

# Über die Genauigkeiten von Schätzern für den Skalenparameter der Verteilungsfunktion

## About the Accuracy of Estimators for the Scale Factor of the Density Function

Wolf-Dieter Schuh, Johannes Korte

(Prof. Dr. Bertold Witte zum 80. Geburtstag)

Seit den Anfängen der statistischen Analyse von Beobachtungsreihen beschäftigt sich die Forschung sehr eingehend mit der Schätzung des Skalenparameters der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion. Aufbauend auf grundlegenden Arbeiten von Gauß /Gauß 1816/ und Encke /Encke 1832/ setzte sich auch Helmert sehr intensiv mit dieser Frage auseinander. Er untersuchte speziell, mit welcher Genauigkeit man die Momente und damit den Skalenparameter der Verteilungsfunktion schätzen kann. Bei der durchschnittlichen Abweichung wird das erste absolute Moment zur Schätzung herangezogen. Die mittlere Abweichung (Standardabweichung) stützt sich hingegen auf das zweite Moment der Verteilungsfunktion. Die wahrscheinliche Abweichung ist über das Konfidenzintervall mit der Wahrscheinlichkeit 50 % definiert. Es gilt nun die Frage zu beantworten, welcher dieser Schätzer ist besser geeignet oder auch genauer, um den Skalenparameter der Verteilung zu bestimmen. In diesem Beitrag wollen wir Helmersts Antwort auf diese Frage nachvollziehen, aber auch Anwendungen aufzeigen, die speziell im Zusammenhang mit der robusten Parameterschätzung von Bedeutung sind. Speziell werden wir in diesem Zusammenhang die Genauigkeit der Schätzung des Skalenparameters bei der Laplace- und Student-Verteilung untersuchen und Empfehlungen zur Schätzung ausarbeiten.

**Schlüsselwörter:** Durchschnittliche Abweichung, mittlere Abweichung, wahrscheinliche Abweichung, Schätzung des Skalenparameters, robuste Parameterschätzung

*Since the beginning of the statistical analysis of observation series the research is focussed on the estimation of the scale factor of the probability distribution function. Helmert intensively studied this question based on the fundamental works of Gauß /Gauß 1816/ and Encke /Encke 1832/. He looked especially on the accuracy of moment estimators and therefore the scale factor of the distribution function. The mean absolute error is connected to the first moment, where as the mean quadratic error corresponds to the second moment. The median absolute error is defined with respect to the confidence interval with 50% probability. The question is now, which of these estimators have the highest precision. In the article we have a look at the answers of Helmert to this question. But later on we will also discuss special distribution functions for robust estimation, the Laplace- and Student distribution and work out specific recommendations for the estimation of the scale factor.*

**Keywords:** Mean absolute error, mean quadratic error, median absolute error, scale factor estimation, robust estimation

# 1 EINFÜHRUNG

Auch 100 Jahre nach HelmerTs Tod wirken viele seiner Ideen in der Statistik und Ausgleichsrechnung weiter. In seiner Antrittsrede anlässlich der Aufnahme als ordentliches Mitglied in die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin in der öffentlichen Sitzung vom 28. Juni 1900 bemerkte er: „Jedem, der nur ein wenig den Inhalt der Geodäsie kennt, wird die vielfältige Anwendung der Ausgleichsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler gerade in diesem Gebiet des Wissens und Könnens auffallen. [...] Dabei zeigt sich, dass selbst rein mathematisch recht einfache Aufgaben der Geodäsie durch die Genauigkeitsfragen, die bei der Anwendung auf Messungsergebnisse hinzutreten, an theoretischem Interesse gewinnen“ /Helmert 1900/. Nach den Publikationen zu schließen, hat Helmert in den Jahren um 1875 und 1877 – also nach der Herausgabe der ersten Auflage seines bekannten Ausgleichsbuchs /Helmert 1872/ – sich intensiv mit der Definition und Schätzung von Kenngrößen von wahren Beobachtungsabweichungen beschäftigt /Helmert 1875a, b, 1876a, b, 1877b, c, d, a/. Eine ausführliche Darstellung über HelmerTs Arbeiten im Bereich der Theorie von Beobachtungsabweichungen ist bei Sheynin zu finden /Sheynin 1995/. Der historische Ablauf über die Erkenntnisse zur Verteilung der Quadratsumme von Beobachtungsabweichungen ( $\chi^2$ -Verteilung) wird von Schuh dargestellt /Schuh 2017/. In den folgenden Abschnitten widmen wir uns speziell der schon von Gauß /Gauß 1816/ und Helmert /Helmert 1872/ aufgeworfenen Frage der Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Wie Helmert in seiner Antrittsrede zum Ausdruck bringt, gewinnt diese Frage spezielles theoretische Interesse, wenn wir uns besonders mit Unsicherheiten der Bestimmung der Genauigkeiten auseinandersetzen.

Gauß zeigt auf /Gauß 1816/, dass man unterschiedliche Schätzer verwenden kann, um die Genauigkeit einer Beobachtungsreihe bzw. den Skalenparameter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu schätzen. Ausgehend von  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n$ , die der Standardnormalverteilung folgen und unabhängig voneinander sind, erarbeitet Gauß /Gauß 1816, Abs. 5/ Schätzer um die Varianz  $\sigma_{\mathcal{E}}^2$  der Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}$  zu schätzen. Die Varianz  $\sigma_{\mathcal{E}}^2$  charakterisiert die Genauigkeit der Beobachtungen und ist identisch mit dem Quadrat des Skalenparameters  $\sigma^2$  der zentrierten Normalverteilung, deren Dichtefunktion durch

$$f_{\mathcal{E}}^{N(0, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} \quad (1)$$

gegeben ist /Kreyszig 1998/. Aus den  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i$  lassen sich auch Schätzer für das  $m$ -te Moment  $\hat{\mathcal{M}}_m$  oder das  $m$ -te absolute Moment  $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{m}}$

$$\hat{\mathcal{M}}_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i^m, \quad \hat{\mathcal{M}}_{\bar{m}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_i|^m \quad (2)$$

der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f_{\mathcal{E}}(x)$  herleiten<sup>1</sup>.

Durch die genaue Unterscheidung in der Schreibweise zwischen Zufallsvariablen und Realisierungen von Zufallsvariablen bzw. deterministischen Größen wird nun sofort einsichtig, dass eine Summe von Potenzen der Zufallsvariablen  $\mathcal{E}$  wieder eine Zufallsvariable  $\hat{\mathcal{M}}_m$  ergibt, wobei das Dach über der Zufallsvariable darauf hindeutet, dass dieser Wert eine mögliche Schätzung für das wahre Moment  $\mu_m$  oder das wahre absolute Moment  $\mu_{\bar{m}}$

$$\mu_m = E\{\mathcal{E}^m\}, \quad \mu_{\bar{m}} = E\{|\mathcal{E}|^m\} \quad (3)$$

ist. Der Schätzer  $\hat{\mathcal{M}}_m$  weist nun eine gewisse Unsicherheit auf. Auch mit dieser Aufgabe haben sich Gauß /Gauß 1816/ und auch Encke /Encke 1832/ sehr intensiv befasst. Sie weisen darauf hin, dass die Schätzung des zweiten Moments bei der Gauß-Verteilung (Normalverteilung) am vorteilhaftesten ist, da diese Schätzung die kleinste Unsicherheit aufweist. Helmert greift dieses Thema auch in § 3 seines Buchs auf/Helmert 1872/. Er untersucht für drei spezielle Verteilungen (Gleichverteilung, angenäherte Gauß-Verteilung und Gauß-Verteilung) unterschiedliche Schätzer und deren Genauigkeit. Diese Gedanken werden wir in den folgenden Abschnitten aufgreifen.

Die Definition von durchschnittlichen, mittleren und wahrscheinlichen Abweichungen werden in Abschnitt 2 eingeführt. Im Abschnitt 3 wird zunächst eine asymptotische Abschätzung für die Standardabweichung dieser Schätzer und deren Verteilung aufgezeigt. Wir wenden dann diese Erkenntnis im Abschnitt 4 auf speziell in der robusten Parameterschätzung eingesetzte Verteilungen an, um aufzuzeigen, durch welche Schätzer der Skalenparameter der Verteilungen mit größter Genauigkeit geschätzt werden kann. Eine Zusammenfassung und Ausblick schließt den Textteil ab. Um den Text möglichst flüssig zu gestalten, haben wir viele technische Details in den Anhang gepackt. Hier haben wir besonderes Augenmerk auf detaillierte Herleitungen gelegt.

