAUMANN 2001], [GUTTING 2002], [HESSE 2002] verwendete, und additive Varianten. Die additiven Varianten eignen sich besonders zur Implementierung auf Parallelrechnern, da hier die Teilsysteme parallel auf verschiedenen Rechnern gelöst werden können und der Update nicht sukzessive (wie im multiplikativen Fall) sondern einmal am Ende des Iterationsschritts erfolgt. Solch eine additive Variante auf Parallelrechnern bietet noch eine weitere Möglichkeit den Algorithmus zu beschleunigen. Die Verwendung des Schwarzschen alternierenden Algorithmus zur Lösung der linearen Gleichungssysteme des Spline-Interpolations- und Spline-Smoothingproblems wurde von der Anwendung entsprechender Algorithmen zur Lösung des radialen Basisfunktionen Interpolationsproblems in [BEATSON et al. 2000] inspiriert und in [HESSE 2002] für unsere Bedürfnisse erweitert.

2.4 Lösung der Operatorgleichung mittels Regularisierung durch Multiresolution

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben (vgl. auch [FREEDEN et al. 1999]), wird die Operatorgleichung $\Lambda F = G$ des SST-Problems bzw. des SGG-Problems mit Hilfe einer Regu-

larisierungsskalierungsfunktion $\{\Phi^{\mathrm{reg}}_j\}_{j\in\mathfrak{N}_0}$ und des zugehörigen Regularisierungswavelets $\{\Psi_i^{\text{reg}}\}_{i\in\mathfrak{N}_0}$ gelöst. Die regularisierte Lösung (3) wird nun diskretisiert, indem die rechte Seite G durch einen glättenden Spline $S_{\lambda} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i}^{N} L_{i}^{N} \text{ bezüglich der Meßfunktionale}$ $\mathscr{L}_{i}^{N} : \mathscr{H}(\{A_{n}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\text{ext}}}) \to \Re, H \mapsto \mathscr{L}_{i}^{N} := H(y_{i}^{N}), \text{ mit }$ Repräsentanten $L_{i}^{N}, i \in \{1, \dots, N\},$ ersetzt wird. Der Raum $\mathscr{H}(\{A_n\}; q; \overline{\Omega_{\gamma}^{\exp}})$ in der Formulierung der Operatorgleichung wird dabei in Abhängigkeit von der Meßdatendichte gewählt. Der Spline wird mit dem Schwarzschen alternierenden Algorithmus berechnet, und der Glättungsparameter λ kann mittels einem zu Morozovs Diskrepanz-Prinzip bzw. zur L-Curve Method (siehe [KIRSCH 1996], [ENGL et al. 1996] analogen Verfahren bestimmt werden. Beide Strategien werden in [BAUMANN 2001], [GUTTING 2002], [Hesse 2002] numerisch getestet. In den vorgenommenen numerischen Tests führte die von Morozovs Diskrepanz-Prinzip inspirierte Strategie zu einem etwas zu großen Glättungsparameter, wogegen die L-Curve Method hervorragende Ergebnisse lieferte. Ersetzen von G in (3) durch den Spline S_{λ} führt zu der diskretisierten regularisierten Lösung

$$F(x) \approx \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N \Phi_J^{\text{reg}}(x, y_i^N) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N \Phi_{J_0}^{\text{reg}}(x, y_i^N) + \sum_{j=J_0}^{J-1} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N \Psi_j^{\text{reg}}(x, y_i^N), \quad x \in \overline{\Omega_R^{\text{reg}}},$$
(4)

die eine Linearkombination von stark ortslokalisierenden Funktionen ist. Es ist zu beachten, dass zur numerischen Berechnung die Reihenentwicklungen der Kerne Φ_j^{reg} und Ψ_j^{reg} in (4) bei einem genügend hohen Grad abgebrochen werden müssen, da die zur Regularisierung in Frage kommenden Regularisierungsskalierungsfunktionen keine bekannte Darstellung als elementare Funktionen haben. Der Regularisierungsparameter *J* kann mit der L-Curve Method bestimmt werden.

Numerische Tests des Verfahrens wurden für eine lokale Rekonstruktion eines gewissen Frequenzbereichs von EGM96 aus SGG-Daten durchgeführt. Dabei wurden simulierte verrauschte SGG-Daten auf einem Reuter-Gitter auf einer Sphäre in etwa 250 km über der Erde erzeugt und verrauscht. Abbildung 3 zeigt das (mit Hilfe der Tikhonov-Regularisierungsskalierungsfunktion) aus den simulierten verrauschten SGG-Daten in 15768 Gitterpunkten rekonstruierte Potential im linken Bild und den Fehler der Rekonstruktion im rechten Bild. Dabei mußte wegen Oszillationseffekten am Rand, sogenannten Gibbs' Phänomenen, ein gewisser Randbereich bei der lokalen Rekonstruktion weggeschnitten werden. Der mittlere absolute Fehler der in Abbildung 3 dargestellten Rekonstruktion beträgt 1,53 m² s⁻². Für weitere Details wird auf [BAUMANN 2001] und [HESSE 2002] verwiesen.



