Biegungsinvariante Flächen bez. der *r*-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) und die Loxodrome

Eberhard Mittermayer, Berlin

Es wird nachgewiesen, dass die im Netz geodätischer Parallelkoordinaten biegungsinvarianter Flächen auftretenden Orthogonaltrajektorien Loxodrome der Kugel sind. Damit kann die Loxodrome als Kreisbogen längentreu in die Ebene abgewickelt werden.

1 Einleitung

In dem eingeführten Koordinatensystem metrischer Kugelkoordinaten $P\,(r,\,\bar{y},\,\bar{z})$ (MITTERMAYER, 1998, S. 111 ff.), dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}\,(r,\bar{y},\bar{z}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r\tanh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ist der Punkt P im R^3 der geometrische Ort dreier biharmonischer Flächen

$$r = const. \quad [m] \quad (2)$$

$$\bar{y} = r \cdot l = const. \quad [m] \quad (3)$$

$$\bar{z} = r \cdot q = const. \quad [m] \quad (4)$$

mit der Mercator-Länge l

$$l = \lambda \quad (5)$$

und der Mercator-Breite q

$$q = \text{artanh}\,(\sinh \phi). \quad (6)$$

Anwendung des Laplace-Operators

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \quad (7)$$

auf die Ortsfunktionen (2) bis (4) ergeben folgende Poisson-Gleichungen

$$\Delta r = \frac{2}{r}\,, \quad \Delta\bar{y} = \frac{2l}{r}\,, \quad \Delta\bar{z} = \frac{2q}{r} \quad (8)$$

Die in den Poisson-Gleichungen (8) auftretenden Ortsfunktionen mit der Dimension $[m^{-1}]$ sind harmonisch, denn sie erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta\left(\frac{2}{r}\right) = 0\,, \quad \Delta\left(\frac{2l}{r}\right) = 0\,, \quad \Delta\left(\frac{2q}{r}\right) = 0\,. \quad (9)$$

Damit folgen die biharmonischen Differentialgleichungen

$$\Delta^2 r = 0\,, \quad \Delta^2\bar{y} = 0\,, \quad \Delta^2\bar{z} = 0 \quad ; \quad (10)$$

siehe in MITTERMAYER (1999e). Umfangreiche differentialgeometrische Betrachtungen der biharmonischen Flächen (3) und (4) siehe in MITTERMAYER (1999b), (1999c), (1999d), (2000a) und (2000b).

Als Schnitt der biharmonischen Flächen (3) und (4) erhalten wir die r-Linien ($\bar{y}$ = *const.*, $\bar{z}$ = *const.*) als Parameterlinien (Raumkurven/Spiralen) im Koordinatensystem metrischer Kugelkoordinaten, dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}\,(r) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r\sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r\tanh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \end{pmatrix} \quad (11)$$

für $r = [0,\,\infty]$; Projektionen dieser Raumkurven (11) siehe MITTERMAYER (1999a). Eine Gerade, die den Ortsvekor (11) enthält, also

$$\vec{g} = \mu \cdot \vec{X}\,(r) \quad \text{für} \quad \mu = [0,\infty]\,, \quad (12)$$

beschreibt in Abhängigkeit von r eine spiralförmige Kegelfläche, eine Torse. Die Abb. 1 zeigt als Erzeugende die Gerade (12) mit dem Ortsvektor der r-Linie ($\bar{y}$ = *const.*, $\bar{z}$ = *const.*), z. B. für

$$\boxed{\bar{y} = 50\,, \quad \bar{z} = 5} \quad (13)$$

$$\vec{X}\,(r) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\left(\frac{50}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r\sin\left(\frac{50}{r}\right) \Big/ \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r\tanh\left(\frac{5}{r}\right) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

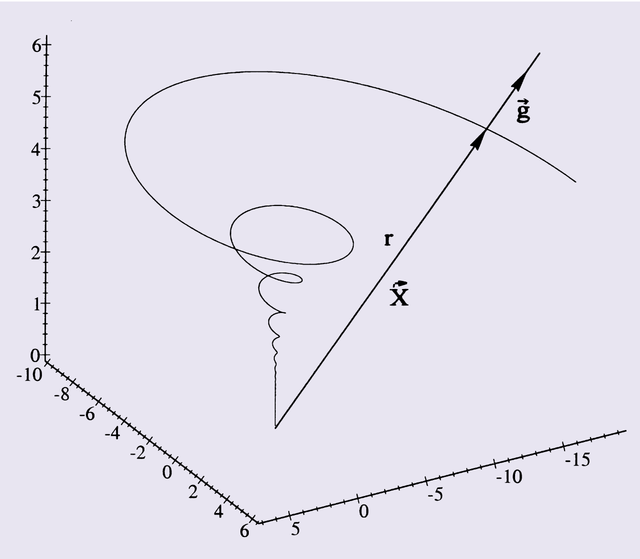

Abb. 1: Die Gerade $\vec{g}$ (r)

Mit der Einführung einer Parameterdarstellung der spiralförmigen Kegelfläche sind differentialgeometrische Betrachtungen im Sinne von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) möglich.

2 Der Ortsvektor

Aus (3) und (4) folgt der Quotient

$$H = \frac{\bar{z}}{\bar{y}} = \frac{q}{l} = a = const. \tag{15}$$

Wir erkennen einen linearen Zusammenhang zwischen der isothermen Mercator-Breite q und der isothermen Mercator-Länge l

$$q = a\,l\,. \tag{16}$$

Die hierbei auftretende Konstante a hat eine geometrische Deutung; siehe Formel (84). Mit der Beziehung (16), eingesetzt in den Ortsvektor isothermer Kugelkoordinaten $P\,(r, l, q)$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos l / \cosh q \\ r \sin l / \cosh q \\ r \tanh q \end{pmatrix} \tag{17}$$

(MITTERMAYER, 1998, S. 39 ff.) folgt eine Parameterdarstellung der Flächen $H = a = const.$ mit den Flächenparametern r, l

$$\vec{X}(r,l) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos l / \cosh(al) \\ r \sin l / \cosh(al) \\ r \tanh(al) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Als Beispiel betrachten wir die spiralförmige Kegelfläche

$$\boxed{H = a = 0.1}\,, \tag{19}$$

dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}(r,l) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos l / \cosh(0.1\ l) \\ r \sin l / \cosh(0.1\ l) \\ r \tanh(0.1\ l) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Die Abb. 2 zeigt diese spiralförmige Kegelfläche (20) in den Grenzen $0 \le r \le 15$ und $0 \le l \le 14\pi$.