## 2 DEFINITIONEN VON KENNGRÖSSEN AUS DER WAHRSCHEINLICHKEITSDICHTEFUNKTION

Großen Raum widmet Helmert in seinem Buch /Helmert 1872/ der Diskussion von Beobachtungsabweichungen (Messfehlern). Speziell

	Definition
durchschnittliche Abweichung (durchschnittlicher Fehler)	$\vartheta_{\mathcal{E}} := \int_{-\infty}^{\infty}  x  f_{\mathcal{E}}(x) dx$
mittlere Abweichung (mittlerer Fehler)	$\sigma_{\mathcal{E}} := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\mathcal{E}}(x) dx}$
wahrscheinliche Abweichung (wahrscheinlicher Fehler)	$\varrho_{\mathcal{E}} := \int_{-\rho_{\mathcal{E}}}^{\rho_{\mathcal{E}}} f_{\mathcal{E}}(x) dx = \frac{1}{2}$

Tab. 1 | Definition der Abweichungen über die Dichtefunktion  $f_{\mathcal{E}}(x)$

<sup>1</sup> Im Folgenden wird konsequent zwischen Zufallsgrößen in kalligrafischen Schriftzeichen  $\mathcal{X}$ , wahren Werten in griechischen Zeichen  $\xi$  und Messungen oder Realisierungen der Zufallsvariablen in lateinischen (kusiven) Buchstaben  $x$  unterschieden. Vektoren, Matrizen und vektorwertige Funktionen werden durch Fettdruck  $\mathcal{X}, \xi, \mathbf{x}, \mathbf{E}\{\mathcal{X}\}$  herausgehoben.  $E\{\mathcal{X}\}$  und  $\Sigma\{\mathcal{X}\}$  charakterisieren den Erwartungswert- bzw. Varianzoperator für univariate Zufallsvariable,  $\mathbf{E}\{\mathcal{X}\}$  und  $\Sigma\{\mathcal{X}\}$  für multivariate Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsvariable  $\mathcal{X}$  kleiner einem Grenzwert  $x$  ist, wird durch  $P\{\mathcal{X} \leq x\}$  dargestellt. Der Vektor  $\mathbf{0}_n$  kennzeichnet einen Vektor mit  $n$  Nullen.

in den einführenden Kapiteln § 1–§ 4 des I. Abschnitts werden sehr präzise die in Tab. 1 festgelegten Kenngrößen untersucht.

Hierin bezeichnen  $\mathcal{E}$  die wahren Abweichungen, die nach einer Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f_{\mathcal{E}}(x)$  vorliegen. Unter der Annahme der Gauß-Verteilung zeigt Helmert auf, dass diese einzelnen Abweichungsgrößen in einem „constantem Verhältnisse“ zueinander stehen /Helmert 1872, § 3, Abs. III (19)/. Im Appendix A.1 wird beispielsweise das Verhältnis zwischen der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_{\mathcal{E}}$  und der mittleren Abweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}$  mit

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma_{\mathcal{E}} = 1,2533 \sigma_{\mathcal{E}} \tag{4}$$

hergeleitet. Das Verhältnis zwischen wahrscheinlicher Abweichung  $\varrho_{\mathcal{E}}$  und mittlerer Abweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}$  wird über den Quantilwert  $K_{\gamma}^{\mathcal{E}}$  zur Wahrscheinlichkeit 75 % ( $\gamma = 0,75$ ) der entsprechenden Verteilung  $f_{\mathcal{E}}$  hergestellt (siehe Appendix A.2). Für zentriertnormalverteilte Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  gilt

$$\varrho_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = K_{0,75}^{\mathcal{N}(0,1)} \sigma_{\mathcal{E}} = 0,67499 \sigma_{\mathcal{E}}. \tag{5}$$

Die numerischen Werte für die verschiedenen Umrechnungen für zentriertnormalverteilte Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}$  sind in Tab. 2 zusammengefasst.

$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$	$\sigma_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$	$\varrho_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$	
1	1,2533	0,8455	$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$
0,7979	1	0,6745	$\sigma_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$
1,1827	1,4826	1	$\varrho_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$

Tab. 2 | Verhältnis zwischen durchschnittlicher Abweichung  $\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$ , mittlerer Abweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$  und wahrscheinlicher Abweichung  $\varrho_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$  für normalverteilte Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  (Beispiel:  $\sigma_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = 1,2533 \vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)}$ )

Die durchschnittliche und mittlere Abweichung stellen damit das erste und zweite Moment der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion bezüglich der absoluten wahren Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}$  dar. Die wahrscheinliche Abweichung ist hingegen über den Quantilwert zur Wahrscheinlichkeit 0,25 bzw. 0,75 definiert, wobei eine symmetrische Verteilung bezüglich des Ursprungs vorausgesetzt wird. Alle drei von Helmert angeführten Kenngrößen für die Abweichungen haben ihre Bedeutung bis heute nicht verloren, wenn auch die mittlere Abweichung in Form der Varianz  $\sigma_{\mathcal{E}}^2$  oder Standardabweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}$  zumeist verwendet wird<sup>2</sup>. Speziell bei Datensätzen mit auffälligen Daten, die vom Verhalten der restlichen Daten abweichen (Ausreißer, fallweise Störungen), wird die wahrscheinliche Abweichung  $\varrho_{\mathcal{E}}$  herangezogen, um robust gegenüber auffälligen Daten zu sein. Man beachte, dass einzelne große Abweichungen keinen Einfluss auf dieses Genauigkeitsmaß haben. Im Zusammenhang mit der L1-Norm-Ausgleichung /Fuchs 1982/, /Schuh, 1985, 2006/, aber

auch der Robusten Parameterschätzung eröffnet die Definition der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_{\mathcal{E}}$  interessante Möglichkeiten, da sie ein konsistentes Maß zur Minimierungsforderung darstellt.

### 3 SCHÄTZER FÜR DIE KENNGRÖSSEN AUS $n$ WAHREN BEOBACHTUNGSABWEICHUNGEN

Bereits Gauß hatte Überlegungen angestellt, wie man bei Vorliegen von  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n$  Schätzer für die angeführten Kenngrößen definieren kann /Gauß 1816/. Dabei wird die Unabhängigkeit der wahren Beobachtungsabweichungen vorausgesetzt und eine gleiche Genauigkeit angenommen. Eine zentrale Rolle spielen dabei die Potenzsummen der absoluten Beobachtungsabweichungen, die folgendermaßen definiert werden:

$$\hat{\mathcal{M}}_m := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_i|^m, \tag{6}$$

wobei  $m$  die Ordnung des Moments charakterisiert. Aus diesen Potenzsummen lassen sich unmittelbar die Schätzer für die durchschnittliche Abweichung

$$\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} := \hat{\mathcal{M}}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_i| \tag{7}$$

und die mittlere (quadratischen) Abweichung

$$\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}^2 := \hat{\mathcal{M}}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{E}_i^2 \tag{8}$$

angeben. Durch die Schreibweise wird unmittelbar deutlich, dass die Schätzungen  $\hat{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}}$  und  $\hat{\mathcal{S}}_{\mathcal{E}}^2$  wieder Zufallsvariablen sind, die durch ihre Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen oder deren Momente charakterisiert werden können. Diese Schätzer sind erwartungstreue Schätzer der wahren Momente  $\mu_{\bar{m}}$ ,

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_m\} = \mu_{\bar{m}}, \tag{9}$$

(siehe App. B) und weisen Unsicherheiten auf. In seiner berühmten Schrift /Helmert 1876b/ zeigt Helmert, dass die Dichtefunktion der Schätzer (6) für eine große Anzahl  $n$  von wahren Beobachtungsabweichungen durch

$$f_{\hat{\mathcal{M}}_m}(x; n) = \sqrt{\frac{n}{2\pi(\mu_{2\bar{m}} - \mu_{\bar{m}}^2)}} e^{-\frac{n(\mu_{\bar{m}} - x)^2}{2(\mu_{2\bar{m}} - \mu_{\bar{m}}^2)}} \tag{10}$$

angenähert werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{\hat{\mathcal{M}}_m}(x; n)$  folgt somit einer Gauß-Verteilung (vgl. /Helmert 1876b, Gl. (34)/). Die Varianz der Schätzung kann somit unmittelbar mit

$$\sigma_{\hat{\mathcal{M}}_m} = \sqrt{\frac{\mu_{2\bar{m}} - \mu_{\bar{m}}^2}{n}} \tag{11}$$

abgelesen werden und in die Form

$$\sigma_{\hat{\mathcal{M}}_m}^2 = \frac{\mu_{\bar{m}}^2}{n} \left( \frac{\mu_{2\bar{m}}}{\mu_{\bar{m}}^2} - 1 \right) \tag{12}$$

umgeschrieben werden. Damit können nun die Standardabweichungen  $\sigma_{\hat{\mathcal{M}}_m}$  bzw. Varianzen  $\sigma_{\hat{\mathcal{M}}_m}^2$  für die Schätzer in Gl. (6) für beliebige

