



Bestimmung des Hüllkreises von Kreisen mittels sequentieller linearer Optimierung

Helmuth Späth, Oldenburg

Die Problemstellung zur Ermittlung des Hüllkreises zu gegebenen Punkten wird dahingehend erweitert, dass Kreise mit den Mittelpunkten und den Radien ($r \geq 0$) gegeben sind und der entsprechende Hüllkreis gesucht ist.

1 Problemstellung

Die Bestimmung eines Kreises mit kleinstem Radius, der gegebene Punkte $(x_i, y_i), i = 1, \dots, m$, enthält, ist eine der Standardaufgaben der Koordinatenmesstechnik.

Diese Problemstellung zur Ermittlung des Hüllkreises kann dahingehend verallgemeinert werden, dass Kreise mit Mittelpunkten (x_i, y_i) und Radien $r_i \geq 0$ gegeben sind und der entsprechende Hüllkreis gesucht ist [1, 2]. Für $m = 3$ ist das das Problem des APOLLONIUS. Bezeichnet (x, y) den Mittelpunkt und r den Radius des gesuchten Hüllkreises, so ist das nichtlineare Programm

$$r \rightarrow \min \tag{1}$$

$$\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} + r_i \leq r \quad (i = 1, \dots, m), \tag{2}$$

$$r \geq 0 \tag{3}$$

lösen [1]. Da nach (2) $r - r_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$ gilt, ist (2) in der Form

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 \leq (r - r_i)^2 \quad (i = 1, \dots, m) \tag{4}$$

gleichwertig zu (2).

2 Numerische Verfahren

Für das nichtlineare Programm (1), (2), (3) ist in [1, 2] eine auf den KUHN-TUCKER-Bedingungen beruhende active-set-Methode detailliert geschildert, bei der iterativ diejenigen zwei oder drei Kreise identifiziert werden, die der Hüllkreis mit dem kleinsten Radius von außen berührt. Wir untersuchen hier, ob sich das von der Hüllkreisbestimmung für gegebene Punkte her bewährte und einfach zu implementierende Verfahren der sequentiellen linearen Optimierung [3, 4] übertragen lässt. Dazu schreiben wir (4) in der Form

$$x^2 - 2x_i x + y^2 - 2y_i y - r^2 + 2r_i r \leq r_i^2 - x_i^2 - y_i^2. \tag{5}$$

Dann kann man für in der t -ten Iteration gegebene Werte $x^{(t)}, y^{(t)}, r^{(t)}$ gemäß

$$(x^{(t)} - 2x_i)x + (y^{(t)} - 2y_i)y - r(r^{(t)} - 2r_i) \leq r_i^2 - x_i^2 - y_i^2 \tag{6}$$

die Nebenbedingungen linearisieren und hat in der t -ten Iteration das lineare Programm (1), (6), (3) nach x, y und r zu lösen. Dann setzt man ähnlich wie in [3, 4]

$$x^{(t+1)} = x, \quad y^{(t+1)} = y, \tag{7}$$

$$r^{(t+1)} = \max_i \left(\sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} + r_i \right). \tag{8}$$

Die Festsetzung (8) gewährleistet insbesondere $r^{(t+1)} \geq r_i$. Es wird somit eine Folge von linearen Programmen

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b, \quad x \leq 0 \end{aligned}$$

gelöst, wobei $\mathbf{x} = (x^+, x^-, y^+, y^-, r)^T$ mit $x = x^+ - x^-, y = y^+ - y^-, x^+, x^-, y^+, y^-, r \geq 0, b_i = r_i^2 - x_i^2 - y_i^2 (i = 1, \dots, m), c_k = 0 (k = 1, \dots, 4), c_5 = -1$ unabhängig von t ist und die Matrix A in der t -ten Iteration durch ihre Elemente

$$\begin{aligned} a_{i1} &= x^{(t)} - 2x_i \\ a_{i2} &= -a_{i1} \\ a_{i3} &= y^{(t)} - 2y_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ a_{i4} &= -a_{i3} \\ a_{i5} &= -(r^{(t)} - 2r_i) \end{aligned}$$

