Zur numerischen Berechnung der ebenen Helmert-Transformation bei unterschiedlichen Maßstabsfaktoren

Helmut Späth, Oldenburg

Es wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung der HELMERT-Transformation in der Ebene im Falle zweier unterschiedlicher Maßstabsfaktoren vorgestellt. Numerischen Beispiele werden angegeben.

1 Problemstellung

In der Ebene seien Start- und Zielkoordinaten $(a_i,\ b_i)$ bzw. $(c_i,\ d_i)$, $i = 1, \ldots,\ m \geq 4$ gegeben. Gesucht sind ein Translationsvektor $(x,\ y)$, ein Winkel t mit $0 \leq t < \pi$ und (zunächst nur) ein Maßstabsfaktor u derart, dass

$$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$i = 1, \ldots,\ m.$$

Eine mögliche Zielfunktion zur Erreichung von (1) ist die Minimierung der Abweichungsquadratsumme

$$S(x,\ y,\ u,\ t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g_i [(c_i - ua_i \cos t + ub_i \sin t - x)^2 + (d_i - ua_i \sin t - ub_i \cos t - y)^2], \qquad (2)$$

wobei $g_i > 0$ gegebene Gewichte sind, z.B. $g_i = 1$. So wird die sogenannte HELMERT-Transformation im Sinne der kleinsten Quadrate bestimmt; es gibt auch andere Möglichkeiten [2].

Wollen wir für die beiden Komponenten der Zielkoordinaten unterschiedliche Maßstabsfaktoren v und w zulassen, so ist statt (1)

$$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$i = 1, \ldots,\ m$$

zu erreichen, d.h.

$$T(x,\ y,\ v,\ w,\ t) = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} g_i\ [(c_i - va_i \cos t + vb_i \sin t - x)^2 + (d_i - wa_i \sin t - wb_i \cos t - y)^2] \qquad (4)$$

zu minimieren.

Bemerkung 1: Da bei (2) mit $(x,\ y,\ u,\ t)$ auch $(x,\ y,\ -u,\ t + \pi)$ und bei (4) mit $(x,\ y,\ v,\ w,\ t)$ auch $(x,\ y,\ -v,\ -w,\ t + \pi)$ Lösung ist, kann man sich bei der Suche nach t auf das Intervall $[0,\ \pi]$ beschränken.

Bemerkung 2: In (3) kann man natürlich auch den Ansatz

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \qquad (5)$$

wählen, der zu anderen Werten für v und w führt.

2 Zwei numerische Verfahren bei gleichem Maßstabsfaktor

Zwar könnte die Minimierung von (2) mittels der Substitution $g = u \cos t$, $h = u \sin t$ auf ein lineares Ausgleichsproblem zurückgeführt werden [4, S. 317], aber wir entwickeln hier zwei iterative Verfahren und übertragen dann im nächsten Abschnitt eines davon auf (4). Die ersten drei der vier notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial u} = \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

ergeben das für $(x,\ y,\ u)$ lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Ax + Bu &= E \\ Ay + Cu &= F \\ Bx + Cy + Du &= G, \end{aligned} \qquad (7)$$

dessen (teilweise von t nichtlinear abhängigen) Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{m} g_i \\ B &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \cos t - b_i \sin t) \\ C &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \sin t + b_i \cos t) \\ D &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i^2 + b_i^2) \\ E &= \sum_{i=1}^{m} g_i c_i \\ F &= \sum_{i=1}^{m} g_i d_i \\ G &= B + C \end{aligned} \qquad (8)$$

gegeben sind.

Die vierte Bedingung in (6) ergibt für $u \neq 0$

$$\sin t \sum_{i=1}^{m} g_i[a_i(c_i - x) + b_i(d_i - y)] = \cos t \sum_{i=1}^{m} g_i[a_i(d_i - y) - b_i(c_i - x)]. \quad (9)$$

Diese Gleichung kann nach Division mit $\cos t \neq 0$ in eine explizite Form für tg$t$ gebracht werden, woraus sich t durch Anwendung von arctg ergibt. Mit t ist allerdings auch $t + \pi$ Lösung, aber nach Bemerkung 1 kann man sich auf $t \in [0, \pi)$ beschränken.

