

Zur Bestimmung von Lotfußpunkten auf in der Koordinatenmesstechnik vorkommenden Flächen

Helmuth Späth, Oldenburg

Zusammenfassung

In der Koordinatenmesstechnik werden Oberflächen von Körpern auf ihre Güte hin vermessen. Dabei müssen von den Messpunkten aus kürzeste Lote auf Flächen wie z. B. Kugel, Ellipsoid, Rotationsparaboloid, Kegel und Zylinder gefällt und die entsprechenden Lotfußpunkte bestimmt werden.

1 Allgemeine Problemstellung

Gegeben sei eine Fläche im Raum. Diese kann z. B. *explizit* durch

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

gegeben sein. In diesem Fall ist ein bester Lotfußpunkt von einem gegebenem Punkt

$$(f, g, h) \quad (2)$$

aus dadurch charakterisiert, dass der (o. B. d. A. quadrierte) Abstand

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2 \quad (3)$$

global minimal wird unter der Nebenbedingung, dass (x, y, z) auf der Fläche liegt, d. h. dass (1) gilt. Bildet man die LAGRANGE-Funktion

$$L(x, y, z, \lambda) = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2 - \lambda F(x, y, z), \quad (4)$$

so sind die Bedingungen

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad (5)$$

notwendig für ein Minimum. Ausgeschrieben lautet (5)

$$2(x-f) - \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 0, \quad (6)$$

$$2(y-g) - \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

$$2(z-h) - \lambda \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad (8)$$

und hinzu kommt (1). Ohne konkrete Vorgabe von F kann man jetzt nicht weiterrechnen. Prinzipiell wird man λ aus einer, z. B. der ersten, der drei Gleichungen (6) bis (8) eliminieren und in die beiden anderen einsetzen. Zu-

sammen mit (1) hat man dann i. a. drei nichtlineare Gleichungen in x, y und z , die eine oder mehrere Lösungen (x, y, z) liefern können, von denen man die beste im Sinne von einem minimalen Wert für (3) aussuchen muss. Für das Ellipsoid

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$$

und für $(f, g, h) = (1, 2, 3)$ z. B. wurden mit dem NEWTON-Verfahren angewandt auf 30 verschiedene Startvektoren, deren Komponenten im Intervall $[-3, 3]$ gleichmäßig verteilt erzeugt wurden, sechs verschiedene Lotfußpunkte gefunden, davon neunmal der mit dem kürzesten Abstand, nämlich $(1.1239, .5629, .3736)$.

Ist zweitens eine Fläche wie z. B. das Rotationsparaboloid (18) *explizit* gegeben durch

$$z = G(x, y),$$

dann ist

$$(x-f)^2 + (y-g)^2 + (G(x, y) - h)^2$$

zu minimieren, was auf ein nichtlineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den zwei Unbekannten x und y führt.

Eine dritte Möglichkeit ist, dass die Fläche in *Parameterdarstellung* gegeben ist, d. h. es gilt

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v). \quad (9)$$

Dann sind u und v so zu finden, dass

$$S(u, v) = (x(u, v) - f)^2 + (y(u, v) - g)^2 + (z(u, v) - h)^2 \quad (10)$$

global minimal wird. Hier hat man keine Nebenbedingung und nur zwei statt drei Unbekannte. Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum lauten

$$\frac{\partial S}{\partial u} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial S}{\partial v} = 0, \quad (12)$$

was i. a. zwei nichtlineare Gleichungen ergibt, deren Lösungen wieder nur im konkreten Fall berechnet werden können.

Bei den in der Koordinatenmesstechnik üblichen Flächen wie Kugel, Ellipsoid, Rotationsparaboloid, Kegel und Zylinder lassen sich, wie wir exemplarisch sehen werden, die Gleichungen (1), (6), (7) und (8) bzw. (11) und (12) auf eine Polynomgleichung maximal sechsten

Grades in einer Variablen zurückführen, die numerisch z. B. mittels RPOLY [2] einfach gelöst werden kann. Es gibt dann maximal sechs Lotfußpunkte, von denen derjenige mit dem kleinsten Abstand (3) bzw. (10) herausgesucht werden muss, um das globale Minimum zu erhalten.