<sup>2</sup> Beachte: Die mittlere Abweichung (Standardabweichung) wird mit Sigma und dem Index der Zufallsvariable bezeichnet  $\sigma_{\mathcal{E}}$  /DIN 18709-4, 2010/. Der Skalenparameter der Verteilungen werden ebenfalls mit Sigma, aber ohne Index gekennzeichnet,  $\sigma$ . Bei normalverteilten Größen ist diese Unterscheidung nicht notwendig, da die mittlere quadratische Abweichung (Varianz)  $\sigma_{\mathcal{E}}^2$  als zweites zentrales Momenten identisch mit dem quadratischen Skalenparameter  $\sigma^2$  ist /Kreyszig 1998/, /Koch 1997, Kap. 241 bzw. 252/. Für die Laplace- und Student-Verteilung ist dieser Zusammenhang aber nicht mehr gültig und daher eine strenge Unterscheidung zwischen der mittleren Abweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}$  und dem Skalenparameter der Verteilung  $\sigma$  erforderlich.

Verteilungen abgeleitet werden. Die Varianzen des Schätzers für die durchschnittliche Abweichung  $\hat{D}_\varepsilon$  ( $m = 1$ ) errechnet sich mit

$$\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}^2 = \frac{\vartheta_\varepsilon^2}{n} \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\vartheta_\varepsilon^2} - 1 \right) \quad (13)$$

und die Varianz des Schätzers für die mittlere Abweichung  $\hat{S}_\varepsilon$  ( $m = 2$ ) ist

$$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}^2 = \frac{(\sigma_\varepsilon^2)^2}{n} \left( \frac{\mu_4}{(\sigma_\varepsilon^2)^2} - 1 \right). \quad (14)$$

Die wahren Momente  $\vartheta_\varepsilon$ ,  $\sigma_\varepsilon$  und  $\mu_4$  können nun durch ihre Schätzungen (Realisierungen)  $\hat{\vartheta}_\varepsilon$ ,  $\hat{\sigma}_\varepsilon$  und  $\hat{\mu}_4$  ersetzt werden. Man erkennt, dass die Standardabweichung relativ mit den zu schätzenden Größen wächst, so gilt beispielsweise mit  $\sigma \approx \hat{S}_\varepsilon$ :

$$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon} \approx \hat{S}_\varepsilon^2 \sqrt{\frac{1}{n} \left( \frac{\mu_4}{(\sigma_\varepsilon^2)^2} - 1 \right)} := \hat{S}_\varepsilon^2 \Delta. \quad (15)$$

Die Größe  $\Delta$  symbolisiert einen kleinen Wert. Für normalverteilte Größen ist  $\mu_4 = 3(\sigma_\varepsilon^2)^2$ , wodurch der Ausdruck in der Klammer einen Wert 2 annimmt. Für die Laplace-Verteilung wird der Wert in der Klammer zu 5 (beachte die Momente der Laplace-Verteilung in Appendix (C)). Die Division durch die Anzahl  $n$  der wahren Beobachtungsabweichungen sorgt somit, dass  $\Delta$  mit zunehmendem  $n$  klein wird ( $\Delta < 1$ ).

Die mittlere quadratische Abweichung und dessen Unsicherheit (mittlere Abweichung) lässt sich wegen Gl. (15) durch

$$\hat{S}_\varepsilon^2 \pm \sigma_{\hat{S}_\varepsilon}^2 = \hat{S}_\varepsilon^2 (1 \pm \Delta) \quad (16)$$

ausdrücken. Um die mittlere Abweichung darzustellen, muss die Quadratwurzel gebildet werden

$$\begin{aligned} \sqrt{\hat{S}_\varepsilon^2 \pm \sigma_{\hat{S}_\varepsilon}^2} &= \hat{S}_\varepsilon \sqrt{1 \pm \Delta} \\ &= \hat{S}_\varepsilon \left( 1 \pm \frac{1}{2} \Delta \mp \frac{1}{8} \Delta^2 \pm \dots \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Die Reihe konvergiert für  $\Delta < 1$  und kann speziell bei einer größeren Anzahl  $n$  von wahren Beobachtungsabweichungen durch das lineare Glied approximiert werden. Der relative Fehler von  $\Delta$  in

Verteilung $f_\varepsilon(x)$	$\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}$	$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}$
$c; \varepsilon^2 \leq \varepsilon_{\max}^2$	$0,5773 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,4472 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$c \left( 1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_{\max}^2} \right); \varepsilon^2 \leq \varepsilon_{\max}^2$	$0,6498 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,5345 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^2}$	$0,7555 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,7071 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Tab. 3 | Standardabweichung  $\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}$  bzw.  $\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}$  der Schätzer für die durchschnittliche Abweichung  $\hat{D}_\varepsilon$  und mittlere Abweichung  $\hat{S}_\varepsilon$  bei unterschiedlichen Verteilungen (I: Gleichverteilung im Intervall  $[-\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\max}]$ , II: Genäherte Gauß-Verteilung im Intervall  $[-\varepsilon_{\max}, \varepsilon_{\max}]$ , III: Gauß-Verteilung).  $c$  kennzeichnet eine geeignete Konstante und  $\varepsilon_{\max}$  eine maximal angenommene Abweichung

<sup>3</sup> Beachte Fußnote 2.

$\hat{S}_\varepsilon^2$  entspricht somit einem relativen Fehler von  $\frac{1}{2} \Delta$  in  $\hat{S}_\varepsilon$  /Helmert 1907, S. 32/.

Helmert weist Standardabweichungen für die Schätzungen der durchschnittlichen Abweichung  $\hat{D}_\varepsilon$  (Gl. (7)) und der mittleren Abweichung  $\hat{S}_\varepsilon$  (Gl. (8)) bei drei unterschiedlichen Verteilungen aus /Helmert 1872, S. 25, Gl. (13)/. In Tab. 3 sind diese Werte zusammengefasst.

Speziell in der robusten Parameterschätzung ist auch die Schätzung der wahrscheinlichen Abweichung durchaus gängig. Die Schätzung der wahrscheinlichen Abweichung kann direkt über den Median erfolgen:

$$\hat{\mathcal{R}}_\varepsilon = \text{median}|\mathcal{E}_i|, \quad (18)$$

der besonders robust gegenüber Ausreißern ist. Dieser Schätzer wird heute als MAD-(Median Absolute Deviation)-Schätzer bezeichnet. Über die Genauigkeiten der wahrscheinlichen Abweichung  $\hat{\mathcal{R}}_\varepsilon$  werden bei Gauß und Encke /Gauß 1816, Abschnitt. 7/, /Encke 1832, S. 298/ Aussagen getroffen. Für standardnormalverteilte Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}$  werden die wahrscheinlichen Abweichungen angegeben, die mit Tab. 2 in die mittlere Abweichung umgerechnet werden können. Die Standardabweichung für die wahrscheinliche Abweichung ergibt sich mit

$$\sigma_{\hat{\mathcal{R}}_\varepsilon}^{\mathcal{N}(0,\sigma^2)} = 1,1164 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

und weist somit im Verhältnis zu 0,7071 für die mittlere Abweichung und 0,7555 für die durchschnittliche Abweichung eine sehr ungünstige Genauigkeit für diesen Schätzer aus. Helmert zieht den Schluss, dass der Schätzer für die mittlere Abweichung vorzuziehen ist, da er immer der genaueste ist /Helmert 1872, S. 26/.