Abb. 3: Die Rekonstruktion des Gravitationspotentials mit den Anteilen von EGM96 der Grade n = 36,...,200 in m^2s^{-2} (linkes Bild) und der Fehler dieser Rekonstruktion (rechtes Bild)

2.5 Approximation des Potentials mit Smoothing Splines

Eine weitere Variante zur Lösung des SST-Problems (und des SGG-Problems) nutzt gezielt die glättenden Eigenschaften glättender Splines zum Kompensieren der Schlechtgestelltheit des SST-Problems und des SGG-Problems. Der Ausgangspunkt ist das in Abschnitt 2.1 erwähnte Runge-Walsh Prinzip (vgl. [FREEDEN 1980] und [FREEDEN 1999], welches es gestattet das Erdgravita-



Abb. 4: Σ_E ist die Erdoberfläche, und Ω_R ist eine Bjerhammarsphäre für Σ_E

tionspotential $V \in \operatorname{Pot}^{(0)}(\overline{\sum_{E}^{\operatorname{ext}}})$ auf $\overline{\sum_{R}^{\operatorname{ext}}}$ durch ein Potential in einem Hilbertraum $\mathscr{H}(\{A_n\}; \overline{\Omega_R^{\operatorname{ext}}})$ zu beschreiben (vgl. auch Abbildung 4). Das Potential kann in diesem Hilbertraum durch einen glättenden Spline bzgl. der SST-Meßfunktionale $\mathscr{L}_{i}^{N} : \mathscr{H}(\{A_{n}\}; \overline{\Omega_{R}^{\text{ext}}}) \rightarrow \mathfrak{R}, F \mapsto \mathscr{L}_{i}^{N} F := \frac{\partial F(y_{i}^{N})}{\partial r}$ approximiert werden. Der Raum $\mathscr{H}(\{A_{n}\}; \overline{\Omega_{R}^{\text{ext}}})$ wird so gewählt, dass einerseits die Repräsentanten L_{i}^{N} der Meßfunktionale \mathscr{L}_{i}^{N} , $i \in \{1, \ldots, N\}$, (und die Einträge der Matrix des linearen Gleichungssystems zur Berechnung des Splines) als elementare Funktionen darstellbar sind und dass andererseits die Ortslokalisation dieser Repräsentanten an die Meßdatendichte angepaßt ist. Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Spline-Koeffizienten wird mit dem Schwarzschen alternierenden Algorithmus gelöst und ein geeigneter Glättungsparameter kann mit der L-Curve Method bestimmt werden. Aus theoretischer Hinsicht ist es nicht vorhersagbar, ob der so berechnete Spline bereits eine gute Approximation darstellt oder noch mit einer Skalierungsfunktion zusätzlich geglättet werden muß, um die Schlechtgestelltheit des SST-Problems vollständig zu kompensieren. In den numerischen Studien haben die glättenden und entrauschenden Eigenschaften des glättenden Splines die Schlechtgestelltheit des SST-Problems bereits vollständig kompensiert. Abbildung 5 zeigt links das Gravitationspotential, welches Anteile von EGM96 der Grade



Abb. 5: Das Gravitationspotential mit Anteilen von EGM96 der Grade n = 5,...,80 (linkes Bild), der glättende Spline, berechnet aus 28568 verrauschten simulierten SST-Daten (mittleres Bild) und der Fehler dieses Splines (rechtes Bild) in m^2s^{-2}

n = 5,...,80 beinhaltet, in der Mitte den glättenden Spline der dieses Potential approximiert und rechts den Fehler dieser Approximation. In dieser Simulation wurden verrauschte SST-Daten auf einem "gleichverteilten" Reuter Gitter (d. h. die Datendichte ist global, also auch in Äquatornähe und Polnähe, ungefähr gleich) von 28568 Punkten (vgl. [GLOCKNER 2001]), projiziert auf ein Rotationsellipsoid, betrachtet. Der mittlere Fehler der Approximation beträgt 3,0763 m² s⁻².

Um eine Multiskalenrekonstruktion des Potentials zu bekommen, kann der glättende Spline $S_{\gamma} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^N L_i^N$ mit einer beliebigen Skalierungsfunktion $\{\Phi_j\}_{j \in \Re_0}$ für $\mathscr{H}(\{A_n\}; \Omega_R^{\text{ext}})$ und dem zugehörigen Wavelet $\{\Psi_j\}_{j \in \Re_0}$ gefaltet werden. Eine Skalierungsfunktion $\{\Phi_j\}_{j \in \Re_0}$ ist eine Familie von Produktkernen, die eine approximative Identität erzeugt, d. h. $\lim_{j \to \infty} \frac{\Phi_j(x, \cdot)^*}{\mathscr{H}(\{A_n\}; \Omega_R^{\text{ext}})}F = F(x)$ für alle $F \in \mathscr{H}(\{A_n\}; \Omega_R^{\text{ext}})$. Das zugehörige lineare Wavelet ist durch $\Psi_j := \Phi_{j+1} - \Phi_j$ definiert. Das bedeutet, dass eine Skalierungsfunktion als eine Familie von Tiefpaßfiltern und das zugehörige Wavelet als eine Familie von Bandpaßfiltern interpretiert werden kann. Eine Multiskalenrekonstruktion von V ist dann gegeben durch die Summe

$$V(x) \approx \Phi_J(x, \cdot)^* \mathscr{H}_{(\{A_n\};\overline{\Omega_R^{ext}})} S_{\gamma}$$

$$= \Phi_{J_0}(x, \cdot)^* \mathscr{H}_{(\{A_n\};\overline{\Omega_R^{ext}})} S_{\gamma} + \sum_{j=J_0}^{J-1} \Psi_j(x, \cdot)^* \mathscr{H}_{(\{A_n\};\overline{\Omega_R^{ext}})} S_{\gamma}$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^N \alpha_i^N \frac{\partial}{\partial r_{y_i^N}} \Phi_{J_0}(x, y_i^N)}_{=P_{J_0}V(x)} + \sum_{j=J_0}^{J-1} \underbrace{\sum_{i=1}^N \alpha_i^N \frac{\partial}{\partial r_{y_i^N}} \Psi_j(x, y_i^N)}_{=T_jV(x)}.$$
(5)

Abbildungen 6 und 7 zeigen eine Multiskalenrekonstruktion des im linken Bild in Abbildung 5 dargestellten Potentials. Es gilt die Beziehung $P_{i+1}V = P_iV + T_iV$.