2 Lotfußpunkte bei Quadriken

Flächen zweiter Ordnung im Raum werden in impliziter Form allgemein durch

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0 \quad (13)$$

beschrieben. Die Formeln (6) bis (8) ergeben

$$(y-g)(2Ax + Dy + Ez + G) - (x-f)(2By + Dx + Fz + H) = 0 \quad (14)$$

$$(z-h)(2Ax + Dy + Ez + G) - (x-f)(2Cz + Ex + Fy + I) = 0. \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) und (15) zusammen mit (13) liefern ein nichtlineares Gleichungssystem für x , y und z , das i. a. nicht algebraisch gelöst werden kann. Natürlich kann man numerisch das NEWTON-Verfahren wie in [1] anwenden, das allerdings in Abhängigkeit vom Startwert divergieren oder verschiedene Lotfußpunkte liefern kann.

Für Spezialfälle von (13), die in der Koordinatenmesstechnik relevant sind, nämlich

$$\text{die Kugel: } x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (16)$$

$$\text{das Ellipsoid: } \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{p^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \quad (17)$$

$$\text{das Rotationsparaboloid: } z = d(x^2 + y^2), |d| > 0, \quad (18)$$

$$\text{der Kegel: } x^2 + y^2 = \frac{z^2}{r^2}, \quad (19)$$

$$\text{der Zylinder: } x^2 + y^2 = r^2, z \text{ beliebig} \quad (20)$$

kommt man allerdings weiter. Dabei setzen wir o. B. d. A. voraus, dass diese speziellen Quadriken mittels Translation und Drehungen auf Hauptachsengestalt gebracht worden sind und der gegebene Vektor (2) durch die negative Translation und inverse Drehungen transformiert worden ist.

Wenn wir z. B. das Rotationsparaboloid (18) betrachten, so erhält man aus (6) bis (8)

$$\lambda = 2(z-h), \quad (21)$$

$$x = \frac{f}{1+2d(z-h)}, \quad (22)$$

$$y = \frac{g}{1+2d(z-h)}. \quad (23)$$

Setzt man (22) und (23) in (18) ein, so erhalten wir mit

$$4d^2z^3 + 4d(1-2dh)z^2 + (1-2dh)^2z - d(f^2 + g^2) = 0 \quad (24)$$

eine Polynomgleichung dritten Grades, die mit Hilfe einer Formelsammlung für spezielle Werte von (2) und d einfach gelöst werden kann. Es gibt wenigstens eine,

aber möglicherweise drei reelle Nullstellen von (24), zu denen die entsprechenden Werte von x und y nach (22) und (23) ausgerechnet werden. Gibt es nur eine reelle Nullstelle, so haben wir das globale Minimum; andernfalls muss das globale Minimum unter den drei Tripeln (x, y, z) herausgesucht werden.

Beim Ellipsoid ergibt sich auf analoge Weise eine Polynomgleichung vom Grad sechs, nämlich

$$\frac{x^2}{p^2} + \left[\frac{q^2 gx}{(q^2 - p^2)x + fp^2} \right]^2 + \left[\frac{r^2 hx}{(r^2 - p^2)x + fp^2} \right]^2 - 1 = 0, \quad (25)$$

deren numerische Lösung mit RPOLY [2] ebenfalls keinerlei Schwierigkeiten macht.

Nun betrachten wir die (16) bis (20) entsprechenden parametrischen Darstellungen dieser speziellen Flächen. Diese sind bei

$$\text{der Kugel: } x = r \cos u \cos v, y = r \cos u \sin v, z = r \sin u, \quad (26)$$

$$\text{dem Ellipsoid: } x = p \cos u \cos v, y = q \cos u \sin v, z = r \sin u, \quad (27)$$

$$\text{dem Rotationsparaboloid: } x = v \cos u, y = v \sin u, z = dv^2, \quad (28)$$

$$\text{dem Kegel: } x = v \cos u, y = v \sin u, z = rv, \quad (29)$$

$$\text{dem Zylinder: } x = r \cos u, y = r \sin u, z = v. \quad (30)$$

Dabei variieren u und v in sinnvollen Intervallen.