#### 4 SCHÄTZUNG DES SKALENPARAMETERS BEI DER LAPLACE- UND STUDENT-VERTEILUNG

Im Folgenden wollen wir die Genauigkeit der Schätzer der Momente für Verteilungen untersuchen, die im Zusammenhang mit der Robusten Parameterschätzung stehen. Die Laplace-Verteilung steht im unmittelbaren Zusammenhang mit dem robusten L1-Norm-Schätzer, wird aber auch vielfach in Kombination mit der Normalverteilung beim Huber-Schätzer verwendet /Dodge & Jurečková 2000/, /Brockmann & Kargoll 2012/. Die Student-Verteilung erlaubt durch ihre „Längerschwänzigkeit“ speziell im Bereich über  $1,5 \sigma$  die Modellierung eines höheren Anteils von größeren Beobachtungsabweichungen, wie sie oft in Messreihen auftreten. Bedingt durch unbekannt Systemstörungen sind dabei neben den „normalen“ Messwerten oft auch „auffällige“ Bereiche erkennbar, sodass der Anteil von größeren Abweichungen gegenüber der Normalverteilung erhöht wird /Schuh et al. 2015/. Der Anteil an größeren Abweichungen kann dabei variabel über den Freiheitsgrad gesteuert werden /Koch & Kargoll 2013/. In Abb. 1 sind die zu diskutierenden Verteilungen dargestellt. Je höher der Freiheitsgrad der Student-Verteilung angenommen wird, desto weniger „auffällige“ Messabweichungen liegen vor und umso näher wird die Normalverteilung angenähert.

Alle Verteilungen liegen in zentrierter Form vor, wobei der Skalenparameter  $\sigma$  die Weite der Verteilung regelt<sup>3</sup>. In App. C bzw. App. D

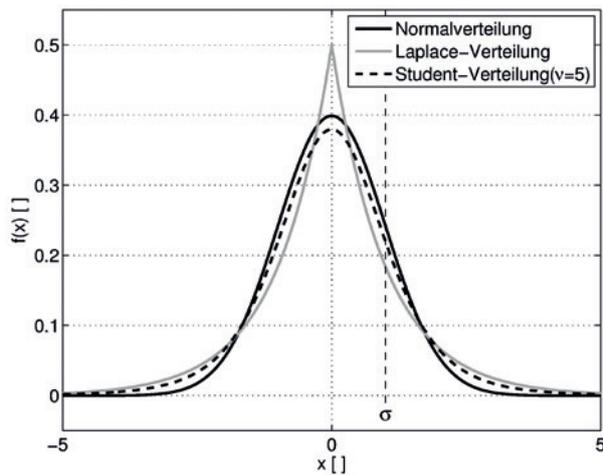


Abb. 1 | Dichtefunktion der Normalverteilung, Laplace-Verteilung und Student-Verteilung mit Freiheitsgrad 5

sind die Momente und auch die durchschnittlichen Abweichungen sowohl für die Laplace-Verteilung als auch die Student-Verteilung angegeben bzw. hergeleitet.

### 4.1 Genauigkeit der Schätzung bei der Laplace-Verteilung

Wir gehen nun davon aus, dass die  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\bar{E}_i$  einer zentrierten Laplace-Verteilung folgen,  $\bar{E}_i \sim \mathcal{L}(0, \sigma)$  und untereinander unabhängig sind. Somit können aus App. C die Schätzer für den Skalenparameter  $\sigma$  abgelesen werden. Aus Gl. (38) folgt unmittelbar der Zusammenhang zwischen durchschnittlicher Abweichung  $\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  und dem Skalenparameter  $\sigma$  mit

$$\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \sigma. \tag{20}$$

Der Zusammenhang zwischen der mittleren Abweichung  $\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  und dem Skalenparameter  $\sigma$  ist unmittelbar durch das 2. zentrale Moment  $\mu_2^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  mit

$$\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \sqrt{\mu_2^{\mathcal{L}(0,\sigma)}} = \sqrt{2} \sigma \tag{21}$$

$\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$	$\mathcal{T}_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$	$\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$	
1	0,7071	0,3010	$\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$
1,4142	1	0,2129	$\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$
3,3219	4,6979	1	$\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$

Tab. 4 | Verhältnis zwischen durchschnittlicher Abweichung  $\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$ , mittlerer Abweichung  $\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  und wahrscheinlicher Abweichung  $\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  für wahre Beobachtungsabweichungen  $\bar{E}$ , die der Laplace-Verteilung genügen;  $\bar{E} \sim \mathcal{L}(0, \sigma)$  (Beispiel:  $\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = 0,7071 \vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$ )

$\nu$	$\sigma = \downarrow \vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$	$\sigma = \downarrow \sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$	$\sigma = \downarrow \varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$
2	0,7071		1,2247
3	0,9069	1,7321	1,3074
4	1,0000	1,4142	1,3501
5	1,0537	1,2910	1,3761
⋮	⋮	⋮	⋮
10	1,1565	1,1180	1,4290
⋮	⋮	⋮	⋮
15	1,1894	1,0742	1,4468
16	1,1935	1,0690	1,4490
⋮	⋮	⋮	⋮
20	1,2056	1,0541	1,4557
⋮	⋮	⋮	⋮
1000	1,2532	1,0010	1,4821

Tab. 5 | Tabelle zur Berechnung des Skalenparameters  $\sigma$  aus der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$ , der mittleren Abweichung  $\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$  und aus der wahrscheinlichen Abweichung  $\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$  ( $\sigma = 1/K_{0,75}^{\mathcal{L}(\nu)} \varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(\nu)}$ )

festgelegt. Die wahrscheinliche Abweichung  $\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  wird über den Quantilwert  $K_{0,25}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  definiert. Dieser kann direkt aus der Verteilungsfunktion (Gl. (36)) durch die Identität

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{\sigma}} = \frac{1}{4} \text{ für } x = -\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} \tag{22}$$

ausgedrückt werden. Die wahrscheinliche Abweichung ist somit durch

$$\varrho_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = -K_{0,25}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} \sigma = -\log \frac{1}{2} \sigma = 0,6931 \sigma \tag{23}$$

gegeben. In Tab. 4 werden die Umrechnungen zwischen den Abweichungsmaßen zusammengefasst.

Die Genauigkeit der Schätzer kann unmittelbar aus Gl. (12) hergeleitet werden und unter Beachtung von Gl. (20) und Gl. (21) mit

$$\left(\sigma_{\hat{D}_{\bar{E}}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2 = \frac{\left(\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2}{n} \left(\frac{2\sigma^2}{\left(\vartheta_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2} - 1\right) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{24}$$

beziehungsweise

$$\left(\sigma_{\hat{S}_{\bar{E}}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2 = \frac{\left(\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2}{n} \left(\frac{24\sigma^4}{\left(\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2} - 1\right) = \frac{\left(\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}\right)^2}{n} \cdot 5 \tag{25}$$

dargestellt werden. Die Standardabweichung für die mittlere Abweichung (linear) ergibt sich wegen Gl. (17) somit zu

$$\sigma_{\hat{S}_{\bar{E}}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \frac{\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}}{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sigma_{\bar{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}}{\sqrt{n}} \cdot 1,1180. \tag{26}$$

Tab. 6 fasst die Standardabweichungen zusammen und man erkennt, dass die relative Standardabweichung der durchschnittlichen Abweichung mit dem Faktor 1 und der mittleren Abweichung

mit dem Faktor  $\frac{\sqrt{5}}{2} = 1,1180$  zu multiplizieren ist. Somit ist bei der Laplace-Verteilung der Schätzer für die durchschnittliche Abweichung genauer als die Schätzung für die mittlere Abweichung.