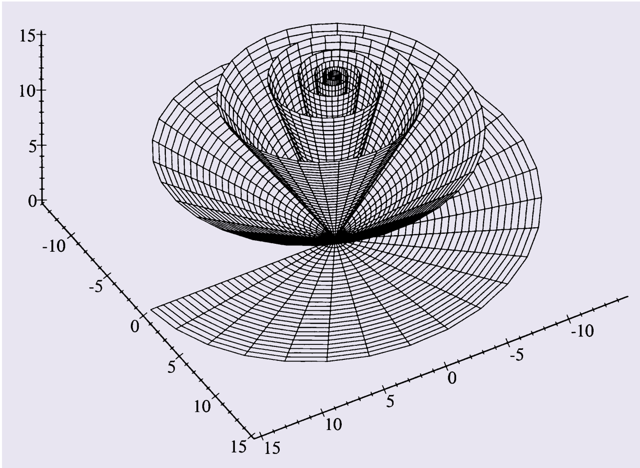

Abb. 2: Die spiralförmige Kegelfläche H = 0.1

3 Implizite und explizite Darstellung der Fläche *H = const.*

Mit den Ortsfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} q &= \operatorname{artanh}\left(\frac{z}{r}\right) \qquad (21)\\ l &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (22)\end{aligned}}$$

erhalten wir aus (15) die implizite Darstellung der Fläche

$$\boxed{H(x,y,z) = \frac{q(x,y,z)}{l(x,y,z)} = a = const.}\,, \tag{23}$$

die eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllt.

Anwendung des Laplace-Operators (7) auf die Ortsfunktion H (23)

$$H = \frac{q}{l} = \frac{\operatorname{artanh}\left(\frac{z}{r}\right)}{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)} \tag{24}$$

ergibt folgende Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta H = \Delta\left(\frac{q}{l}\right) = 2\,\frac{q}{l^3}\,\left|\operatorname{grad}\, l\right|^2} \tag{25}$$

mit

$$\left|\operatorname{grad}\, l\right|^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\ ; \tag{26}$$

siehe hierzu das Programm in Mathematica:

```
In[1]:= r = Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]
        l = ArcTan[y / x]
        q = ArcTanh[z / r]
        f = q / l
        fxx = D[D[f, x], x];
        fyy = D[D[f, y], y];
        fzz = D[D[f, z], z];
        Simplify[fxx + fyy + fzz]
```

$$\text{Out[1]=}\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\text{Out[2]=}\ \text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]$$

$$\text{Out[3]=}\ \text{ArcTanh}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$\text{Out[4]=}\ \frac{\text{ArcTanh}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]}{\text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]}$$

$$\text{Out[5]=}\ \frac{2\,\text{ArcTanh}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]}{(x^2+y^2)\,\text{ArcTan}\left[\frac{y}{x}\right]^3}\ .$$

Beweis:

Wir bilden den Gradienten

$$\text{grad}\ H = \frac{1}{l}\ \text{grad}\ q - \frac{q}{l^2}\ \text{grad}\ l \tag{27}$$

und erhalten

$\Delta H = \text{div grad}\ H,$ (28)

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta H = \ & \frac{1}{l}\,\Delta q + \left\langle \text{grad}\ q,\ \text{grad}\left(\frac{1}{l}\right)\right\rangle - \\ & - \frac{q}{l^2}\,\Delta l - \left\langle \text{grad}\ l,\ \text{grad}\left(\frac{q}{l^2}\right)\right\rangle\end{aligned}}\ . \tag{29}$$

Mit den Laplace-Gleichungen

$\Delta q = 0, \quad \Delta l = 0$ (30)

folgt das 1. Zwischenergebnis

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta H = \ & \left\langle \text{grad}\ q,\ \text{grad}\left(\frac{1}{l}\right)\right\rangle - \\ & - \left\langle \text{grad}\ l,\ \text{grad}\left(\frac{q}{l^2}\right)\right\rangle\end{aligned}}\ . \tag{31}$$

Mit dem Gradienten

$$\text{grad}\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{1}{l^2}\ \text{grad}\ l \tag{32}$$

und dem Skalarprodukt

$$\left\langle \text{grad}\ q,\ \text{grad}\ l\right\rangle = 0 \tag{33}$$

folgt

$$\left\langle \text{grad}\ q,\ \text{grad}\left(\frac{1}{l}\right)\right\rangle = -\frac{1}{l^2}\left\langle \text{grad}\ q,\ \text{grad}\ l\right\rangle = 0 \tag{34}$$

und damit das 2. Zwischenergebnis

$$\boxed{\Delta H = -\left\langle \text{grad}\ l,\ \text{grad}\left(\frac{q}{l^2}\right)\right\rangle}\ . \tag{35}$$

Mit dem Gradienten

$$\text{grad}\left(\frac{q}{l^2}\right) = \frac{1}{l^2}\ \text{grad}\ q - 2\,\frac{q}{l^3}\ \text{grad}\ l \tag{36}$$

folgt das 3. Zwischenergebnis

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta H = \ & -\frac{1}{l^2}\left\langle \text{grad}\ l,\ \text{grad}\ q\right\rangle + \\ & + 2\,\frac{q}{l^3}\left\langle \text{grad}\ l,\ \text{grad}\ l\right\rangle\end{aligned}} \tag{37}$$

und im Weiteren mit (33) als Ergebnis die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta H = \Delta\left(\frac{q}{l}\right) = 2\,\frac{q}{l^3}\,\left|\ \text{grad}\ l\ \right|^2}\quad \text{q.e.d.} \tag{38}$$

Grundlagen siehe in MITTERMAYER (1998, 1999e).