Abb. 6: Multiskalenrekonstruktion (mittels Abel-Poisson-Kernen) des Gravitationsptoentials mit Anteilen von EGM96 der Grade n = 5,...,80. Obere Reihe: die Approximationen P_2V , P_3V , P_4V , P_5V , und untere Reihe: die zugehörigen Details T_2V , T_3V , T_4V , T_5V in m^2s^{-2}



Abb. 7: Multiskalenrekonstruktion des Gravitationspotentials (mittels Abel-Poisson-Kernen) mit Anteilen von EGM96 der Grade n = 5,...,80. Obere Reihe: die Approximationen P₆V, P₇V, P₈V, P₉V, und untere Reihe: die zugehörigen Details T₆V, T₇V, T₈V in m²s⁻²

2.6 Schnelle Summationsverfahren – Fast Multipole Methods

Bei geeigneter Wahl der Hilberträume bei der Formulierung der Operatorgleichung (1) kann neben dem Schwarzschen alternierenden Algorithmus auch eine Variante der Fast Multipole Method zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme benutzt werden. Für eine detaillierte Beschreibung, die den Rahmen dieses Berichts sprengen würde, sei auf [FREEDEN 1999] und [GLOCKNER 2001] und die darin reichlich enthaltenen Zitatstellen verwiesen. Hier sollen nur kurz die Ideen, die hinter der Methode stecken, erläutert werden.

Der Nachteil der Methode soll zunächst nicht verschwiegen werden. Es ist eine sehr genaue analytische Kenntnis des zugrundeliegenden Kernes notwendig und dieser muss bestimmte Eigenschaften vorweisen. So ist es nicht verwunderlich, dass die FMM bisher nur für wenige Kerne formuliert werden konnte, wie z. B. die Fundamentallösungen der Laplace- sowie der Helmholtzgleichungen. Dies scheint zunächst eine große Einschränkung zu sein. Es wurde aber in [GLOCKNER 2001] gezeigt, dass eine große Klasse von Kernen zur Verfügung steht, die eine Anwendung der FMM möglich macht.

Wenden wir uns nun der Beschreibung der FMM zu. Wie wir im folgenden Kapitel erkennen werden, besteht unsere Aufgabe darin einen schnellen Algorithmus zu entwickeln, der ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{K}a = b$ effizient löst, wobei die Einträge der Systemmatrix durch den Kern

$$k(x, y) = \frac{1}{|x - y|}$$

bzw. durch (radiale) Ableitungen desselben, also $(y \cdot \nabla_y)^m k(x,y)$ gegeben sind. Wir beschränken uns hier auf den Singularitätenkern, andere Kerne sind jedoch ebenfalls einsetzbar (siehe [GLOCKNER 2001]).

Die FMM wurde ursprünglich entwickelt um Summationen der Form $\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{1}{|x_i-y|}$ für eine große Anzahl von Punkten y effizient zu berechnen. Dazu wurde der ortslokalisierende Charakter des Kernes k(x, y) ausgenutzt, d. h. die Eigenschaft, dass der größte Anteil der Energie in einem kleinen Bereich um den Aufpunkt y konzentriert ist. Der Beitrag derjenigen x_i die nahe bei y, im sogenannten Nahfeld, liegen wird explizit berechnet, während der Anteil von weit entfernten, also im Fernfeld liegenden Punkten x_i schnell und approximativ hinzugefügt wird. Zunächst ist dazu das gesamte Berechnungsgebiet in einen Würfel einzubetten, der dann hierarchisch in jeweils acht neue Würfel unterteilt wird. In jedem Unterteilungsschritt werden die Punkte in die Würfel einsortiert. Die Unterteilung wird adaptiv durchgeführt, d. h. eine weitere Unterteilung wird nur dann vorgenommen wenn noch eine bestimmte Mindestanzahl von Punkten im Würfel enthalten ist. Auf der Basis dieser hierarchischen Unterteilung des Gebietes kann für jeden Würfel Nah- und Fernfeld bestimmt werden. Abbildung 8 illustriert eine solche Unterteilung graphisch.

Zur Approximation des Fernfeldes wird die bekannte Entwicklung des Kernes k(x, y) benutzt, d. h.

$$k(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|y|^n}{|x|^{n+1}} Y_{n,k}(x/|x|) Y_{n,k}(y/|y|),$$

wobei $Y_{n,k}$ die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen bezeichnen. Anstelle des Ursprungs wird die Entwicklung aber nun bezüglich der Zentren x_0 bzw. y_0 der durch die Unterteilung des Berechnungsgebietes entstandenen Würfel vorgenommen. Da die Entwicklung nur für das Fernfeld notwendig ist, und somit x_0 und y_0 weit genug entfernt liegen, kann die Konvergenz der Reihen garantiert und die Reihen schon nach einem sehr kleinen Entwicklungsgrad abgebrochen werden, ohne dadurch einen großen Fehler zu erzeugen. Mathematisch ist der Fehler nur in einer Umgebung von (x_0, y_0) kontrollierbar, so dass verschiedene Entwicklungen für verschiedene (x_0, y_0) notwendig werden um eine globale Entwicklung für das Fernfeld zu erhalten. Für die Ableitungen $(y \cdot \nabla_y)^m k(x, y)$ erhält man indirekt eine Entwicklung durch Anwendung von $(y \cdot \nabla_y)^m$ auf die Entwicklung für k(x, y).

Für eine algorithmische Darstellung des gesamten Algorithmus sind noch eine Reihe mathematischer Tools, insbesondere die Translations- und Konversionstheoreme für Kugelfunktionen, notwendig auf deren Darstellung wir aber der Übersichtlichkeit wegen verzichten. Der Vorteil des Algorithmus besteht darin, dass ein großer Teil in einem a-priori Schritt, also einmal für alle Berechnungspunkte, durchgeführt werden kann. Dazu gehört insbesondere die Ermittlung der sogenannten Fernfeldkoeffizienten für die verschiedenen Würfel, die die Information des Fernfeldes des entsprechenden Würfels enthalten. Letztendlich erhält man einen Algorithmus der eine Matrix-Vektor-Multiplikation in $\mathcal{O}(N)$ Operationen und mit $\mathcal{O}(N)$ Speicheranforderung durchführt.