Verteilung	$\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}$	$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}$
Laplace	$1,0000 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$1,1180 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
Student: $\nu = 5$	$0,9223 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$1,4142 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\nu = 10$	$0,8197 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,8660 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\nu = 15$	$0,7952 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,7977 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\nu = 16$	$0,7924 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,7906 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\nu = 100$	$0,7608 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,7181 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$
$\nu = 10\,000$	$0,7556 \frac{\vartheta_\varepsilon}{\sqrt{n}}$	$0,7072 \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{n}}$

Tab. 6 | Standardabweichung  $\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}$  bzw.  $\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}$  der Schätzer für die durchschnittliche Abweichung  $\hat{D}_\varepsilon$  und mittlere Abweichung  $\hat{S}_\varepsilon$  bei der Laplace-Verteilung und Student-Verteilung mit unterschiedlichen Freiheitsgraden  $\nu$

### 4.2 Genauigkeit der Schätzung bei der Student-Verteilung

Die  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\hat{\varepsilon}_i$  sollen der skalierten Student-Verteilung,  $\hat{\varepsilon}_i \sim t_\nu(\sigma)$  genügen und untereinander unabhängig sein. In App. D werden die Eigenschaften der skalierten Student-Verteilung zusammengefasst und die Grundlagen für die Bestimmung der Schätzer für den Skalenparameter  $\sigma$  gelegt. Aus Gl. (47) folgt unmittelbar der Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  und dem Skalenparameter  $\sigma$  mit

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\nu}{\nu-1} \sigma. \tag{27}$$

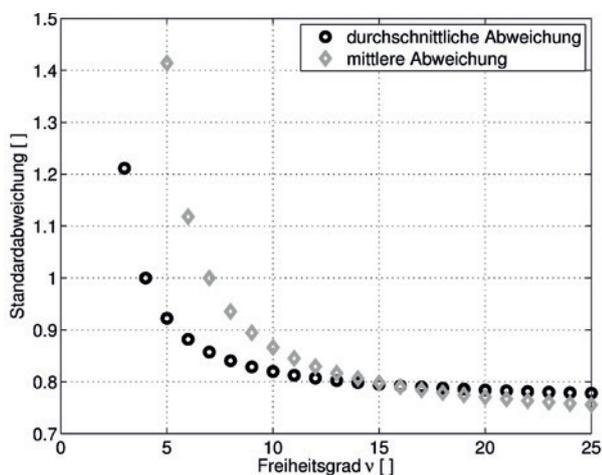


Abb. 2 | Standardabweichungen der durchschnittlichen und mittleren Abweichung bei der Student-Verteilung bei unterschiedlichen Freiheitsgraden

Das zweite zentrale Moment  $\mu_2^{t_\nu(\sigma)}$  (Gl. (44)) legt das Verhältnis zwischen dem Skalenparameter  $\sigma$  und der mittleren Abweichung  $\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  mit

$$\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = \sqrt{\mu_2^{t_\nu(\sigma)}} = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \sigma \tag{28}$$

fest. Die wahrscheinliche Abweichung  $\varrho_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  ist wieder durch den Quantilwerte  $K_{0,25}^{t_\nu(\sigma)}$  festgelegt. In Tab. 5 werden Faktoren zur Schätzung des Skalenparameters aus der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$ , der mittleren Abweichung  $\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  und der wahrscheinlichen Abweichung  $\varrho_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  angegeben.

Die Genauigkeit der Schätzer kann unmittelbar aus Gl. (12) hergeleitet werden und unter Beachtung von Gl. (47) und Gl. (44) mit

$$\sigma_{\hat{D}_\varepsilon}^{t_\nu(\sigma)} = \frac{\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{(\nu-1)^2}{\nu(\nu-2)} 4\bar{C}^2 - 1} \tag{29}$$

beziehungsweise

$$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}^{t_\nu(\sigma)} = \frac{(\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)})^2}{n} \left( \frac{3(\nu-2)}{\nu-4} - 1 \right) \tag{30}$$

$$= \frac{(\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)})^2}{n} \frac{2(\nu-1)}{\nu-4} \tag{31}$$

dargestellt werden.  $\bar{C}$  kennzeichnet dabei den in Gl. (46) definierten Faktor. Die Standardabweichung für die mittlere Abweichung (linear) ergibt sich wegen Gl. (17) somit zu

$$\sigma_{\hat{S}_\varepsilon}^{t_\nu(\sigma)} = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}} = \frac{\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\nu-1}{2(\nu-4)}}. \tag{32}$$

Tab. 6 und Abb. 2 fassen die Standardabweichungen der Schätzer für die Student-Verteilung mit verschiedenen Freiheitsgraden  $\nu$  zusammen. Aus Abb. 2 erkennt man, dass bis zum Freiheitsgrad  $\nu = 15$  die Schätzung für die durchschnittliche Abweichung  $\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  die kleinere Standardabweichung aufweist. Für Freiheitsgrade  $\nu > 15$  weist die Schätzung über die mittlere Abweichung  $\sigma_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)}$  die kleineren Standardabweichungen auf. Für hohe Freiheitsgrade nähert sich das Verhalten den Werten der Normalverteilung an.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit folgten wir auf den Spuren von Helmert. Er lieferte grundlegende Erkenntnisse über die Verteilung von Potenzsummen von Zufallsvariablen /Helmert 1876b/, die er dafür nutzte, um die Standardabweichungen von verschiedenen Schätzern für die Skalenparameter der Verteilungsfunktion herzuleiten. Er untersuchte unterschiedliche Verteilungen (Gleichverteilung, genäherte Gauß-Verteilung, Gauß-Verteilung) und kam zum Schluss, dass der Schätzer über die mittlere Abweichung die kleinste Standardabweichung aufweist. Hier untersuchten wir nun spezielle Verteilungen aus der robusten Parameterschätzung und haben aufgezeigt, dass der Schätzer für die durchschnittliche Abweichung bei der Laplace-Verteilung, aber auch bei der Student-Verteilung, bei Freiheitsgraden unter 15 genauer als die Schätzung über die mittlere Abweichung ist und daher in diesen Fällen vorzuziehen ist. Dabei ist zu beachten, dass der Freiheitsgrad der Student-Verteilung unabhängig

von der Anzahl  $n$  der wahren Beobachtungsabweichungen ist und nur die „Längerschwänzigkeit“ der Verteilung regelt. Geringere Freiheitsgrade erlauben eine größere Anzahl von größeren Beobachtungsabweichungen, wie sie in langen Zeitreihen durch nicht modellierte Effekte, aber auch durch Sensorunzulänglichkeiten vielfach entstehen.

In den hier behandelten Abschnitten haben wir uns ausschließlich mit den wahren Beobachtungsabweichungen beschäftigt. Der Kritiker wird nun einwenden, dass diese Studien rein theoretischen Charakter haben, da uns die wahren Beobachtungsabweichungen nicht zugänglich sind. Das ist vollkommen richtig und wurde schon von Helmert erkannt. Den Übergang von wahren Beobachtungsabweichungen auf die Verbesserungen wird bei Helmert für die Ausgleichung nach direkten Beobachtungen aufgezeigt /Helmert 1876a/. In /Helmert 1875b/ erweitert er diesen Ansatz, um Schätzer für die Ausgleichung bei vermittelnden und bedingten Beobachtungen zu erlangen. Die Formeln für die mittlere quadratische Abweichung (Varianz)  $\tilde{s}_E^2$  mit

$$\tilde{s}_E^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \tilde{v}_i^2 \quad (33)$$

geschätzt aus den ausgeglichenen Verbesserungen  $\tilde{v}$  bei einer Redundanz von  $r$  gehören zur geodätischen Praxis bei der Ausgleichung nach den kleinsten Quadraten. Die Schätzer für die durchschnittliche Abweichung und die wahrscheinliche Abweichung werden speziell im Bereich der robusten Parameterschätzung (z. B. M-Schätzer, L1-Norm-Schätzer) eingesetzt. Die exakte Verteilung der Residuen für unterschiedliche (mathematisch strenge, aber auch empirische) Optimierungsstrategien ist dabei weitgehend unbekannt. Vielfach behilft man sich mit einem asymptotischen Zusammenhang zwischen den wahren Beobachtungsabweichungen und den Modellabweichungen (Residuen) bei stark überbestimmten Modellen.

Moderne terrestrische und satellitengetragene Sensoren liefern zumeist sehr lange Beobachtungsreihen. Somit tritt die Anzahl der zu schätzenden Parameter in den Hintergrund gegenüber der Anzahl der Beobachtungen. Der Einfluss der Einzelbeobachtung auf die geschätzten Parameter des Modells ist verschwindend gering. Oftmals werden auch die zu untersuchenden Datensätze bei der Modellbildung bewusst nicht verwendet. Die Residuen (Modellabweichungen) zwischen einem Modell und den Beobachtungen werden dann wie wahre Beobachtungsabweichungen behandelt. Eine optimale Schätzung der Skalenparameter der Verteilung (und auch der Freiheitsgrade der Student-Verteilung) ist essenziell zur Identifikation von „fehlerhaften“ Einzelbeobachtungen (Ausreißern) und von „auffälligen“ Sequenzen von Beobachtungen, die auf Modelldefizite, aber auch Sensorunzulänglichkeiten hinweisen. Die hier dargestellten Schätzer eröffnen für Beobachtungsreihen, die der Student-Verteilung genügen, neue Analysemöglichkeiten. Speziell für kurze Zeitreihen ist zusätzlicher Forschungsbedarf notwendig, um eine durchgreifende Theorie weiterzuentwickeln.