gegeben ist. Bei jeder Iteration wird die Lösungskomponente $r^{(t+1)} = r$ des linearen Programms gemäß (8) abgeändert. Damit ist das Verfahren der sequentiellen linearen Optimierung für das Problem (1), (6), (3) vollständig beschrieben. Sind statt Kreise Kugeln gegeben und ist statt dem Hüllkreis die Hüllkugel mit kleinstem Radius gesucht, so ist in (4) und (8) nur der Term $(z_i - z)^2$ hinzuzufügen, wenn (x, y, z) dann den gesuchten Hüllkugelmittelpunkt bezeichnet; statt der Dimension $m \times 5$ hat die Matrix A dann die Größe $m \times 7$, es ist $b_i = r_i^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2, c_k = 0 (k = 1, \dots, 6), c_7 = -1, \mathbf{x} = (x^+, x^-, y^+, y^-, z^+, z^-, r), a_{i5} = z^{(t)} - 2z_i, a_{i6} = -a_{i5}, a_{i7} = -(r^{(t)} - 2r_i)$.

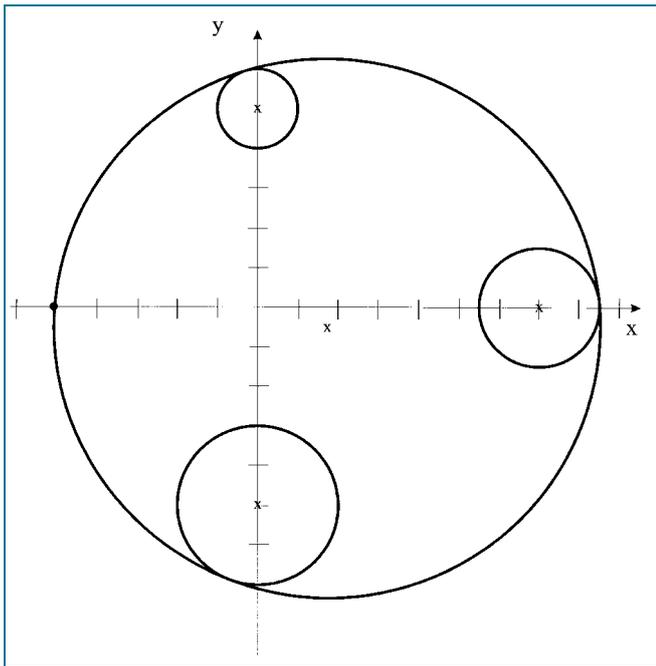


Abb. 1:

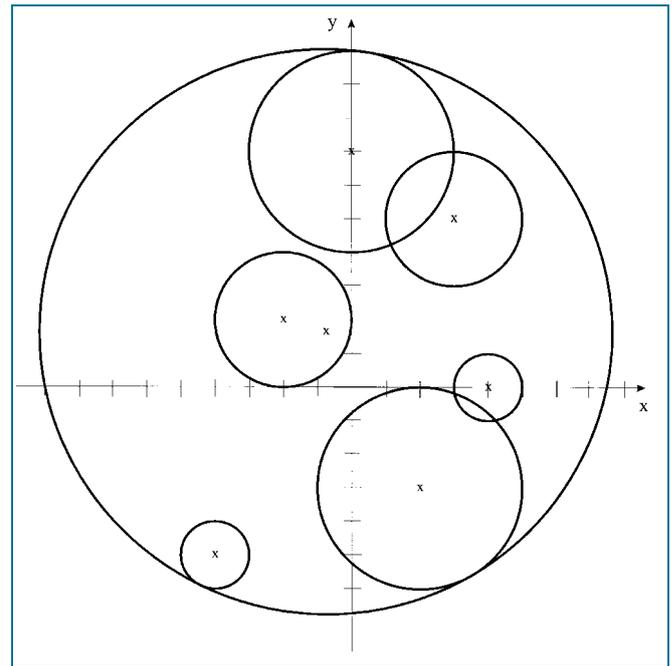


Abb. 2:

3 Beispiele

Die folgenden Ergebnisse wurden stets für alle benutzten Startwertvektoren gleichermaßen erzielt. Diese waren $(x^{(0)}, y^{(0)}, r^{(0)} = 0)$, wobei $x^{(0)}$ und $y^{(0)}$ als gewichtete Schwerpunkte

$$x^{(0)} = h \frac{\sum_{i=1}^m v_i x_i}{\sum_{i=1}^m v_i}, \quad y^{(0)} = h \frac{\sum_{i=1}^m w_i y_i}{\sum_{i=1}^m w_i}$$

mit 20 zufällig erzeugte Gewichtsserien (v_1, \dots, v_m) und (w_1, \dots, w_m) ($v_i, w_i \in [0, 1]$) definiert wurden und alternativ $h = 1$ und $h = 10$ gesetzt wurde.

Beispiel 1: Die Daten aus [1] waren

x_i	0	7	-5	0
y_i	5	0	0	-5
r_i	1	1.5	0	2

Für alle 40 Startwerte wurden nach jeweils ca. 7 Iterationen in Übereinstimmung mit [1] $x = 1.73214$, $y = -.52944$, $r = 6.7944$ erreicht. Die Ausgangskreise und der optimale Hüllkreis finden sich in Abb. 1.

Beispiel 2: Die Daten waren

x_i	4	-2	-4	2	3	0
y_i	0	2	-5	-3	5	7
r_i	1	2	1	3	2	3

Wieder nach jeweils 7 Iterationen unabhängig von den Startwerten erhielten wir $x = -.74935$, $y = 1.65013$, $r = 8.4021$. Die Daten und der sich ergebende Hüllkreis finden sich in Abb. 2.

Beispiel 3:

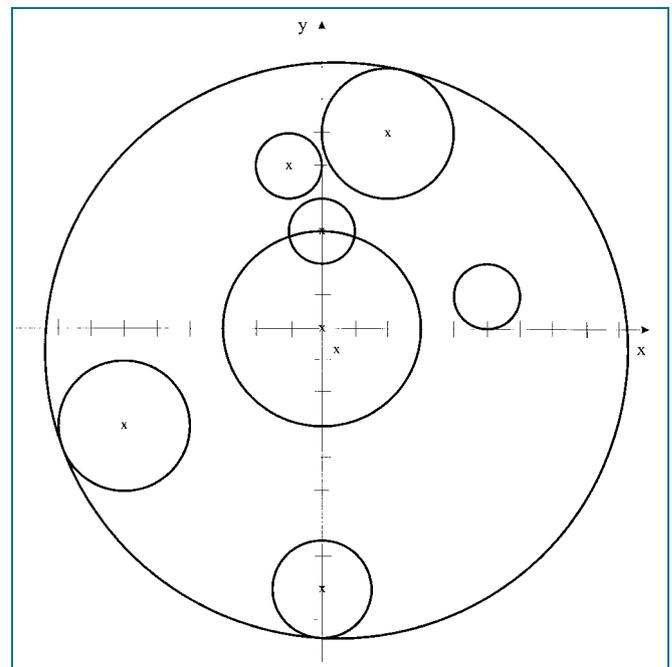


Abb. 3:

x_i	0	5	0	2	-1	-6	0
y_i	0	1	3	6	5	-3	-8
r_i	3	1	1	2	1	2	1.5

Nach jeweils ca. 6 Iterationen ergab sich $x = .43685$, $y = -.66609$, $r = 8.84691$, siehe Abb. 3.

Beispiel 4:

x_i	0	5	0	-2	-1	-6	0	2	-2	-2
y_i	1	1	-3	6	-5	3	7	-7	-7	7
r_i	3	4	1	3	2	2	4	4	3	3

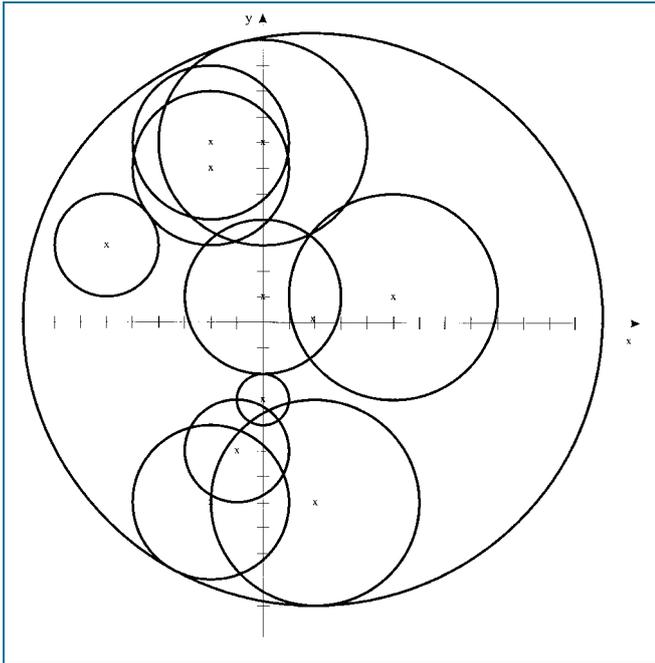


Abb. 4:

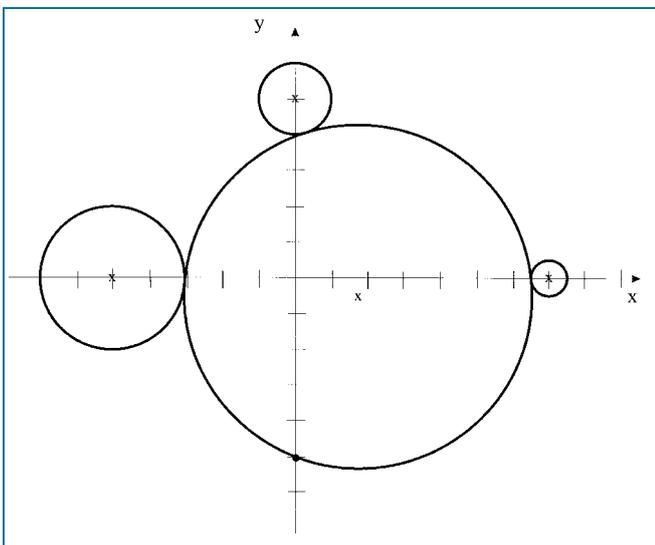


Abb. 5:

Ergebnis nach stets ca. 5 Iterationen: $x = 1.90756$, $y = .12965$, $r = 11.1303$, siehe Abb. 4.

Das waren zufriedenstellende Beispiele: Allerdings wurden im Gegensatz zur Hüllkreisbestimmung von Punkten, wo im Regelfall eine, manchmal auch zwei oder drei Iterationen benötigt wurden, was in [4] erklärt wird, hier stets mehr, nämlich im Mittel etwa sieben Iterationen benötigt. Eine Erklärung steht aus.

Jetzt führen wir einige Beispiele an, wo das Verfahren nicht zufriedenstellend funktioniert. Auch hierzu gibt es bisher keine Erklärung.

Beispiele 5, 6, 7: Für

x_i	3	0	x_i	3	-1	x_i	4	0	-2
y_i	0	0	y_i	0	0	y_i	0	3	0
r_i	1	3	r_i	1	3	r_i	1	2	3

wurden mit $(x, y, r) = (2, 0, 5)$ bzw. $(x, y, r) = (2, 0, 6)$ bzw. $x = .98209$, $y = .32736$, $r = 6.0000$ keine optimalen Lösungen gefunden.

Beispiel 8

x_i	4	0	-2	0
y_i	0	3	0	-6
r_i	1	2	3	1

Ähnlich wie in [3], Beispiel 4, springt das Verfahren nach einer Weile abwechselnd zwischen einem lokalen Optimum $(x, y, r) = (1.52299, -1.08717, 6.68693)$ und dem globalen Optimum $(x, y, r) = (-1.7515, -1.16556, 6.2328)$ hin und her.

Beispiel 9:

x_i	4	-2	-4	2	3
y_i	0	2	-5	-3	5
r_i	1	2	1	3	2

Hier ist ein ähnliches Verhalten wie bei Beispiel 8 zu beobachten.