Abb. 8: Hierarchische Unterteilung des Berechnungsgebietes (links), adaptive Unterteilung (Mitte) sowie Nah- und Fernfeld (rechts) Sind die Einträge der Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems aus dem Kern k(x, y) bzw. Ableitungen $(y \cdot \nabla_y)^m k(x, y)$ entstanden, so läßt sich der Algorithmus in einen iterativen Gleichungslöser zur Beschleunigung der Matrix-Vektor-Multiplikationen einbauen. Dies wurde sowohl theoretisch als auch praktisch, d. h. numerisch in [GLOCKNER 2001] und [MICHEL 2001] untersucht. Die beiden genannten Arbeiten enthalten alle notwendigen Details für das Verständnis der Methode sowie Verweise auf andere Gebiete in denen die FMM bereits erfolgreich eingesetzt wurde. Auf die Anwendbarkeit und Effizienz der Methode in der Gravitationsfeldmodellierung wird im nächsten Kapitel dieses Berichts näher eingegangen.

2.7 Simulationen mit der Fast Multipole Method

Im vorliegenden Kapitel werden zwei Strategien zur Gravitationsfeldmodellierung aus kinematischen Orbitdaten vorgestellt wie sie, basierend auf den Verfahren in [FREE-DEN 1999], in [FENGLER 2001], [GLOCKNER 2001] und [MI-CHEL 2001] vorgeschlagen und ausgiebig getestet wurden. Das Kapitel untergliedert sich in zwei Teile: erstens die Beschreibung eines Verfahrens bei dem ein mit der Fast Multipole Method (FMM) beschleunigter Löser eingesetzt wird um die mit harmonischen Splines diskretisierte Operatorgleichung direkt zu lösen. Die zweite Methode ist eine Zweischrittlösung. Zunächst werden die Meßwerte in Orbithöhe mit Hilfe eines harmonischen Splines auf einer Sphäre interpoliert, wobei zur Bestimmung des Splines wiederum die FMM eingesetzt wird. Anschließend wird die notwendige Downward Continuation und die Regularisierung durch Faltungen des Splines mit der sogenannten Tikhonov Regularisierungsskalierungsfunktion und den zugehörigen Wavelets erreicht.

Daten Preprocessing

Wir gehen in unseren Zugängen immer davon aus, dass ein kinematischer Orbit des tieffliegenden Satelliten (z. B. CHAMP) vorliegt. Für die nun folgenden Betrachtungen wurde hierzu die Satellitenmission detailliert simuliert. Der Orbit wurde mit dem Softwarepaket MOVSAT aus einem künstlichen Erdgravitationsfeld (EGM96) durch Integration der Bewegungsgleichungen generiert. Man erhält nun einen Satz $x(t_i)$, i = 1,..., N von diskreten Ephemeriden, die mit einem Korrelierten Rauschen mit Standardabweichung $\sigma = 1 m$ und Korrelationsfaktor $\rho = 0.8$ überlagert wurden. Eine genaue Beschreibung der Vorgehensweise findet man in [FENGLER 2001].

Über das Newtonsche Bewegungsgesetz $\ddot{x}(t) = \nabla V(x(t))$ wird nun der Zusammenhang zwischen der Bahn des Satelliten und dem Gravitationspotential der Erde etabliert, wobei *V* das Gravitationspotential bezeichnet. Es ist also eine zweimalige numerische Differentiation der diskret vorliegenden Bahn des Satelliten durchzuführen. Auch das numerische Differenzieren verrauschter Daten ist an sich schon ein schlecht gestelltes Problem. Daher wird ein Denoising der Daten vorgeschaltet. Verschiedene Denoising-Verfahren wie z. B. approximierende Splines und Wavelet-Varianten wurden in

der Diplomarbeit [FENGLER 2001] getestet, wobei sich das Translationsinvariante Wavelet Denoising mit Hard-Thresholding als äußerst effektiv erwies. Zur Differentation der Daten stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, so z. B. Methoden basierend auf der Taylor-Formel, der sogenannte Newton-Gregory Zugang, Spline-Techniken oder die Filterung einer Fourier-Entwicklung. Alle diese Verfahren sind wiederum in [FENGLER 2001] beschrieben und werden speziell für die vorliegende Aufgabe getestet und verglichen. Dabei stellt sich heraus, dass die Newton-Gregory Mehrpunktformeln, die auf einer Newton-Interpolation der Daten aufbauen, einen geeigneten Zugang bieten.

Aus dem riesigen Pool an Daten die eine moderne Satellitenmission innerhalb weniger Wochen liefert, wird nun eine gewisse Menge selektiert. Dies erfolgt unter der Annahme dass eine gleichförmige Verteilung der Daten das später zu lösende lineare Gleichungssystem stabilisiert. Abbildung 9 zeigt ein entsprechendes, auf einer Sphäre gleichförmig verteiltes Punktgitter. Zu jedem vorgegebenem Gitterpunkt wird derjenige Meßpunkt mit dem kleinsten euklidischen Abstand zur Auswertung herangezogen.

Das bisher dargestellte Preprocessing der Daten ist für die beiden im folgenden beschriebenen Algorithmen identisch.

Diskretisierung der Operatorgleichung mit harmonischen Splines

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine Möglichkeit die Operatorgleichung (1) geeignet mit harmonischen Splines zu diskretisieren, skizzieren kurz dass die auftretenden Gleichungssysteme mit einem – wie im Unterkapitel 2.6 angedeutet – FMM beschleunigten iterativen Löser gelöst werden können und präsentieren Ergebnisse von Simulationen für die CHAMP-Mission.