Anwendung des Laplace-Operators (7) auf die zu H (24) inverse Funktion

$$\frac{1}{H} = \frac{l}{q} = \frac{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\text{artanh}\left(\frac{z}{r}\right)} = \frac{1}{a} = a' = const. \tag{39}$$

ergibt die Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{H}\right) = \Delta\left(\frac{l}{q}\right) = 2\,\frac{l}{q^3}\,\left|\ \text{grad}\ q\ \right|^2} \tag{40}$$

mit

$$\left|\ \text{grad}\ q\ \right|^2 = \left|\ \text{grad}\ l\ \right|^2 = \frac{1}{x^2+y^2}\ . \tag{41}$$

Der Beweis erfolgt analog zu (38). Damit erhalten wir aus (25) und (40) die Beziehung

$$\Delta H = H^4 \cdot \Delta\left(\frac{1}{H}\right). \tag{42}$$

Wie lautet die explizite Darstellung der spiralförmigen Kegelfläche?

Mit den Beziehungen

$\tan\phi = \sinh q$ (43)

und

$$\tan\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{44}$$

folgt eine weitere Darstellung der Mercator-Breite q als Ortsfunktion kartesischer Koordinaten

$$q = \text{arsinh}\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ . \tag{45}$$

Wir erhalten mit (16), (22) und (45)

$$\text{arsinh}\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = a\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm 2k\pi\right], \tag{46}$$

aufgelöst nach z die gesuchte explizite Darstellung

$$\boxed{\begin{aligned} z &= f(x,y) \\ z &= \sqrt{x^2+y^2}\ \sinh\left\{a\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \pm 2k\pi\right]\right\}\end{aligned}}\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{47}$$

4 Die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art

Gegeben ist der Ortsvektor (18) der Fläche $H = a = const. \neq 0$ mit den Flächenparametern r, l

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x(r,l) = r\cos l / \cosh(al) \\ y &= y(r,l) = r\sin l / \cosh(al) \\ z &= z(r,l) = r\tanh(al) \end{aligned}} \tag{48}$$

Für das Linienelement im Quadrat ds^2 gilt die quadratische Form

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix} \tag{49}$$

mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art E, F, G. Ausgehend von den Tangentenvektoren

a) an die r-Linie ($l = const.$) (Gerade)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial r \\ \partial y / \partial r \\ \partial z / \partial r \end{pmatrix} \tag{50}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \frac{\cos l}{\cosh(al)} \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \frac{\sin l}{\cosh(al)} \\ \frac{\partial z}{\partial r} &= \tanh(al) \end{aligned}}$$

b) an die l-Linie ($r = const.$) (Spirale, ebenso in der Kugelfläche $r = const.$ liegend)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial l} = \begin{pmatrix} \partial x / \partial l \\ \partial y / \partial l \\ \partial z / \partial l \end{pmatrix} \tag{51}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} &= -\frac{r\sin l}{\cosh(al)} - \frac{ar\cos l \sinh(al)}{\cosh^2(al)} \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= \frac{r\cos l}{\cosh(al)} - \frac{ar\sin l \sinh(al)}{\cosh^2(al)} \\ \frac{\partial z}{\partial l} &= \frac{ar}{\cosh^2(al)} \end{aligned}}$$

erhalten wir die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art als Skalarprodukte der Tangentenvektoren (50) und (51)

$$E = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \right\rangle = 1 \tag{52}$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial l} \right\rangle = 0 \tag{53}$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial l}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial l} \right\rangle = \frac{(1+a^2)\, r^2}{\cosh^2(al)} \tag{54}$$

und damit das Linienelement im Quadrat, die quadratische Form

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{(1+a^2)\, r^2}{\cosh^2(al)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dl \end{pmatrix}, \tag{55}$$

ausführlich

$$\boxed{ds^2 = dr^2 + \frac{(1+a^2)\, r^2}{\cosh^2(al)}\, dl^2} \;. \tag{56}$$

Mit den Gaußschen Fundamentalgrößen

$E = 1$ und $F = 0$ (57)

erkennen wir in den Parameterlinien $r = const.$ und $l = const.$ ein Netz geodätischer Parallelkoordinaten.

Betrachten wir nunmehr die Bogenlänge s

a) längs der r-Linie ($l = const.$) (Gerade/geodätische Linie):

Für l = const. ($dl = 0$) folgt aus (56) das Linienelement

$ds = dr$, (58)

also

$s = r$; (59)

d. h. der Parameter r ist die Bogenlänge s.

b) längs der l-Linie ($r = const.$) (Spirale):

Für $r = const.$ ($dr = 0$) folgt aus (56) das Linienelement

$$ds = \frac{\sqrt{1+a^2}\; r}{\cosh(al)}\, dl \tag{60}$$

und damit die Bogenlänge

$$s = \sqrt{1+a^2}\; r \int \frac{dl}{\cosh(al)} \;; \tag{61}$$

siehe hierzu Abb. 3

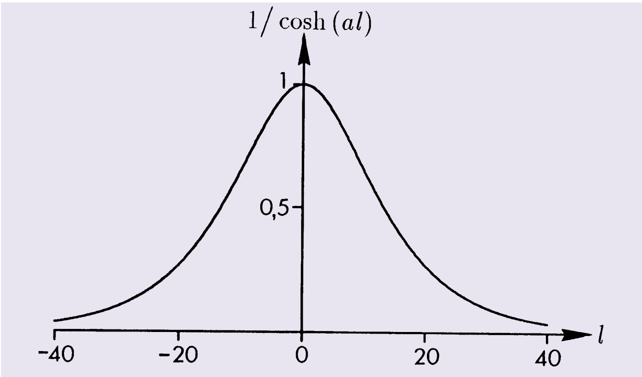

Abb. 3: Die Glockenkurve für a = 0.1

Wir erhalten die Bogenlänge s als Funktion von l

$$\boxed{s(l) = \frac{r}{a}\sqrt{1+a^2}\arctan\left[\sinh(al)\right]}\,. \tag{62}$$