## APPENDIX

### A NORMALVERTEILUNG

Die Dichtefunktion der Normalverteilung ist definiert durch

$$f_X^{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Die momenterzeugende Funktion /Koch 1997, Kap. 2.3.4/ ist durch

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

gegeben /Abramowitz & Segun 1968, S. 930/.

Daraus können unmittelbar die Momente abgeleitet werden:

1. Moment:  $\mu_1^{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)} = \left. \frac{dm_X(t)}{dt} \right|_{t=0} = \mu$
2. zentrales Moment:  $\mu_2^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = \left. \frac{d^2 m_X(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = \sigma^2$
3. zentrales Moment:  $\mu_3^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = \left. \frac{d^3 m_X(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = 0$
4. zentrales Moment:  $\mu_4^{\mathcal{N}(0, \sigma^2)} = \left. \frac{d^4 m_X(t)}{dt^4} \right|_{t=0} = 3\sigma^2$

#### A.1 Berechnung der durchschnittlichen Abweichung bei der Normalverteilung

Die durchschnittliche Abweichung  $\vartheta_E$  bei einer zentrierten Normalverteilung  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ist nach Tab. 1 definiert durch

$$\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)} := \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx.$$

Mithilfe des Parameterübergangs

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sigma} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sigma}$$

kann dies umgeformt werden zu

$$\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} |y| e^{-y^2} dy$$

beziehungsweise wegen der Symmetrie des Integranden mit

$$\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma 2 \int_0^{\infty} y e^{-y^2} dy$$

zusammengefasst werden. Durch Lösung des Integrals /Gradshteyn & Ryzhik 2007, Gl. (2.322)/ folgt

$$\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma 2 \left( -\frac{1}{2} e^{-y^2} \right) \Big|_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

Somit ist der Zusammenhang zwischen dem Skalenparameter  $\sigma$  und der durchschnittlichen Abweichung  $\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)}$  durch

$$\vartheta_E^{\mathcal{N}(0, \sigma)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma = 0,79788 \sigma \text{ festgelegt.}$$

## A.2 Berechnung der wahrscheinlichen Abweichung bei der Normalverteilung

Bei vorgegebener Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f_{\mathcal{E}}(x)$  kann der Zusammenhang zwischen der mittleren Abweichung  $\sigma_{\mathcal{E}}$  und der wahrscheinlichen Abweichung  $\varrho_{\mathcal{E}}$  hergestellt werden. Nimmt man an, dass die wahren Abweichungen  $\mathcal{E}$  die zentriertnormalverteilt sind, so ist die wahrscheinliche Abweichung  $\varrho_{\mathcal{E}}$  durch

$$P\{|\mathcal{X}| \leq \varrho_{\mathcal{E}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\varrho_{\mathcal{E}}}^{\varrho_{\mathcal{E}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{2} \quad (34)$$

festgelegt. Nach der Substitution

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma} x \quad \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

ergibt sich aus Gl. (34)

$$P\{|\bar{\mathcal{X}}| \leq \varrho_{\mathcal{E}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma}}^{\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\bar{x}^2} d\bar{x} = \frac{1}{2}$$

mit den modifizierten Integrationsgrenzen  $\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \varrho_{\mathcal{E}}$ . Die Zufallsvariable  $\bar{\mathcal{X}}$  ist somit standardnormalverteilt. Verteilt man die Wahrscheinlichkeitsmasse um den Nullpunkt, so müssen die Formeln

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\bar{x}^2} d\bar{x} = \frac{1}{4} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\bar{x}^2} d\bar{x} = \frac{1}{4}$$

ausgewertet werden. Da die Dichtefunktion symmetrisch zum Ursprung ist, entspricht  $\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma}$  dem Quantilwert der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0,1)$  zur Wahrscheinlichkeit 0,75:

$$\frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma} = K_{0,75}^{\mathcal{N}(0,\sigma)} = 0,6745$$

Die Beziehung zwischen wahrscheinlicher Abweichung und dem Skalenparameter ist somit durch

$$\varrho_{\mathcal{E}} = \sigma \frac{\varrho_{\mathcal{E}}}{\sigma} = 0,6745 \sigma \text{ gegeben.}$$

## B ERWARTUNGSTREUE DER MOMENTENSCHÄTZER

In diesem Anhang wird gezeigt, dass die Schätzung der wahren Momente  $\mu_m$  über die Potenzsumme von  $n$  wahren Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n$ , mit Gl. (6)

$$\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_i|^m$$

erfolgen kann.  $\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}$  ist ein erwartungstreuer Schätzer für die wahren Momente  $\mu_m$  und demnach gilt

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = \mu_m \quad (35)$$

**Beweis:** Dies folgt unmittelbar aus

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mathcal{E}_i|^m\right\}.$$

Wegen der linearen Beziehung zwischen den Zufallsvariablen kann der Erwartungswertoperator in die Summe hineingezogen werden:

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\{|\mathcal{E}_i|^m\},$$

woraus sich unmittelbar

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}_i|^m g_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i) d\mathcal{E}_i$$

ergibt.  $g_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i)$  kennzeichnet dabei die Randdichte der Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i$ . Aus der Unabhängigkeit der Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i$  und somit der Separierbarkeit der Dichtefunktion

$f_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^n f_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i)$  sind die Randdichten  $g_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i)$  äquivalent zu den individuellen Dichtefunktionen  $f_{\mathcal{E}_i}(\mathcal{E}_i)$  der einzelnen Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i$ . Beachten wir ferner die Homogenität der Dichtefunktionen der Beobachtungsabweichungen  $\mathcal{E}_i$ , so folgt damit

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{E}|^m f_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) d\mathcal{E},$$

$$E\{\hat{\mathcal{M}}_{\bar{\mathcal{M}}}\} = \mu_m.$$

## C LAPLACE-VERTEILUNG

Die Dichtefunktion der Laplace-Verteilung ist definiert durch

$$f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{L}(\mu,\sigma)}(x) = \frac{1}{2\sigma} e^{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}}.$$

Die Verteilungsfunktion kann in geschlossener Form dargestellt werden:

$$F_{\mathcal{X}}^{\mathcal{L}(\mu,\sigma)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\frac{x-\mu}{\sigma}} & x \leq \mu, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} & x > \mu. \end{cases} \quad (36)$$

Die momenterzeugende Funktion ist durch

$$m_{\mathcal{X}}(t) = \frac{e^{\mu t}}{1 - \sigma^2 t^2} \quad \text{für} \quad |t| \leq \frac{1}{\sigma}$$

gegeben /Abramowitz & Segun 1968, S. 930/. Daraus können unmittelbar die Momente abgeleitet werden:

1. Moment:  $\mu_1^{\mathcal{L}(\mu,\sigma)} = \left. \frac{dm_{\mathcal{X}}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \mu$
2. zentrales Moment:  $\mu_2^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \left. \frac{d^2 m_{\mathcal{E}}(t)}{dt^2} \right|_{t=0} = 2\sigma^2$
3. zentrales Moment:  $\mu_3^{\mathcal{L}(0,\sigma^2)} = \left. \frac{d^3 m_{\mathcal{E}}(t)}{dt^3} \right|_{t=0} = 0$
4. zentrales Moment:  $\mu_4^{\mathcal{L}(0,\sigma^2)} = \left. \frac{d^4 m_{\mathcal{E}}(t)}{dt^4} \right|_{t=0} = 24\sigma^4$

### C.1 Berechnung der durchschnittlichen Abweichung bei einer Laplace-Verteilung

Die durchschnittliche Abweichung  $\vartheta_{\mathcal{E}}$  bei der zentrierten Laplace-Verteilung  $\mathcal{L}(0,\sigma)$  ist nach Tab. 1 definiert durch

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \frac{1}{2\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx$$

und kann wegen der Symmetrie der Verteilungsfunktion und somit des Integranden dargestellt werden durch

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \frac{1}{\sigma} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x}{\sigma}} dx.$$

Mithilfe der Substitution

$$u = \frac{x}{\sigma} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma} \tag{37}$$

kann dies umgeformt werden zu

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \sigma \int_0^{\infty} u e^{-u} du.$$

Dieses Integral kann durch partielle Integration gelöst werden. Nach /Gradshteyn & Ryzhik 2007, 2.322.1/ erhält man

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = -e^{-\frac{x}{\sigma}} (\sigma + x) \Big|_0^{\infty}$$

und schließlich wegen  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{\sigma}}} = 0$

$$\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)} = \sigma. \tag{38}$$

Die durchschnittliche Abweichung  $\vartheta_{\mathcal{E}}^{\mathcal{L}(0,\sigma)}$  ist somit gleich dem Skalenparameter  $\sigma$  der Laplace-Verteilung.