<u>Zun</u>ächst einmal werden <u>die</u> Räume $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\{A_n\}; \Omega_R^{\text{ext}})$ und $\mathscr{H} = \mathscr{H}(\{A_n\}; q; \Omega_r^{\text{ext}})$ aus Gleichung (1) spezifiziert, wobei für die CHAMP-Mission im folgenden q = 1 gesetzt wird. Es werden hierfür spezielle reproduzierende Hilberträume benutzt, wobei die Existenz eines reproduzierenden Kernes es erlaubt die Gleichungssysteme ohne großen numerischen Aufwand aufzustellen (vgl. [FREEDEN 1999], [GLOCKNER 2001]). Für die Folge $\{A_n\}_{n \in \mathfrak{N}_0}$, die die Räume bestimmt, sei nun



Abb. 9: Die Daten zur Modellierung werden möglichst gleichförmig auf einem "Reuter-Gitter" ausgewählt

 $A_n = (n + 1/2)^{1/2} h^{-n/2}, \quad 0 < h < 1$

gewählt. Die reproduzierenden Kerne $K_{\mathscr{H}}(\cdot, \cdot)$ von \mathscr{H} und $K_{\mathscr{H}}(\cdot, \cdot)$ von \mathscr{H} lauten dann

$$\begin{split} & K_{\mathscr{H}}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{A_n^2} Y_{n,k}^R(x) Y_{n,k}^R(y), \quad x,y \in \overline{\Omega_R^{\text{ext}}}, \\ & K_{\mathscr{H}}(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{A_n^2} Y_{n,k}^r(x) Y_{n,k}^r(y), \quad x,y \in \overline{\Omega_r^{\text{ext}}}, \end{split}$$

wobei $\{1/A_n^2 Y_{n,k}^R\}$ und $\{1/A_n^2 Y_{n,k}^r\}$ vollständige Orthonormalsysteme in \mathscr{H} bzw. \mathscr{H} bezeichnen. $\{Y_{n,k}^R\}$ und $\{Y_{n,k}^r\}$ sind die Laplaceschen Kugelflächenfunktionen orthonormiert auf Ω_R , respektive auf Ω_r . Die diskreten Meßdaten (also die rechte Seite) werden als ein Satz linear unabhängiger stetiger linearer Funktionale \mathscr{L}_x^i , i = 1,..., N auf dem Raum \mathscr{H} angenommen, d. h. in einem Reproraum können sie wie folgt mit Hilfe des Reprokernes dargestellt werden (siehe [DAVIS 1975]):

$$\mathscr{L}_{x}^{i}G(x) = (\mathscr{L}_{x}^{i}K_{\mathscr{K}}(x,\cdot),G)_{\mathscr{K}} = (x \cdot (\nabla V)(x))|_{x=x(t_{i})},$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Wir erkennen also, dass die Funktionale nichts anderes als radiale Ableitungen des Potentials V an diskreten Ephemeriden beschreiben, welche aus den Bahndaten mit Hilfe des Preprocessings bestimmt werden können. Für eine vollständige Diskretisierung müssen wir nun noch endlich-dimensionale Ansatzräume, in unserem Fall harmonische Splineräume, wählen. Wir wählen also als Ansatz- bzw. Testraum

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_{N} &= span \; (\mathscr{L}_{x}^{1} K_{\mathscr{K}}(x, \cdot), \dots, \mathscr{L}_{x}^{N} K_{\mathscr{K}}(x, \cdot)), \\ \mathscr{H}_{N} &= span \; (\Lambda^{*} \mathscr{L}_{x}^{1} K_{\mathscr{K}}(x, \cdot), \dots, \Lambda^{*} \mathscr{L}_{x}^{N} K_{\mathscr{K}}(x, \cdot)) \end{aligned}$$

wobei mit Λ^* der zu Λ adjungierte Operator gemeint ist. Das gesuchte Potential V wird nun durch eine Funktion V_N aus \mathscr{H}_N der Form

$$V_N = \sum_{i=1}^N a_i \Lambda^* \mathscr{L}_x^i K_{\mathscr{K}}(x, \cdot) \in \mathscr{H}_N$$

approximiert bzw. repräsentiert. Das Projektionsverfahren ist eine duale Least-Squares Methode (vgl. [ENGL et al. 1996]). Die Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i erfolgt über die stabilisierten Galerkin-Gleichungen

$$(\mathbf{K} + \gamma \mathbf{I})a = b$$

mit

$$\begin{array}{ll} K_{ij} &= (\Lambda^* \mathscr{L}^i_x K_{\mathscr{H}}(x,\cdot), \Lambda^* \mathscr{L}^j_x K_{\mathscr{H}}(x,\cdot))_{\mathscr{H}} \\ b_i &= (\mathscr{L}^i_x K_{\mathscr{H}}(x,\cdot), G)_{\mathscr{H}} = \tilde{v}_i = v_i + \tilde{\varepsilon}_i. \end{array}$$

Die Modifikation der rechten Seite soll andeuten, dass die Daten mit einem Rauschen ε versehen sind. Einen großen Einfluß auf die Lösung und die Stabilität (Kondition) des Gleichungssystems hat der Regularisierungsparameter γ . Bestimmt wird er im vorliegenden Fall mit der L-Curve Methode, die z.B. in [ENGL et al. 1996] beschrieben ist (für die vorliegende Anwendung siehe auch [GLOCKNER 2001] und [MICHEL 2001]). Wenden wir nun auf eine Variable des Kernes die sogenannte Kelvin-Transformation $y^* = h \frac{R^2}{h^2} y$ an, so erhalten wir nach einigen trickreichen Umformungen (für die detaillierte Ausführung sei auf [GLOCKNER 2001] verwiesen)

$$\begin{split} K_{ij} &= \frac{1}{2\pi |y|} \left((y^* \cdot \nabla_{y^*})^2 \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) \\ &+ 2(y^* \cdot \nabla_{y^*}) \left(\frac{1}{|x - y^*|} \right) + \frac{1}{|x - y^*|} \right) \Big|_{(x_i, x_j^*)}. \end{split}$$

Vergleichen wir nun die Einträge der Systemmatrix aus der letzten Gleichung mit den Ausführungen in Kapitel 2.6, so erkennen wir, dass das vorliegende lineare Gleichungssystem mit dem FMM beschleunigten Löser behandelbar ist. Ausführliche Testrechnungen, die die Anwendbarkeit und die Performance der Methode in der Gravitationsfeldmodellierung beweisen, findet man wiederum in [GLOCKNER 2001] und [MICHEL 2001].