Obwohl in allen Fällen die Ergebnisse unabhängig von den benutzten Startwerten erzielt wurden, sieht das Verfahren insgesamt nicht ganz so erfolgreich wie beim Hüllkreis von Punkten [3] aus. Trotzdem ist der Einsatz bei visueller Kontrolle der Ergebnisse erwägenswert, da bei vorhandener LP-Software die Implementation sehr schnell und einfach ist.

4 Zusammenhang mit akzeptabler Übereinstimmung von Lochbildern bei Translation

Gegeben seien zwei Mengen von Originalpunkten (a_i, b_i) und Kopien (c_i, d_i) , $i = 1, \dots, m$, die als Lochmuster interpretiert werden. Diese sollen daraufhin überprüft werden, ob sie durch eine Verschiebung mit einem unbekanntem Vektor (x, y) bis auf akzeptable Toleranzen $\Delta_i \geq 0$ näherungsweise in Übereinstimmung gebracht werden können. Diese Aufgabe wird durch das nichtlineare Programm [1]

$$\tilde{r} \rightarrow \min \tag{9}$$

$$\sqrt{(a_i - c_i - x)^2 + (b_i - d_i - y)^2} \leq \tilde{r} + \Delta_i (i = 1, \dots, m) \tag{10}$$

$$\tilde{r} \geq 0 \tag{11}$$

modelliert. Ergibt sich, das \tilde{r} kleiner als ein vorgegebener Toleranzwert ist, so wird die Kopie akzeptiert, andernfalls nicht.

Setzt man [1]

$$x_i = a_i - c_i, y_i = b_i - d_i, \tag{12}$$

$$\Delta = \max_i \Delta_i, r_i = \Delta - \Delta_i, \tag{13}$$

so wird aus den rechten Seiten in (10) $\tilde{r} + \Delta - r_i$. Definiert man $r = \tilde{r} + \Delta$, so erhält man das Hüllkreisproblem (1), (2), (3). Setzt man dort umgekehrt $r = \tilde{r}$, $r - r_i = \tilde{r} + \Delta_i$ und benutzt (12), so erhält man

(9), (10), (11) zurück. Somit kann versucht werden, das Lochmusteridentifikationsproblem wie zuvor das Hüllkreisproblem numerisch lösen.

Beispiel 10: Die Daten (x_i, y_i) seien wie in Beispiel 1. Aus den Werten für die r_i ergibt sich $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = .5$, $\Delta_3 = 2$, $\Delta_4 = 0$. Die Ergebnisse sind wie in [1] $x = 1.73214$, $y = -.52944$ und $r = 4.7944$ und sind in Abb. 5 zusammen mit den Ausgangsdaten visualisiert.

Literatur

BIHLMAYER, W.; FORST, W.: Approximation by Circles, ZOR 33, 315–339 (1989)

BIHLMAYER, W.; FORST, W.; WECKENMANN, A.: Numerische Verfahren zur Prüfung von Werkstücken unter Berücksichtigung der Maximum-Material-Bedingung im ebenen Fall, Technisches Messen 56, 23–31 (1989)

SPÄTH, H.: Bestimmung von Hüllkreis und -kugel mittels sequentieller linearer Optimierung, AVN 7/1999, 239–242

SPÄTH, H.; WATSON, G. A.: Smallest circumscribed, largest inscribed, and minimum zone circle or sphere via sequential linear programming, Math. Comm. 6, 29–38 (2001)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Helmuth Späth

Fakultät V, Institut für Mathematik

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg

Postfach 2503

D-26111 Oldenburg

Germany

e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Das von der Bestimmung des Hüllkreises für gegebene Punkte her untersuchte Verfahren der sequentiellen linearen Optimierung [3, 4] wird auf den Fall, dass die Punkte (mit Radius Null) Kreise mit nichtnegativen Radien sein können, übertragen. Es stellt sich heraus, dass dies im Regelfall, wenn auch mit mehr Iterationen, zwar funktioniert, es aber auch unangenehme Ausnahmefälle geben kann, wie numerische Beispiele belegen. Der Zusammenhang mit verschobenen Lochmustern (Koordinatenmesstechnik) wird dargestellt.