Für $l = 0$ gilt $s = 0$. Die Bogenlänge s der l-Linie ($r = const.$) in den Grenzen $l = [-\infty, \infty]$, also zwischen dem Südpol und dem Nordpol, folgt aus (62)

$$\boxed{s = r\pi\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}}\,. \tag{63}$$

Betrachten wir im Weiteren die Oberfläche der Fläche $H = a = const.$ Es gilt das Oberflächenelement

$$dO = W dr dl \tag{64}$$

mit der differentialgeometrischen Größe

$$W = \sqrt{EG - F^2}\,. \tag{65}$$

Wir erhalten mit

$$W = \frac{r\sqrt{1+a^2}}{\cosh(al)} \tag{66}$$

die Oberfläche der spiralförmigen Kegelfläche als Doppelintegral in den Grenzen $r = [0, R]$ und $l = [0, \infty]$

$$O = \sqrt{1+a^2}\int_{l=0}^{\infty}\int_{r=0}^{r=R}\frac{r}{\cosh(al)}\,dr\,dl, \tag{67}$$

$$O = \sqrt{1+a^2}\,\frac{R^2}{2}\int_{l=0}^{\infty}\frac{1}{\cosh(al)}\,dl, \tag{68}$$

$$O = \frac{R^2}{2a}\sqrt{1+a^2}\ \arctan\left[\sinh(al)\right]\Big|_0^{\infty}; \tag{69}$$

mit dem Ergebnis

$$\boxed{O = \frac{R^2\pi}{4a}\sqrt{1+a^2}}\,. \tag{70}$$

4.1 Die Parameterlinien

Betrachten wir bezüglich der spiralförmigen Kegelfläche $H = a = const.$ die Parameterlinien, nämlich

a) die r-Linien ($l = const.$) (geodätische Linien)

Aus dem Ortsvektor (18) folgt für $l = const.$ die r-Linie

$$\vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos l/\cosh(al) \\ r\sin l/\cosh(al) \\ r\tanh(al) \end{pmatrix}, \tag{71}$$

eine Gerade. Mit

$$p = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{r}{\cosh(al)} \tag{72}$$

und

$$z = r\tanh(al) \tag{73}$$

folgt die Steigung der Geraden als Funktion von l

$$\boxed{\tan\phi(l) = \frac{p}{z} = \sinh(al)}\,. \tag{74}$$

Wir erkennen die Grenzwerte des Winkels ϕ

$$\lim_{l\to\infty}\phi(l) = \frac{\pi}{2}\quad,\quad \lim_{l\to-\infty}\phi(l) = -\frac{\pi}{2}\quad; \tag{75}$$

siehe hierzu Abb. 4 für $a = 0.1$.

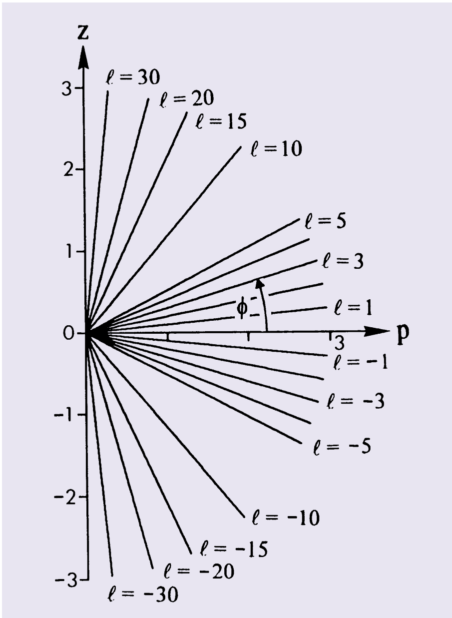

Abb. 4: Die r-Linien l = const.

b) die l-Linien ($r = const.$) (Orthogonaltrajektorien)

Aus dem Ortsvektor (18) folgt für $r = const.$ die l-Linie

$$\vec{X}(l) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos l/\cosh(al) \\ r\sin l/\cosh(al) \\ r\tanh(al) \end{pmatrix}; \tag{76}$$

eine Spirale. Die Abb. 5 zeigt die l-Linie $r = 3$ bez. $a = 0.05$ in den Grenzen $l = [-50, 50]$.

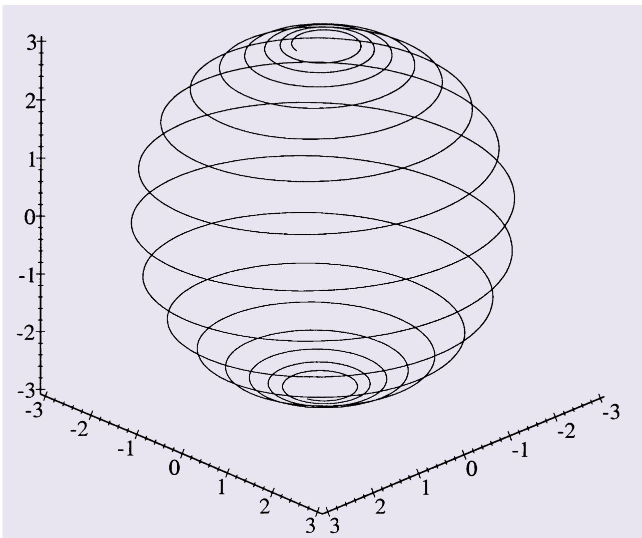

Abb. 5: Die l-Linie r = 3

Die Abb. 6 zeigt die *l*-Linie $r = 3$ bez. $a = 0.01$ in den Grenzen $l = [-400, 400]$.