Greifen wir wieder das Rotationsparaboloid heraus, so ergeben die Bedingungen (11) und (12) der Reihe nach

$$f \sin u - g \cos u = 0,$$

also

$$u = \text{atan} \left(\frac{g}{f} \right) \quad (31)$$

und $u := u + \pi$, falls $f \cos u + g \sin v < 0$ und dann (mit diesem u)

$$2d^2 v^3 + (1 - 2hd)v - (f \cos u + g \sin u) = 0, \quad (32)$$

also wieder eine Polynomgleichung dritten Grades.

Für die Kugel (2 Lote) sind die entsprechenden Formeln in [3], für das Ellipsoid (maximal 6 Lote) in [4], für den Kegel (2 Lote) in [5] und für den Zylinder (2 Lote) in [6] zu finden. Weitere Flächen, die allerdings in der Koordinatenmesstechnik nicht relevant sein dürften, sind in [7] diskutiert.

3 Lotfußpunkte beim Torus

Der Torus (Ringfläche) soll hier als Beispiel für eine Fläche gewählt werden, die keine implizite Darstellung (1) besitzt. In Parameterform lautet diese

$$\begin{aligned} x &= (p + q \sin v) \cos u, \\ y &= (p + q \sin v) \sin u, \\ z &= \cos v. \end{aligned} \quad (33)$$

Die Bedingungen (11) und (12) liefern nach

$$f \sin u - g \cos u = 0$$

den Wert

$$u = \operatorname{atan}\left(\frac{g}{f}\right) \quad (34)$$

und dann

$$\operatorname{tg} v = \frac{f \cos u + g \sin u - p}{h} \quad (35)$$

Somit kommen hier die vier Punkte (u, v) , $(v + \pi, v)$, $(u, v + \pi)$ und $(u + \pi, v + \pi)$ als optimale Lotfußpunkte in Betracht.

Literatur

[1] AHN, S. J., RAUH, W., WARNECKE, H.-J.: Least-squares orthogonal distanes fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola, Pattern Recognition 34, 2283–2303 (2001).

[2] RPOLY: FORTRAN-Subroutine zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen: Collected Algorithms of the ACM, Nr. 493.
 [3] SPÄTH, H.: Least squares fitting with spheres, J. of Optimization Theory and Applications 96, 191–199 (1998).
 [4] SPÄTH, H.: Orthogonal least squares fitting by conic sections. In: Sabine van Huffel (ed.): Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors – in – Variables Modelling, SIAM (1997), 259–264.
 [5] SPÄTH, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung des Least-Squares-Halbkegels, VGI 87, 202–205 (1999).
 [6] SPÄTH, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung des Least-Squares-Zylinders, AVN 107, 65–67 (2000).
 [7] STRAHMANN, W.: Orthogonale Anpassung mit speziellen Flächen in Parameterdarstellung, Diplomarbeit, Fachbereich Mathematik, Universität Oldenburg 1996.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. HELMUTH SPÄTH, Fachbereich Mathematik, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany
 E-Mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Kartografische Darstellung der Änderung der Uferlinien des Aralsees anhand kosmischer Aufnahmen

Eine ökologische Katastrophe im Gebiet des Aralsees in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts lenkte die Aufmerksamkeit auf dieses Gebiet und erforderte regelmäßige Untersuchungen sowie Kontrollen des Zustandes dieses Sees.