Zum Abschluß dieses Abschnitts sollen noch einige Beispiele angegeben werden. Das Missionsszenario stellt sich wie folgt dar. Das gesamte Datenmaterial bestand aus einem 90 Tage CHAMP-Orbit (generiert mit MOV-SAT) mit einer Sampling-Rate von 0.2 Hz. Als Gravitationsfeld diente ein EGM96-Feld vollständig bis Grad und Ordnung 128. Auf diese Daten wurde, wie im Abschnitt über das Preprocessing berichtet, ein korreliertes Rauschen aufgebracht, die Daten wurden anschliessend mit dem TI-Denoising entrauscht und schließlich mit einer 7-Punkt Newton-Gregory Formel zweimal numerisch differenziert um den Gradienten zu erhalten. Aus dem Gesamtdatenpool wurde ein bestimmter gleichförmig verteilter Datensatz ausgewählt. Dies ergab ein Gleichungssystem mit 17 370 Unbekannten. Als Regularisierungsparameter wurde $\gamma = 10^{-14}$ gewählt. Der Maximalfehler der Potentialrekonstruktion beläuft sich auf 64.53 m^2/s^2 , der mittlere Fehler auf 3.19 m^2/s^2 und der RMSE auf 5.05 m^2/s^2 . Eine graphische Darstellung der Ergebnisse ist in Abb. 10 zu sehen.

Mit geringfügigen Modifikationen (vgl. [GLOCKNER 2001]) kann die Methode auch auf die GOCE-Mission angewendet werden. Um dies zu demonstrieren fügen wir noch ein lokales GOCE-Simulationsergebnis an. Wiederum liegt der Rechnung ein 90 Tage Orbit zugrunde, dieses Mal jedoch mit den GOCE-Orbitparametern. Die zweiten Radialableitungen werden als direkte Messungen angesehen und mit einem weißen Rauschen gestört. Auf ein Denoising wird in diesem Fall verzichtet. Bei lokalen Beispielen ist zu beachten, dass das Datenfenster etwas größer als das Rekonstruktionsfenster gewählt werden muss um unerwünschte Effekte an den Rändern zu vermeiden. Der lokale Datensatz führt auf ein Gleichungssystem mit 7688 Unbekannten. Bei einem Regularisierungsparameter von $\gamma = 10^{-12}$ war der Maximalfehler in der Potentialrekonstruktion 10.19 m^2/s^2 , der mittlere Fehler 1.55 m^2/s^2 und der RMSE 2.02 m^2/s^2 . Siehe Abb. 11.



Abb. 10: Die Rekonstruktion des Gravitationspotentials mit den Anteilen von EGM96 der Grade n = 3,...,128 in m²s⁻² (linkes Bild) und der Fehler dieser Rekonstruktion (rechtes Bild)



Abb. 11: Die Rekonstruktion des Gravitationspotentials (GOCE) mit den Anteilen von EGM96 der Grade n = 36,...,200 in m^2s^{-2} (linkes Bild) und der Fehler dieser Rekonstruktion (rechtes Bild)

Kombinierte Lösung aus Spline-Interpolation und Wavelet-Regularisierung

Nun wenden wir uns einer letzten Modellierungsstrategie zu, die im Anschluß an das Daten-Preprocessing aus zwei weiteren Schritten besteht. Zunächst werden die entrauschten und selektierten Meßdaten auf Orbitniveau auf eine mittlere Orbitsphäre mit einem harmonischen Spline interpoliert. Dann wird dieser Spline gefaltet mit einer Tikhonov Regularisierungsskalierungsfunktion. Diese Faltung, die auf eine numerische Integration über die Sphäre führt, ermöglicht die "downward continuation" sowie die Regularisierung des schlecht gestellten Problems. Durch den ortslokalisierenden Charakter der Skalierungsfunktionen werden lokale Rekonstruktionen und die Bestimmung lokaler Regularisierungsparameter möglich.

Wir gehen wiederum davon aus, dass entlang des Orbits ein Satz $(x \cdot \bigtriangledown_x V(x))|_{x=x(t_i)}$, i = 1, ..., N von radialen Ableitungen des gesuchten Potentials gegeben ist. Diese Daten approximieren wir nun mit einem interpolierenden harmonischen Spline S(x), wobei die Koeffizienten des Splines eindeutig durch das lineare Gleichungssystem

$$S(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i K_{\mathscr{H}}(x_j, x_i) = (x \cdot \nabla_x V(x))|_{x=x(t_j)},$$

$$j = 1, \dots, N$$

bestimmt sind $(K_{\mathscr{H}}(\cdot, \cdot)$ ist der Reprokern in einem geeigneten Reproraum \mathscr{H}). Ist der Raum \mathscr{H} wie im vorherigen Abschnitt, d. h. durch die Folge $A_n = (n + 1/2)^{1/2}$ $h^{-n/2}$, 0 < h < 1, bestimmt, so läßt sich auch in diesem Fall der FMM beschleunigte iterative Löser anwenden. Ist der Spline bestimmt, so werden downward continuation und Regularisierung durch die Faltung

$$V(y) = \int_{\Omega_r} \Phi_J(x, y) S(x) d\omega_r(x), \quad y \in \Omega_R$$

von S z. B. mit dem Tikhonov-Kern

$$\Phi_J(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \gamma_J} P_n\left(\frac{x}{|x|} \cdot \frac{y}{|y|}\right)$$

durchgeführt, wobei das Symbol des Kernes durch die singulären Werte des Operators $\sigma_n = \Lambda^{\wedge}(n)$ gegeben ist (vgl. Abschnitt 2.1); γ_J bezeichnet dabei den Regula-



Abb. 12: Die Rekonstruktion des Gravitationspotentials (kombiniertes Spline und Waveletverfahren) mit den Anteilen von EGM96 der Grade n = 36,...,128 in m²s⁻² (mittleres Bild) und der Fehler dieser Rekonstruktion (rechtes Bild)

risierungsparameter. Das Integral muss nun noch diskretisiert werden. Dies geschieht ohne Lösen eines weiteren Gleichungssystems mit sogenannten Tensor-Produkt Quadraturformeln (siehe z. B. [DRISCOLL und HEALY 1994]).