Die Gleichungen (7) und (9) legen folgendes Iterationsverfahren nahe. Man wählt (z.B. zufällig) einen Startwert $t = t^{(0)} \in [0, \pi)$, berechnet, soweit sie von t abhängen, die Koeffizienten (8) neu. (A, C, E, F können vorneweg ein für allemal ausgerechnet werden). Dann löst man (7) gemäß

$$x = (E - Bu)/A, \; y = (F - Cu)/A, \; u = \frac{AG - EB - FC}{AD - B^2 - C^2} \quad (10)$$

explizit. Mit den so erhaltenen Werten für x und y rechnet man $t = t^{(1)}$ mittels (9) aus, setzt diesen wieder in (8) ein, berechnet (10) neu usw. Dieses Verfahren ist eine sogenannte Block Descent Methode [1, 5], die auch bei anderen Problemen, z.B. für $u \equiv 1$ in [6] mit großem Erfolg eingesetzt wurde.

Eine weitere Methode besteht darin, mittels (10) die Funktionen

$$x = x(t), \; y = y(t), \; u = u(t) \quad (11)$$

explizit auszurechnen und in (2) einzusetzen. Dann hat man mit

$$S(t) = S(x(t), \; y(t), \; u(t), \; t) \quad (12)$$

nur eine Funktion einer Variablen t im Intervall $[0, \pi)$ zu minimieren, was z.B. sehr einfach mit der sehr guten Subroutine FMIN [3] erfolgen kann; die zugehörigen Werte für die anderen Unbekannten ergeben sich über (11) bzw. (10).

Beispiel: Es wurden die $m = 5$ Start- und Zielkoordinaten aus [2] benutzt, nämlich

1	a_i	b_i	c_i	d_i
1	1.0	0.0	.993808	.004709
2	1.0	1.0	1.007303	1.493057
3	0.0	1.0	−.015174	.981590
4	0.0	0.0	−.009153	−.021163
5	0.5	0.5	.381458	.498160

Sowohl für die erste Methode (startwertunabhängig) als auch für zweite Methode (Suchintervall $[0, \pi)$) wurden die Ergebnisse [2]

$$x = -.02669, \; y = -.03953, \; u = 1.13688, \; t = .11678$$

reproduziert.

3 Ein numerisches Verfahren bei ungleichen Maßstabsfaktoren

Die ersten vier der fünf notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial w} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (13)$$

liefern zwei entkoppelte lineare Gleichungssysteme mit den Unbekannten (x, v) bzw. (y, w), nämlich

$$\begin{aligned} Ax + Bv &= C & \qquad Ay + Fw &= G \\ & \text{und} & & \\ Bx + Dv &= E & \qquad Fy + Hw &= K, \end{aligned} \quad (14)$$

deren Koeffizienten durch

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{m} g_i \\
B &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \cos t - b_i \sin t) \\
C &= \sum_{i=1}^{m} g_i c_i \\
D &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \cos t - b_i \sin t)^2 \\
E &= \sum_{i=1}^{m} g_i c_i(a_i \cos t - b_i \sin t) \\
F &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \sin t + b_i \cos t) \\
G &= \sum_{i=1}^{m} g_i d_i \\
H &= \sum_{i=1}^{m} g_i(a_i \sin t + b_i \cos t) \\
K &= \sum_{i=1}^{m} g_i d_i(a_i \sin t + b_i \cos t)
\end{aligned} \quad (15)$$

gegeben sind. Aus (15) erhält man eindeutig und elementar

$$\begin{aligned}
x &= (DC - BE)/(AD - B^2), \\
y &= (HG - FK)/(AH - F^2), \\
v &= (AE - BC)/(AD - B^2), \\
w &= (AK - FG)/(AH - F^2).
\end{aligned} \quad (16)$$

Die fünfte Bedingung aus (13) ergibt die in t nichtlineare Gleichung

$$\sum_{i=1}^{m} g_i[v(c_i - x)(a_i \sin t + b_i \cos t) + w(d_i - y) \times (-a_i \cos t + b_i \sin t) + (v^2 - w^2)(a_i \sin t + b_i \cos t)(-a_i \cos t + b_i \sin t)] = 0, \quad (17)$$

die erwartungsgemäß für $v = w = u$ in (9) übergeht, aber nicht mehr explizit gelöst werden kann. Führt man $z = \text{tg}t$ als Unbekannte ein, setzt man also $t = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ und $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ in (17) ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen eine polynomiale Gleichung vierten Grades in z mit Koeffizienten, die komplizierte Funktionen von x, y, v und w sind. Es kann vier komplexe, zwei komple-