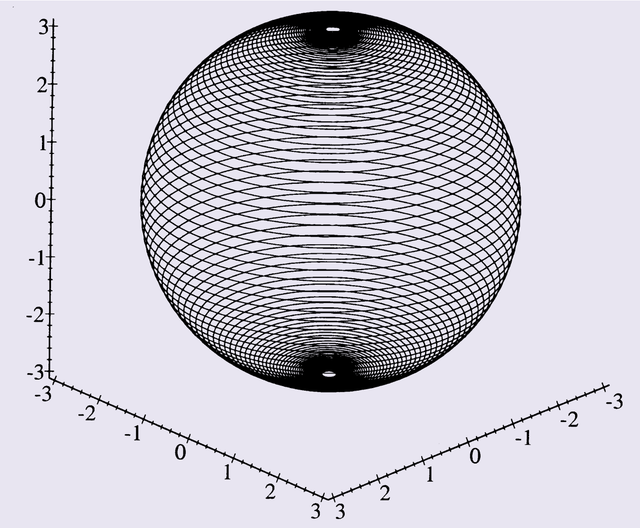

Abb. 6: Die l-Linie r = 3

Aufgrund der Definition der *l*-Linie ($r = const.$) erkennen wir, dass diese Linie ebenso in der Kugelfläche $r = const.$ liegt. Als Beispiel betrachte man in der Abb. 7 die *l*-Linie $r = 3$ für $a = 0.1$.

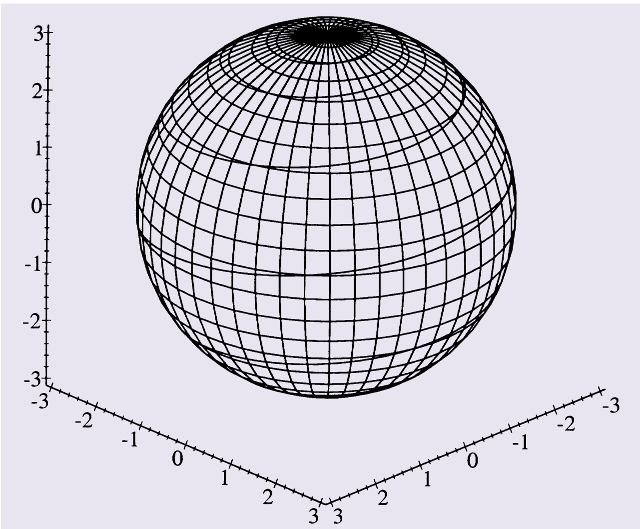

Abb. 7: Die l-Linie r = 3

Von Interesse ist der Winkel α zwischen der *l*-Linie und dem Meridian in P der Kugel $r = const.$; Abb. 8.

Der Tangentenverkehr an die *l*-Linie ($r = const.$) liegt vor (51). Der Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_3$ an den Meridian in $P(x, y, z)$ in der Darstellung kartesischer Koordinaten lautet

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad (77)$$

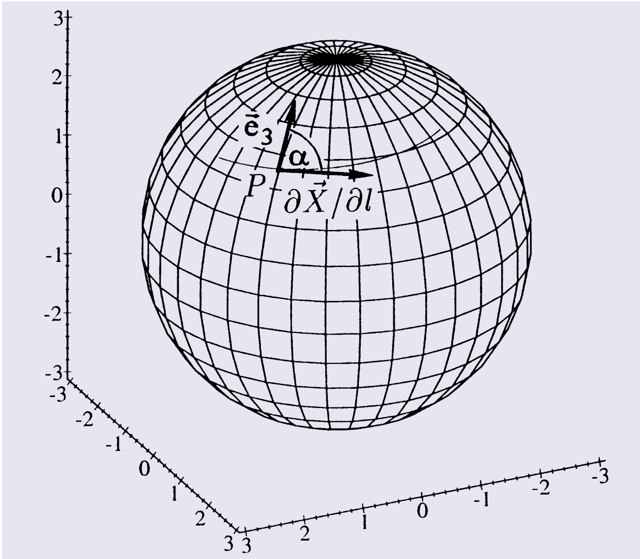

Abb. 8: Zum Winkel α der l-Linie r = const.

eine Komponente des eingeführten orientierten begleitenden Dreibeins ($\vec{e}_1, \vec{e}_2\ \vec{e}_3$) (Zenit, Osten, Norden), definiert durch eine einzige Ortsfunktion $F(x, y, z)$; siehe hierzu MITTERMAYER (1998, S. 333, S. 446) und in MITTERMAYER (1998a).

Einsetzen des Ortsvektors der *l*-Linie (76) in (77) ergibt den Tangenteneinheitsvektor an den Meridian n als Funktion von *l*

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -\cos l \tanh(al) \\ -\sin l \tanh(al) \\ 1/\cosh(al) \end{pmatrix}. \qquad (78)$$

Wir erhalten den Winkel α aus

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \dfrac{\partial\vec{X}}{\partial l}, \vec{e}_3 \right\rangle}{\left| \dfrac{\partial\vec{X}}{\partial l} \right|}. \qquad (79)$$

Als Zwischenergebnis folgt mit den Vektoren (51) und (78) das Skalarprodukt

$$\left\langle \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}, \vec{e}_3 \right\rangle = \frac{ar}{\cosh(al)}. \qquad (80)$$

Mit dem Betrag des Tangentenvektors an die *l*-Linie aus (54)

$$\left| \frac{\partial\vec{X}}{\partial l} \right| = \sqrt{G} = \frac{\sqrt{1+a^2}\, r}{\cosh(al)} \qquad (81)$$

erhalten wir das Ergebnis

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = const.}, \qquad (82)$$

eine Konstante. Damit ist der Winkel α zwischen der *l*-Linie ($r = const.$) und den Meridianen konstant, die Definition der Loxodrome.

Aus (82) folgt eine weitere Formel

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\ , \tag{83}$$

im Weiteren

$$\boxed{\cot\alpha \ = \ a}\ . \tag{84}$$

Im betrachteten Beispiel $a = 0.1$ ist der Winkel α

$\alpha = 84°\ \ 17'\ \ 21.''8647$.