Zum Abschluß wird noch ein numerisches Beispiel dieser Methode illustriert. Das Missionsszenarium entspricht weitgehend den bereits beschriebenen, jedoch ist die CHAMP-Bahn durch ein EGM96-Feld vollständig bis Grad und Ordnung 200 generiert. Rekonstruiert wird nur bis zum Grad 128, was durch Abschneiden des Tikhonov-Kernes beim entsprechenden Grad erreicht werden kann. Da hier wieder lokale Rechnungen zu Grunde liegen, sind wiederum die Randeffekte zu beachten, weshalb es verschiedene Fenster gibt, die im linken Teil der Abbildung 12 dargestellt sind. Das äussere Fenster ist das Datenfenster (rot), das mittlere Fenster (grün) dient der Splineauswertung. Schließlich stellt das innere (blaue) Fenster das Rekonstruktionsgebiet dar. Bei einem $\gamma = 0.05$ ergibt sich ein mittlerer absoluter Fehler von $4.9 \ m^2/s^2$.

Eine ausführlichere Beschreibung des Algorithmus und umfangreiche Testrechnungen findet der Leser in den Arbeiten [GLOCKNER 2001] und [FENGLER 2001].

2.8 Diskussion der Ergebnisse und Ausblick

Die theoretischen Untersuchungen und numerischen Tests machen deutlich, dass die hier vorgestellte Herangehensweise an die satellitengestützte Erdvermessung im Falle des Gravitationspotentials sehr vielversprechend ist. Insbesondere bieten sowohl schnelle Summationsverfahren als auch der Schwarzsche Algorithmus eine schnelle und effiziente Möglichkeit große Mengen von Daten auf einem realen Satellitenorbit zu verarbeiten. Eine deutliche Beschleunigung der untersuchten Vorgehensweisen kann erreicht werden, wenn bei der Lösung der Gleichungssysteme eines Spline-Interpolationsoder Spline-Smoothingproblems eine additive Variante des Schwarzschen alternierenden Algorithmus mit einer Fast Multipole Method kombiniert wird.

Danksagung

Die hier vorgestellten Verfahren und Ergebnisse wurden, ausgehend von den in [FREEDEN 1999] vorgestellten Ideen und Techniken, wesentlich in den Dissertationen [GLOCK-NER 2001] und [HESSE 2002] und den Diplomarbeiten [BAUMANN 2001], [FENGLER 2001], [GUTTING 2002] und [MICHEL 2001] ausgearbeitet und von den Autoren des vorliegenden Artikels, um einen möglichst großen Leserkreis zu erreichen, überarbeitet und in kondensierter Form hier dargestellt. Ein besonderer Dank gilt der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG), ohne deren finanzielle Unterstützung (FR 761/5-1, FR 761/12-1) die Forschung in der AG Geomathematik, insbesondere die Entstehung der Arbeiten [GLOCKNER 2001] und [HESSE 2002] nicht möglich gewesen wäre. Weiterhin gilt Dank der Stiftung "Rheinland-Pfalz für Innovation" für Finanzielle Unterstützung.

Literatur

[AUSTEN et al. 2002] G. AUSTEN, E. W. GRAFAREND, T. REUBELT. Harmonic analysis of the Earth's gravitational field by means of semi-continuous ephemeris of a Low Earth Orbiting (LEO) GPS tracked satellite. Preprint, 2002.

[BAUMANN 2001] P. BAUMANN. Regularization of Inverse Problems in Satellite Geodesy by Wavelet Methods with Orbital Data Given on Closed Surfaces. Diploma Thesis, Teomathematics Group, Laboratory of Technomathematics, University of Kaiserslautern 2001.

[BEATSON et al. 2000] R. K. BEATSON, S. BILLINGS, W. A. LIGHT. Fast Solution of the Radial Basis Function Interpolation Equations: Domain Decomposition Methods. SIAM J. Sci. Comput. Vol. 22, No. 5 (2000), pp. 1717–1740.

[DAVIS 1975] P. J. DAVIS. Interpolation and Approximation. Dover Publications Inc., New York, 1975.

[DRISCOLL und HEALY 1994] J. R. DRISCOLL, D. M. HEALY. Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2sphere. Adv. Appl. Math., 15 (1994), pp. 202–250.

[ENGL et al. 1996] H. W. ENGL, M. HANKE, A. NEUBAUER. Regularization of Inverse Problems. Kluwer Academic Publishers, 1996.

[FENGLER 2001] M. FENGLER. Multiscale Modelling of the Earth's Gravitational Potential from Discrete Noisy CHAMP-Ephemerides. Diploma Thesis, Geomathematics Group, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2001.

[FREEDEN 1980] W. FREEDEN. On the Approximation of the External Gravitational Potential With Closed Systems of (Trial) Functions. Bull. Géod., 54 (1980), pp. 1–20.

[FREEDEN 1999] W. FREEDEN. Multicsale Modelling of Spaceborne Geodata. B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1999.

[FREEDEN et al. 1999] W. FREEDEN, O. GLOCKNER, M. THALHAM-MER. Multiscale Gravitational Field Recovery from GPS-Satellite-to-Satellite Tracking. Studia Geophys. et Geod., 43 (1999), pp. 229–264.