xe und zwei reelle oder vier reelle Lösungen geben; nur reelle Lösungen $t = \text{arctg}z \in [0,\ \pi]$ interessieren.
In dieser Situation erscheint das erste Verfahren für S zwar auf T prinzipiell übertragbar, aber im Ergebnis zu kompliziert. Wesentlich einfacher ist es, das zweite Verfahren zu übertragen, also

$$x = x(t),\ y = y(t),\ \upsilon = \upsilon(t),\ w = w(t)$$

gemäß (16) auszurechnen und in (4) einzusetzen, was mit

$$T(t) = T(x(t),\ y(t),\ \upsilon(t),\ w(t),\ t)$$

wieder eine zu minimierende Funktion nur einer Variablen ergibt, die ähnlich wie vorher im Intervall $[0,\ \pi)$ auf Minima untersucht werden kann.
Beispiel: Die $m = 8$ Start- und Zieldatensätze wurden auf folgende Weise erzeugt. Die Punkte $a_i,\ b_i$ wurden gemäß

a_i	1	0	3	– 4	1	5	6	– 6
b_i	1	2	– 2	2	– 2	2	– 3	6

vorgegeben. Mit $(x,\ y) = (1,\ 2)$, $\upsilon = .5$, $w = 2$, $t = .6$ wurden zunächst die (exakten) Zieldaten

$$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \upsilon & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & sint \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

$$i = 1, ..., 8$$

erzeugt. Ausgehend von den so definierten Punkten $(a_i,\ b_i)$ und $(c_i,\ d_i)$ liefert das Verfahren natürlich $T = 0$ und findet die vorgegebenen Werte $x,\ y,\ \upsilon,\ w,\ t$ wieder.
Anschließend wurden in der Festpunktdarstellung der Punkte $(c_i,\ d_i)$ alle hinteren Dezimalen bis auf die erste nach dem Punkt (ohne Rundung) gestrichen. Da ergaben sich plausiblerweise $T = .01468$ und nur leicht veränderte Werte

$$x = .97908,\ y = 1.97166,\ \upsilon = .49257,$$
$$w = 1.99336,\ t = .60074.$$

Löscht man nun auch noch die erste Dezimale nach dem Punkt bei $(c_i,\ d_i)$ aus, was

c_i	1	0	2	– 1	1	2	4	– 3
d_i	4	5	2	0	0	10	3	5

ergibt, so erhalten wir $T = .7689$ und

$$x = .66030,\ y = 1.67286,\ \upsilon = .43870,$$
$$w = 1.87568,\ t = .59141.$$

Schließlich wurden die zuletzt angegebenen Werte für $(c_i,\ d_i)$ um ± 1 auf

c_i	2	1	1	0	2	1	3	– 2
d_i	3	4	3	1	– 1	9	4	6

abgeändert. Hier ergab sich $T = 4.937$ und

$$x = .93697,\ y = 1.8913,\ \upsilon = .27998,$$
$$w = 1.66607,\ t = 57153.$$

Diese Ergebnisse zeigen, dass wir ein brauchbares und einfach zu implementierendes Verfahren zur Bestimmung der ebenen HELMERT-Transformation mit unterschiedlichen Maßstabsfaktoren entwickelt haben. Die Übertragung auf drei Dimensionen erscheint möglich, wenn man die Ergebnisse aus [6] benutzt.

Literatur

[1] BERTSEKAS, D. P.: Nonlinear Programming. Athena Scientific 1995

[2] CASPARY, W.; BEINEKE, D.: Robuste HELMERT-Transformation, AVN 7/2003, 242 – 247

[3] FORSYTHE, G. E.; MALCOLM, M. A.; MOLER, C. B.: Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice Hall 1977

[4] NIEMEIER, W.: Ausgleichsrechnung, Walter de Gruyter 2002

[5] POWELL, M. J. D.: On Search Directions for Minimization Algorithms, Math. Progr. 4 (1973), 193 – 201

[6] SPÄTH, H.: Identifying spatial point sets, Math. Comm. 8 (2003), 69 – 75

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Helmuth Späth, Fakultät V, Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany
e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Es wird ein numerisches Verfahren zur Berechnung der HELMERT-Transformation in der Ebene im Falle zweier unterschiedlicher Maßstabsfaktoren vorgestellt. Numerische Beispiele werden angegeben.