In den Tabellen Tab. 1 und Tab. 2 sind bezüglich der l-Linie ($r = 3\ m$) (Loxodrome) in Abhängigkeit von a angegeben:

a) der Winkel α zwischen der Loxodrome und dem Meridian (84)

$$\alpha\,(a) = \mathrm{arccot}\,(a) \tag{85}$$

b) der Abstand Δz der Loxodrome in den Grenzen $l = [0,2\pi]$ aus (73)

$$\Delta z = r\tanh\,(2a\pi) \tag{86}$$

c) die Bogenlänge s der Loxodrome zwischen dem Südpol und dem Nordpol (63)

$$s = r\pi\,\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$$

mit den Grenzwerten für $a \to 0$ (Tab. 1)

$$\lim_{a\to 0}\alpha\,(a) \ = \ \frac{\pi}{2}\ , \tag{87}$$

$$\lim_{a\to 0}\Delta z\,(a) \ = \ 0\ , \tag{88}$$

$$\lim_{a\to 0}s\,(a) \ = \ \infty\ , \tag{89}$$

bzw. mit den Grenzwerten für $a \to \infty$ (Tab. 2)

$$\lim_{a\to\infty}\alpha\,(a) \ = \ 0\ , \tag{90}$$

$$\lim_{a\to\infty}\Delta z\,(a) \ = \ r \ = \ 3\ m \tag{91}$$

$$\lim_{a\to\infty}s\,(a) = r\pi =$$

$$= 9.424\ 777\ 960\ 769\ 380\ m\ . \tag{92}$$

Tab. 1: Grenzwerte für a → 0

a	$\alpha(a)$	$\Delta z(a)$ [m]	$s(a)$ [m]
$1\cdot10^{-1}$	84° 17′ 21.″8647 0500 1287	1.670 679 920 700 692	$9.471785\cdot10^{+01}$
$5\cdot10^{-2}$	87° 8′ 15.″3411 8599 7709	0.912 648 578 660 294	$1.887310\cdot10^{+02}$
$1\cdot10^{-2}$	89° 25′ 37.″4206 8833 9451	0.188 247 900 092 222	$9.425249\cdot10^{+02}$
$1\cdot10^{-3}$	89° 56′ 33.″7352 6260 7798	0.018 849 307 875 242	$9.424783\cdot10^{+03}$
$1\cdot10^{-4}$	89° 59′ 39.″3735 1944 4045	0.001 884 955 344 104	$9.424778\cdot10^{+04}$
$1\cdot10^{-5}$	89° 59′ 57.″9373 5193 7598	0.000 188 495 558 967	$9.424778\cdot10^{+05}$
$1\cdot10^{-6}$	89° 59′ 59.″7937 3519 3753	0.000 018 849 555 921	$9.424778\cdot10^{+06}$
$1\cdot10^{-7}$	89° 59′ 59.″9793 7351 9375	0.000 001 884 955 592	$9.424778\cdot10^{+07}$
$1\cdot10^{-8}$	89° 59′ 59.″9979 3735 1938	0.000 000 188 495 559	$9.424778\cdot10^{+08}$
$1\cdot10^{-9}$	89° 59′ 59.″9997 9373 5194	0.000 000 018 849 556	$9.424778\cdot10^{+09}$
$1\cdot10^{-10}$	89° 59′ 59.″9999 7937 3519	0.000 000 001 884 956	$9.424778\cdot10^{+10}$
$1\cdot10^{-11}$	89° 59′ 59.″9999 9793 7352	0.000 000 000 188 496	$9.424778\cdot10^{+11}$
$1\cdot10^{-12}$	89° 59′ 59.″9999 9979 3735	0.000 000 000 018 850	$9.424778\cdot10^{+12}$
$1\cdot10^{-13}$	89° 59′ 59.″9999 9997 9374	0.000 000 000 001 885	$9.424778\cdot10^{+13}$
$1\cdot10^{-14}$	89° 59′ 59.″9999 9999 7937	0.000 000 000 000 188	$9.424778\cdot10^{+14}$
$1\cdot10^{-15}$	89° 59′ 59.″9999 9999 9794	0.000 000 000 000 019	$9.424778\cdot10^{+15}$
$1\cdot10^{-16}$	89° 59′ 59.″9999 9999 9979	0.000 000 000 000 002	$9.424778\cdot10^{+16}$

Tab. 2: Grenzwerte für a → ∞

a	$\alpha(a)$	$\Delta z(a)$ [m]	$s(a)$ [m]
$1\cdot10^{-1}$	84° 17′ 21.″8647	1.670 679 920 700 692	94.717 846 262 413 648
$2\cdot10^{-1}$	78° 41′ 24.″2431	2.550 402 971 765 818	48.067 126 788 242 281
$3\cdot10^{-1}$	73° 18′ 2.″7206	2.864 792 425 812 684	32.799 190 229 619 086
$5\cdot10^{-1}$	63° 26′ 5.″8158	2.988 816 228 662 260	21.074 444 193 122 179
$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	60° 0′ 0.″0000	2.995 764 035 497 027	18.849 555 921 538 759
1	45° 0′ 0.″0000	2.999 979 076 018 832	13.328 648 814 475 099
$\sqrt{3}$	30° 0′ 0.″0000	2.999 999 997 884 200	10.882 796 185 405 807
2	26° 33′ 54.″1842	2.999 999 999 927 081	10.537 222 096 561 090
3	18° 26′ 5.″8158	3.000 000 000 000 000	9.934 588 265 796 101
$1\cdot10^{1}$	5° 42′ 38.″1363	3.000 000 000 000 000	9.471 784 626 241 865
$1\cdot10^{2}$	0° 34′ 22.″5793	3.000 000 000 000 000	9.425 249 187 837 035
$1\cdot10^{3}$	0° 3′ 26.″2647	3.000 000 000 000 000	9.424 782 673 157 182
$1\cdot10^{4}$	0° 0′ 20.″6265	3.000 000 000 000 000	9.424 778 007 893 269
$1\cdot10^{5}$	0° 0′ 2.″0626	3.000 000 000 000 000	9.424 777 961 240 619
$1\cdot10^{6}$	0° 0′ 0.″2063	3.000 000 000 000 000	9.424 777 960 774 092
$1\cdot10^{7}$	0° 0′ 0.″0206	3.000 000 000 000 000	9.424 777 960 769 427
$1\cdot10^{8}$	0° 0′ 0.″0021	3.000 000 000 000 000	9.424 777 960 769 380
$1\cdot10^{9}$	0° 0′ 0.″0002	3.000 000 000 000 000	9.424 777 960 769 380