[FREEDEN und HESSE 2002] W. FREEDEN, K. HESSE. Spline Modelling of Geostrophic Flow: Theoretical and Algorithmic Aspects. Berichte der AGTM, Nr. 250, 2002.

[FREEDEN et al. 2002] W. FREEDEN, V. MICHEL, H. NUTZ. Satellite-to-Satellite Tracking and Satellite Gravity Gradiometry (Advanced Techniques for High-Resolution Geopotential Field Determination). Journal of Engineering Mathematics, 43 (2002), pp. 19–56.

[FREEDEN und PEREVERZEV 2001] W. FREEDEN, S. PEREVERZEV. Spherical Tikhonov Regularization Wavelets in Satellite Gravity Gradiometry with Random Noise. Journal of Geodesy, 74 (2001), 730–736.

[FREEDEN und Schneider 1998] W. FREEDEN, F. SCHNEIDER. An Integrated Wavelet Concept of Physical Geodesy. Journal of Geodesy, 72 (1998), pp. 259–281.

[FREEDEN und WINDHEUSER 1997] W. FREEDEN, U. WINDHEUSER. Combined Spherical Harmonic and Wavelet Expansion – A Future Concept in Earth's Gravitational Determination. Appl. Comput. Harm. Anal., 4 (1997), pp. 1–37.

[GLOCKNER 2001] O. GLOCKNER. On Numerical Aspects of Gravitational Field Modelling from SST and SGG by Hamonic Splines and Wavelets (With Application to CHAMP Data), Doctoral Thesis, Geomathematics Group, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2001.

[GUTTING 2002] M. GUTTING. Multiscale Gravitational Field Modelling from Oblique Derivatives. Diploma Thesis, Geomathematics Group, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2002.

[HESSE 2002] K. HESSE. Domain Decomposition Methods for Multiscale Geopotential Determination from SST and SGG. Doctoral Thesis, Geomathematics Group, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2002.

[KIRSCH 1996] A. KIRSCH. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems. Springer-Verlag, New York, 1996.

[MICHEL 2001] D. MICHEL. On the Combination of Harmonic Splines and Fast Multipole Methods for CHAMP Data Modelling. Diploma Thesis, Geomathematics Group, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, 2001. [SCHWARZ 1890] H. A. SCHWARZ. Gesammelte mathematische Abhandlungen, Vol. 2, Springer Verlag Berlin, 1890, pp. 133–134.

Anschrift der Verfasser: Technische Universität Kaiserslautern AG Geomathematik 67653 Kaiserslautern Postfach 3049, Germany Tel.: ++49-6 31-2 05-38 67 Fax: ++49-6 31-2 05-47 36 E-mail: freeden@mathematik.uni-kl.de, tmaier@mathematik.uni-kl.de www. http://www.mathematik.uni-kl.de/~wwwgeo

Zusammenfassung

Die Bestimmung des Erdgravitationspotentials aus den Meßdaten des Forschungssatelliten CHAMP lässt sich als Operatorgleichung (vgl. [FREEDEN 1999] formulieren (SST-Problem). Dieser Ansatz geht davon aus, dass ein geometrischer Orbit des Satelliten CHAMP vorliegt. Mittels numerischer Differentiation unter Einsatz eines geeigneten Denoising Verfahrens (vgl. [FENGLER 2001]) kann dann aus dem geometrischen Orbit der Gradient des Potentials längs der Bahn bestimmt werden. Damit sind insbesondere die Radialableitung (und der Flächengradient) auf einem Punktgitter auf der Bahn bekannt. In einem erdfesten System stellt sich dies als eine nahezu vollständige Überdeckung der Erde (bis auf Polar Gaps) mit einem ziemlich dichten Datengitter auf Flughöhe des Satelliten dar. Die Lösung der SST-**Operatorgleichung (Bestimmung des Potentials auf** der Erdoberfläche aus Kenntnis der Radialableitung auf einem Datengitter auf Flughöhe) ist ein schlecht gestelltes inverses Problem, das mit einer geeigneten Regularisierungstechnik gelöst werden muß. Im vorliegenden Fall wurde eine solche Regularisierung mit Hilfe von nicht-bandlimitierten Regularisierungsskalierungsfunktionen und Regularisierungswavelets umgesetzt. Diese sind stark ortslokalisierend und führen daher auf ein Potentialmodell, welches eine Linearkombination stark ortslokalisierender Funktionen ist. Ein solches Modell kann als Lokalmodell auch aus nur lokalen Daten berechnet werden und bietet daher gegenüber Kugelfunktionsmodellen wie EGM96 erhebliche Vorteile für die moderne Geopotentialbestimmung. Die Diskretisierung und numerische Umsetzung der Berechnung eines solchen Modells erfolgt mit Splines, die hier ebenfalls Linearkombinationen stark ortslokalisierender Funktionen sind. Die großen linearen Gleichungssysteme, die zur Berechnung der glättenden oder interpolierenden Splines gelöst werden müssen, können auf schnelle und effiziente Weise mit dem Schwarzschen alternierenden Algorithmus (siehe [BAUMANN 2001], [GUTTING 2002], [HESSE 2002]) in Verbindung mit schnellen Summationsverfahren (Fast Multipole Methods) (vgl. [GLOCKNER 2001], [MICHEL 2001]) gelöst werden. Eine Kombination des Schwarzschen alternierenden Algorithmus mit solchen schnellen Summationsverfahren ermöglicht eine weitere, erhebliche Beschleunigung beim Lösen dieser Gleichungssysteme. Zur Bestimmung von Glättungsparametern (Spline-Smoothing) und Regularisierungsparametern kann die L-Curve Method zum Einsatz kommen. Die numerischen Studien in den Arbeiten [BAUMANN 2001], [FENGLER 2001], [GLOCKNER 2001], [GUTTING 2002], [HESSE 2002] und [MICHEL 2001] zeigen die Signifikanz und die vielversprechenden Möglichkeiten der untersuchten Zugänge zur Verarbeitung von Daten des Satelliten CHAMP.