## D SKALIERTE STUDENT-VERTEILUNG

Die Student-Verteilung (t-Verteilung) ist definiert als Verteilung der Zufallsvariablen  $\bar{Z}$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{\mathcal{X}}}{\sqrt{y/\nu}}$$

unter der Annahme, dass die Zufallsvariable  $\bar{\mathcal{X}}$  der Standardnormalverteilung  $\bar{\mathcal{X}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  und die Zufallsvariable  $\mathcal{Y}$  der Chi-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgraden  $\nu \in \mathbb{N}$  genügt. Die Zufallsvariablen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  seien stochastisch unabhängig.

Für unsere Untersuchungen ist eine skalierte Student-Verteilung interessant, wo die Zufallsvariable  $\mathcal{X}$  einer zentrierten Normalverteilung mit beliebiger Varianz  $\sigma$  genügt,  $\mathcal{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Wir betrachten also die Verteilung der der Zufallsvariablen  $\hat{Z}$

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{y/\nu}}. \tag{39}$$

Die Dichtefunktion  $f_{\mathcal{Z}}^{t(\sigma)}(x, r)$  ist festgelegt durch

$$f_{\mathcal{Z}}^{t(\sigma)}(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \tag{40}$$

wobei die Gamma-Funktion  $\Gamma$  durch die Rekursion  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  mit  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  definiert ist.

**Beweis:** Im Beweis folgen wir weitgehend der Ableitung in /Smirnow & Dunin-Barkowski 1973, S. 222 f.<sup>4</sup> und ersetzen die

standardnormalverteilte Zufallsvariable durch die zentrierte Form mit beliebiger Varianz  $\sigma$ .

Die Dichtefunktion für die Zufallsvariable  $\mathcal{X}$  ist definiert mit

$$f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

und die Dichtefunktion der Zufallsvariablen  $\mathcal{Y}$  mit

$$f_{\mathcal{Y}}^{\chi^2}(y) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} y^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}}$$

für  $y > 0$  und  $f_{\mathcal{Y}}^{\chi^2}(y) = 0$  für  $y \leq 0$ . Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  ergibt sich die gemeinsame Dichtefunktion aus dem Produkt der Einzeldichten:

$$f_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}(x, y) = f_{\mathcal{X}}^{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(x) f_{\mathcal{Y}}^{\chi^2}(y) = \frac{1}{\sigma} C e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 - \frac{y}{2}}$$

mit der Normierungskonstante

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}. \tag{41}$$

Die entsprechenden Intervallgrenzen der Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z)$  ergeben sich durch

$$\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z) = P\{\mathcal{Z} \leq z\} = P\left\{\frac{\mathcal{X}}{\sqrt{\frac{y}{\nu}}} \leq z\right\} = P\left\{\mathcal{X} \leq z\sqrt{\frac{y}{\nu}}\right\}.$$

Die Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z)$  ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z) &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{z\sqrt{\frac{y}{\nu}}} \frac{1}{\sigma} C e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 - \frac{y}{2}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sigma} C \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} \int_{-\infty}^{z\sqrt{\frac{y}{\nu}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2} dx dy. \end{aligned} \tag{42}$$

Die Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z)$  bildet die Stammfunktion der gesuchte Dichtefunktion  $f_{\mathcal{Z}}(z)$ . Durch Differenziation nach  $z$  der Verteilungsfunktion  $\mathcal{F}_{\mathcal{Z}}(z)$  ergibt sich die Dichtefunktion  $f_{\mathcal{Z}}(z) = \mathcal{F}'_{\mathcal{Z}}(z)$ . Differenziert man nun beide Seiten von Gl. (42) nach  $z$  und führt die Differenziation auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen durch, so folgt

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{Z}}(z) &= \frac{1}{\sigma} C \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{y}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z\sqrt{\frac{y}{\nu}}}{\sigma}\right)^2} \sqrt{\frac{y}{\nu}} dy \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\nu}} C \int_0^{\infty} y^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{y}{2}\left(1+\frac{z^2}{\nu\sigma^2}\right)} dy. \end{aligned}$$

Substituiert man nun

$$u = \frac{y}{2} \left(1 + \frac{z^2}{\nu\sigma^2}\right) \quad \frac{du}{dy} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z^2}{\nu\sigma^2}\right)$$

<sup>4</sup> Alternative Ableitungen sind in /Kreyszig 1998, S. 380 f./ oder /Korte 2015, S. 11 ff./ zu finden.

so erhält man

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\nu}} C \left(1 + \frac{z^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\nu+1}{2} \int_0^{\infty} u^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-u} du. \quad (43)$$

Aus der Definition  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$  /Gradshteyn & Ryzhik 2007, 8.310/ folgt zunächst

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-u} du = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$$

und somit kann Gl. (43) dargestellt werden durch

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\nu}} C \left(1 + \frac{z^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\nu+1}{2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right).$$

Setzen wir für die Konstante  $C$  nun Gl. (41) ein, so erhalten wir die Dichtefunktion  $f_Z^{t_\nu(\sigma)}(x)$  für die durch Gl. (39) definierten Zufallsvariable  $Z \sim t_\nu(\sigma)$ .

### D.1 Momente der skalierten Student-Verteilung

Die  $k$ -ten Momente der (Standard-)Student-Verteilung  $\mu_k^{t_\nu}$  können in einer geschlossenen Form

$$\mu_k^{t_\nu} = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k-1)}{\nu^{\frac{k}{2}} (\nu-2)(\nu-4)\dots(\nu-k)} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

für  $\nu > k$  angegeben werden /Abramowitz & Segun 1968, 26.7.2/<sup>5</sup>. Die Momente der skalierten Student-Verteilung  $\mu_k^{t_\nu(\sigma)}$  errechnen sich durch Auswertung der Definition der Momente

$$\mu_k^{t_\nu(\sigma)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_Z^{t_\nu(\sigma)}(x) dx.$$

Setzen wir für die Dichtefunktion  $f_Z^{t_\nu(\sigma)}(x)$  aus Gl. (40) ein, so ergibt sich

$$\mu_k^{t_\nu(\sigma)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx.$$

Durch Substitution von

$$\bar{x} = \frac{x}{\sigma} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

erhalten wir

$$\mu_k^{t_\nu(\sigma)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^k \bar{x}^k \frac{1}{\sigma} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \sigma d\bar{x}.$$

Ordnen wir nun die  $\sigma$  vor das Integral, so entspricht das verbleibende Integral exakt der Definition der Momente  $\mu_k^{t_\nu}$  der (Standard-) Student-Verteilung

$$\mu_k^{t_\nu(\sigma)} = \sigma^k \mu_k^{t_\nu}.$$

Somit ergeben sich die Momente der skalierten Student-Verteilung mit

$$\mu_k^{t_\nu(\sigma)} = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ \sigma^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k-1)}{\nu^{\frac{k}{2}} (\nu-2)(\nu-4)\dots(\nu-k)} & k \text{ gerade} \end{cases}$$

<sup>5</sup> Eine Ableitung dieser Zusammenhänge ist bei Korte zu finden /Korte 2015, S. 17 ff./.

für  $\nu > k$ . Das zweite Moment ist damit durch

$$\mu_2^{t_\nu(\sigma)} = \frac{\nu}{\nu-2} \sigma^2 \quad (44)$$

und das vierte Moment mit

$$\mu_4^{t_\nu(\sigma)} = \frac{3(\nu-2)}{\nu-4} \sigma^4 \quad (45)$$

festgelegt.