5 Die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art

Wir bilden die zweiten partiellen Ableitungen des Ortsvektors (18)

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial r^2 \\ \partial^2 y/\partial r^2 \\ \partial^2 z/\partial r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{93}$$

und

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial l} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial r\partial l \\ \partial^2 y/\partial r\partial l \\ \partial^2 z/\partial r\partial l \end{pmatrix} \tag{94}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial l} &= -\frac{\sin l}{\cosh\,(al)} - \frac{a\cos l\sinh\,(al)}{\cosh^2\,(al)} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial l} &= \frac{\cos l}{\cosh\,(al)} - \frac{a\sin l\sinh\,(al)}{\cosh^2\,(al)} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial l} &= \frac{a}{\cosh^2\,(al)} \end{aligned}}$$

sowie

$$\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2} = \begin{pmatrix} \partial^2 x/\partial l^2 \\ \partial^2 y/\partial l^2 \\ \partial^2 z/\partial l^2 \end{pmatrix} \tag{95}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial l^2} &= -\frac{r\cos l}{\cosh(al)} - \frac{a^2 r\cos l}{\cosh^3(al)} + \\ &+ \frac{2ar\sin l\sinh(al)}{\cosh^2(al)} + \\ &+ \frac{a^2 r\cos l\sinh^2(al)}{\cosh^3(al)} \quad [m] \\ \frac{\partial^2 y}{\partial l^2} &= -\frac{r\sin l}{\cosh(al)} - \frac{a^2 r\sin l}{\cosh^3(al)} - \\ &- \frac{2ar\cos l\sinh(al)}{\cosh^2(al)} + \\ &+ \frac{a^2 r\sin l\sinh^2(al)}{\cosh^3(al)} \quad [m] \\ \frac{\partial^2 z}{\partial l^2} &= -\frac{2a^2 r\sinh(al)}{\cosh^3(al)} \quad [m] \end{aligned}} .$$

Die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art L, M, N folgen aus

$$L = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right) \tag{96}$$

$$M = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial l}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right) \tag{97}$$

$$N = \frac{1}{W}\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right). \tag{98}$$

Mit den Volumenprodukten

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r^2}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right) = 0 \tag{99}$$

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial r\partial l}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right) = 0 \tag{100}$$

$$\left(\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial r}\ \frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right) = \frac{(1+a^2)\,r^2\sinh(al)}{\cosh^3(al)} \tag{101}$$

und der Größe W (66) erhalten wir als Ergebnis die Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art

$$\boxed{\begin{aligned} L &= 0 \\ M &= 0 \\ N &= \frac{\sqrt{1+a^2}\ r\sinh(al)}{\cosh^2(al)} \quad [m] \end{aligned}} . \tag{102}$$

Mit den Gaußschen Fundamentalgrößen

$F = 0$ und $M = 0$ (103)

erkennen wir in den Parametern $r = const.$ und $l = const.$ Hauptkrümmungslinien.

6 Die Gaußsche Krümmung *K*

Da die Parameterlinien $r = const.$ (l-Linien) (Spiralen) und $l = const.$ (r-Linien) (Geraden) der Fläche $H = const.$ Hauptkrümmungslinien sind, folgt die Gaußsche Krümmung aus

$$K = \frac{L}{E}\cdot\frac{N}{G} \tag{104}$$

mit dem Ergebnis

$K = 0;$ (105)

d. h. diese spiralförmige Kegelfläche $H = a = const.$ kann ohne Verzerrungen in die Ebene abgewickelt werden, eine biegungsinvariante Fläche.

Im Weiteren erhalten wir die Hauptkrümmungen (Normalkrümmungen)

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{L}{E} = 0 \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{N}{G} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\sinh(al)}{\sqrt{1+a^2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \end{aligned}} . \tag{106}$$

Mit der expliziten Darstellung der spiralförmigen Kegelfläche $H = const.$ (47) erhalten wir die Gaußsche Krümmung aus der Formel

$$K = \frac{f_{xx}\,f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^2} \quad \left[\frac{1}{m^2}\right]. \tag{107}$$

Mit den zweiten partiellen Ableitungen

$$\boxed{\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{(1+a^2)\,y^2\sinh\left\{a\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\pm 2k\pi\right]\right\}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ f_{yy} &= \frac{(1+a^2)\,x^2\sinh\left\{a\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\pm 2k\pi\right]\right\}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ f_{xy} &= -\frac{(1+a^2)\,xy\sinh\left\{a\left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\pm 2k\pi\right]\right\}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \end{aligned}}$$

folgt

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0 \tag{108}$$

und damit als Ergebnis die erwartete Gaußsche Krümmung

$K = 0.$ (109)

7 Die Krümmung der *l*-Linien (Loxodromen)

Die Krümmung κ der *l*-Linien (*r* = *const.*) mit *H* = *a* = *const.* folgt aus der allgemeinen Formel

$$\kappa = \frac{\left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial l} \times \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\right|}{\left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\right|^3} . \tag{110}$$

Mit den ersten und zweiten partiellen Ableitungen des Ortsvektors (51) und (95) folgt das Vektorprodukt

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial l} \times \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2} = \frac{(1+a^2)\,r^2}{\cosh^3(al)} \begin{pmatrix} a\sin l \\ -\,a\cos l \\ \cosh(al) \end{pmatrix} \tag{111}$$

und im Weiteren der Betrag

$$\left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial l} \times \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\right| = \frac{(1+a^2)\,r^2\sqrt{a^2+\cosh^2(al)}}{\cosh^3(al)} . \tag{112}$$