Im Ergebnis von großmaßstäbigen Aufnahmen in den 50er und 60er Jahren wurde eine Vergrößerung der Fläche der bewässerten Ländereien in Mittelasien und Kasachstan festgestellt. Da sich der Zufluss aus Amudarja und Syrdarja in den See stark verringerte und in den 80er Jahren sogar ganz aufhörte, sank der Wasserspiegel, und die Wasserfläche verringerte sich erheblich. 1987 hörte der See als Einheit zu bestehen auf und zerfiel in den Großen und den Kleinen See.

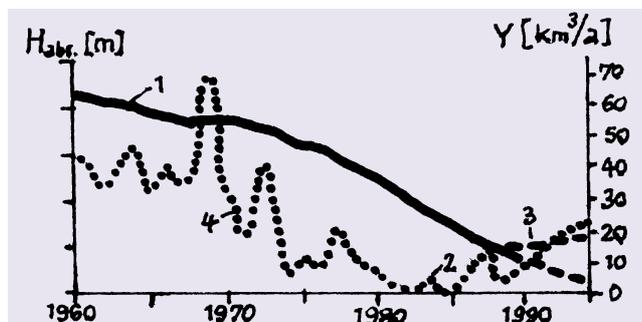
1961 betrug die Gesamtfläche des Aralsees ohne Inseln 66 090 km², seine maximale Tiefe 69 m, die mittlere Tiefe 16,1 m und das Volumen des Wassers 1066 km³. Je Jahr verdunstete etwa eine Meterschicht

Wasser, d. h. 65 bis 66 km³, die durch den Zufluss aus Amudarja und Syrdarja (56 bis 60 km³/a) und atmosphärische Niederschläge (etwa 6 bis 9 km³/a) in etwa kompensiert wurde. Nach 1961 verringerte sich der Zufluss, und der Verlust durch Verdunstung überstieg ihn. Das führte zur Verringerung der Wassermenge insgesamt und zur Absenkung des Wasserspiegels. Von 1961 bis 1990 verringerte sich dieser um 14,8 m, sein Wasservolumen um ein Drittel und seine Fläche um die Hälfte. Damit veränderte sich die

Uferlinie, es entstanden Halbinseln und Inseln. Zur Untersuchung der Dynamik der Uferlinie sowie zur Bestimmung der Änderungen der Fläche des Aralsees dienten kosmische Aufnahmen – hauptsächlich vom Satelliten Resurs-0 mit einer Auflösung von 170 m – in Verbindung mit anderen. Der Basismaßstab der Bilder – alle in digitaler Form im 24-Bit-Format – betrug 1:2,5 Mio. bis 1:1,5 Mio. Als kartografische Grundlage wurde die Übersichtskarte der UdSSR 1:1 Mio. von 1962 verwendet. Ein Vergleich

mit Blättern der Karte 1:2,5 Mio. aus dem Weltatlas von 1967 (Situation von 1961) zeigte identische Uferlinien. Änderungen ergaben sich aus den kosmischen Aufnahmen von 1977, 1984 und 1989. Der Methodik der Computerbearbeitung mit der GIS-Technologie lagen das Programmpaket Idrisi™ und die Computergrafik Corel Draw™ zugrunde. Aus der Analyse der Ergebnisse folgt, dass der Wasserspiegel des aus dem Aralsee entstandenen Großen Sees weiter sinken und in zwei Teile aufgespalten wird. Dabei wird sich der Mineraliengehalt stark (der Salzgehalt um 40 bis 45 %) erhöhen. Der östliche Teil des Großen Sees trocknet aus, der westliche geht in ein stark salzhaltiges Gewässer über.

Aus: *Kartografirovanie izmenenij beregovoij linii Aral'skogo morja po kosmic'skom snimkam.* Von Kravcova, V.I., Lur'e, I.K., und Markov, D.V. – *Geodez. i Kartogr., Moskva* (2001) 4, S. 32–39



Niveauänderungen des Aralsees und seiner Teile sowie Änderungen der Abflussmengen

- 1 Wasserspiegel des Aralsees
- 2 Wasserspiegel des Großen Sees
- 3 Wasserspiegel des Kleinen Sees
- 4 Abflussmengen

DEUMLICH