### D.2 Berechnung der durchschnittlichen Abweichung bei einer skalierten Student-Verteilung

Die durchschnittliche Abweichung  $\vartheta_\varepsilon$  bei einer symmetrischen Verteilung  $f_\varepsilon(x) = f_\varepsilon(-x)$  ist laut Tab. 1 definiert durch

$$\vartheta_\varepsilon := 2 \int_0^{\infty} x f_\varepsilon(x) dx.$$

Setzen wir nun die Dichtefunktion Gl. (40) für die skalierte Student-Verteilung ein, so ergibt sich

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = \frac{2}{\sigma} \bar{C} \int_0^{\infty} x \left(1 + \frac{x^2}{\nu\sigma^2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dx,$$

wobei  $\bar{C}$  den Faktor

$$\bar{C} := \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (46)$$

repräsentiert. Durch Substitution

$$u = 1 + \frac{x^2}{\nu\sigma^2} \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{\nu\sigma^2}$$

kann dies umgeformt werden zu

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = \frac{2}{\sigma} \bar{C} \int_0^{\infty} x u^{-\frac{\nu+1}{2}} \frac{\nu\sigma^2}{2x} du,$$

beziehungsweise

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = \nu\sigma \bar{C} \int_0^{\infty} u^{-\frac{\nu+1}{2}} du.$$

Durch Anwendung der Potenzregel kann das Integral gelöst werden

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = \nu\sigma \bar{C} \left. \frac{u^{-\frac{\nu+1}{2}}}{1 - \frac{\nu+1}{2}} \right|_0^{\infty} = \nu\sigma \bar{C} \left. \frac{u^{-\frac{\nu-1}{2}}}{-\frac{\nu-1}{2}} \right|_0^{\infty}.$$

Für  $\nu > 2$  konvergiert der Zähler für den oberen Wert gegen null und man erhält

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = 2\bar{C} \frac{\nu}{\nu-1} \sigma.$$

Wird  $\bar{C}$  aus G. (46) eingesetzt, errechnet sich die durchschnittliche Abweichung bei der skalierten Student-Verteilung mit

$$\vartheta_\varepsilon^{t_\nu(\sigma)} = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{\nu}{\nu-1} \sigma. \quad (47)$$

## LITERATUR

- Abramowitz, M.; Segun, I. (1968): Handbook of Mathematical Functions. 5. Auflage. Dover, New York.
- Brockmann, J. M.; Kargoll, B. (2012): Uncertainty assessment of some data-adaptive M-estimators. In: Sneeuw, N.; Novák, P.; Crespi, M.; Sansò, F. (Hrsg.): VII. Hotine-Marussi-Symposium, IAG Symposia. Lecture Notes in Earth Science, 137. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 87–92. doi:10.1007/978-3-642-22078-4\_13.
- DIN 18709-4 (2010): Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie. Beuth, Berlin.
- Dodge, Y.; Jurečková, J. (2000): Adaptive Regression. Springer, Berlin/Heidelberg/New York. doi:10.1007/978-1-4419-8766-2.
- Encke, J. (1832): Methode der kleinsten Quadrate. Berliner Astronomisches Jahrbuch, 59(1834), 249–312. <http://www.mdz-nbn-resolving.de/urn/resolver.pl?urn=nbn:de:bvb:12-bsb10538363-1>.
- Fuchs, H. (1982): Adjustment by minimizing the sum of absolute residuals. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, 258. München (Proceedings of the 6th International Symposium on Geodetic Network and Computations, 31.08.–05.09.1981).
- Gauss, C. F. (1816): Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. In: Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, I, 185 ff. Nachdruck: Gauss, C. F. (1887): Abhandlung zur Methode der kleinsten Quadrate. Stankiewicz, Berlin, 129–138.
- Gradshteyn, I.; Ryzhik, I. (2007): Table of Integrals, Series, and products. Academic Press, Cambridge, MA, USA.
- Helmert, F. R. (1872): Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente. Teubner, Leipzig.
- Helmert, F. R. (1875a): Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Zahl wahrer Beobachtungsfehler. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch), XX(1875)4, 300–303.
- Helmert, F. R. (1875b): Ueber die Formeln für den Durchschnittsfehler. In: Astronomische Nachrichten, 85(1875)22–23, 353–366. doi:10.1002/asna.18750852203.
- Helmert, F. R. (1876a): Die Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers directer Beobachtungen gleicher Genauigkeit. In: Astronomische Nachrichten, 88(1876)8–9, 113–131. doi:10.1002/asna.18760880802.
- Helmert, F. R. (1876b): Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit in Zusammenhänge stehende Fragen. In: Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXI(1876)3, 192–218.
- Helmert, F. R. (1877a): Die Bestimmung des Fehlergesetzes aus Beobachtungen auf graphischem Weg. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 6(1877), 22–26.
- Helmert, F. R. (1877b): Über den Maximalfehler einer Beobachtung. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 6(1877), 131–147.
- Helmert, F. R. (1877c): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt (Teil 1 von 2). In: Astronomische Nachrichten, 89(1877)2127, 241–246. doi:10.1002/asna.18770891502.
- Helmert, F. R. (1877d): Zur Bestimmung des Gewichts von Beobachtungen deren mittleres Fehlerquadrat sich aus mehreren Theilen zusammensetzt (Teil 2 von 2). In: Astronomische Nachrichten, 89(1877)2128, 241–246. doi:10.1002/asna.18770891602.
- Helmert, F. R. (1900): Antrittsrede des Hrn. Helmert. In: Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, (1900)XXXII, 698–704. <https://ia601401.us.archive.org/7/items/sitzungsberichte1900deut/sitzungsberichte1900deut.pdf>. Öffentliche Sitzung zur Feier des LEIBNIZischen Jahrestages, 28. Juni 1900. S. 699.
- Helmert, F. R. (1907): Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen auf die Geodäsie und die Theorie der Messinstrumente. 2. Auflage. Teubner, Leipzig.
- Koch, K. (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn. [http://www.igg.uni-bonn.de/tg/fileadmin/publication/media/buch97\\_format\\_neu.pdf](http://www.igg.uni-bonn.de/tg/fileadmin/publication/media/buch97_format_neu.pdf).
- Koch, K.; Kargoll, B. (2013): Expectation maximization algorithm for the variance-inflation model by applying the t-distribution. In: Journal of Applied Geodesy, 7(2013), 115–123.
- Korte, J. (2015): Das Gauß-Markov-Modell mit Student-t-verteiltern Beobachtungen. Bachelorarbeit, Professur für Theoretische Geodäsie, Universität Bonn.
- Kreyszig, E. (1998): Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.
- Schuh, W.-D. (1985): Transforming the L1-norm adjustment of a levelling network into a flow problem. In: Proceedings of the 7th International Symposium on Geodetic Computations, 18.06.–21.06.1985, Krakau, Polen, 385–409.
- Schuh, W.-D. (2006): Verallgemeinerter Median zur robusten Parameterschätzung. Vortrag, Geodätische Woche, 10.–12.10.2006, München. [http://ifn.bauw.unibw-muenchen.de/gw06/down/muenchen\\_06gw\\_schuh.pdf](http://ifn.bauw.unibw-muenchen.de/gw06/down/muenchen_06gw_schuh.pdf).
- Schuh, W.-D. (2017): Über die Ausgleichung bei „Überschüssigen Messungen und zufälligen Beobachtungen“ – auf den Spuren von Friedrich Robert Helmert. In: von Stillfried, I. (Hrsg.): Aufsätze zum „13. Dortmunder Symposium zur Vermessungsgeschichte – Friedrich Robert Helmert zum 100. Todestag“. Schriftenreihe des Förderkreis Vermessungstechnisches Museum e.V., Dortmund.
- Schuh, W.-D.; Brockmann, J.; Kargoll, B. (2015): Correlation analysis for long time series by robustly estimated autoregressive stochastic processes. EGU General Assembly 2015, Wien. <http://adsabs.harvard.edu/abs/2015EGUGA..1713050S>. Oral presentation (solicited), 17.04.2015.
- Sheynin, O. (1995): Helmert's Work in the Theory of Errors. In: Archive for History of Exact Sciences, 49(1995)1, 73–104.
- Smirnov, N.; Dunin-Barkowski, L. (1973): Mathematische Statistik in der Technik. 3. Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Prof. Dr. Wolf-Dieter Schuh

UNIVERSITÄT BONN  
INSTITUT FÜR GEODÄSIE  
UND GEOINFORMATION (IGG)

Nussallee 17 | 53115 Bonn  
schuh@geod.uni-bonn.de



Johannes Korte

UNIVERSITÄT BONN  
INSTITUT FÜR GEODÄSIE  
UND GEOINFORMATION (IGG)

Nussallee 17 | 53115 Bonn  
s6jokort@uni-bonn.de



Manuskript einrereicht: 03.03.2017 | Im Peer-Review-Verfahren begutachtet