Mit (112) und dem Betrag des Tangentenvektors an die *l*-Linie (81) folgt gemäß (110) die Rechenformel für die Krümmung der *l*-Linien (*r* = *const.*) (Loxodromen) für *H* = *a* = *const.* ≠ 0

$$\boxed{\kappa(l) = \frac{1}{r}\cdot\frac{\sqrt{a^2+\cosh^2(al)}}{\sqrt{1+a^2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right]} , \tag{113}$$

im Weiteren der Krümmungshalbmesser

$$\rho(l) = \frac{1}{\kappa} = \frac{\sqrt{1+a^2}\;r}{\sqrt{a^2+\cosh^2(al)}} \quad [m] \tag{114}$$

Für *l* = 0 folgt der Krümmungshalbmesser

$$\rho(0) = r \tag{115}$$

und für $l \to \pm\infty$ der Grenzwert

$$\lim_{l\to\pm\infty} \rho(l) = 0 . \tag{116}$$

Die Abb. 9 zeigt den Krümmungshalbmesser ρ der *l*-Linie *r* = 2 für *H* = *a* = 0.1, eine Glockenkurve.

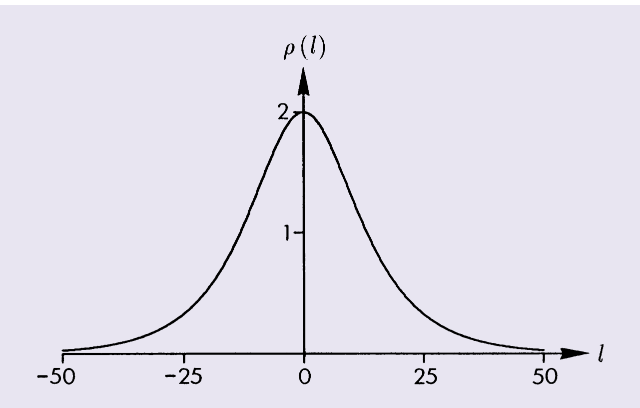

Abb. 9: Der Krümmungshalbmesser ρ (l)

Mit der Normalkrümmung κ_n (106)

$$\kappa_n = \frac{1}{R_2} \tag{117}$$

und der Krümmung κ (113) der *l*-Linien (*r* = *const.*) bez. der biegungsinvarianten Flächen *H* = *a* = *const.* erhalten wir die geodätische Krümmung κ_g der *l*-Linien aus der Beziehung

$$\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2 \tag{118}$$

mit dem Ergebnis

$$\kappa_g = \frac{1}{r} , \tag{119}$$

ebenso aus den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art *E* (52) und *G* (54)

$$\kappa_g = \frac{G_r}{2\sqrt{EG}} = \frac{1}{r} . \tag{120}$$

Wir erhalten den geodätischen Krümmungshalbmesser

$$\rho_g = \frac{1}{\kappa_g} = r ; \tag{121}$$

d. h. mit der Abwicklung der biegungsinvarianten spiralförmigen Kegelflächen *H* = *a* = *const.* in die (*x*, *y*)-Ebene gehen die *l*-Linien (*r* = *const.*) (Loxodromen) in Kreisbögen mit dem geodätischen Krümmungshalbmesser *r* (121) über. Damit ist das Problem der längentreuen Abwicklung der Loxodrome als Kreisbogen in die Ebene gelöst.

8 Die Windung der *l*-Linien (Loxodromen)

Die Windung τ der *l*-Linien (*r* = *const.*) für *H* = *a* = *const.* folgt aus der Formel

$$\tau = \frac{\left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\;\frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\;\frac{\partial^3\vec{X}}{\partial l^3}\right)}{\left|\frac{\partial\vec{X}}{\partial l} \times \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\right|^2} ; \tag{122}$$

Mit der dritten Ableitung des Ortsvektors

$$\frac{\partial^3\vec{X}}{\partial l^3} = \begin{pmatrix} \partial^3 x/\partial l^3 \\ \partial^3 y/\partial l^3 \\ \partial^3 z/\partial l^3 \end{pmatrix} \tag{123}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial^3 x}{\partial l^3} = {} & \frac{r\sin l}{\cosh(al)} + \frac{3a^2 r\sin l}{\cosh^3(al)} + \\ & + \frac{3ar\cos l\sinh(al)}{\cosh^2(al)} + \frac{5a^3 r\cos l\sinh(al)}{\cosh^4(al)} - \\ & - \frac{3a^2 r\sin l\sinh^2(al)}{\cosh^3(al)} - \frac{a^3 r\cos l\sinh^3(al)}{\cosh^4(al)} \end{aligned}}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial l^3} = -\frac{r\cos l}{\cosh(al)} - \frac{3a^2 r\cos l}{\cosh^3(al)} + \\ + \frac{3ar\sin l\sinh(al)}{\cosh^2(al)} + \frac{5a^3 r\sin l\sinh(al)}{\cosh^4(al)} + \\ + \frac{3a^2 r\cos l\sinh^2(al)}{\cosh^3(al)} - \frac{a^3 r\sin l\sinh^3(al)}{\cosh^4(al)}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial l^3} = -\frac{2a^3 r}{\cosh^4(al)} + \frac{4a^3 r\sinh^2(al)\,l}{\cosh^4(al)}$$

und den Ableitungen (51), (95) folgt das Volumenprodukt

$$\left(\frac{\partial\vec{X}}{\partial l}\ \frac{\partial^2\vec{X}}{\partial l^2}\ \frac{\partial^3\vec{X}}{\partial l^3}\right) = \frac{a(1+a^2)r^3}{\cosh^4(al)} \quad . \tag{124}$$

Mit dem Volumenprodukt (124) und dem Betrag (112) erhalten wir gemäß (122) die Rechenformel für die Windung der l-Linien (r = *const.*) (Loxodromen) für $H = a =$ *const.* $\neq 0$

$$\boxed{\tau(l) = \frac{1}{r}\cdot\frac{a\cosh^2(al)}{a^2+\cosh^2(al)}\quad\left[\frac{1}{m}\right]} \ . \tag{125}$$

Für $l = 0$ folgt die Windung

$$\tau(0) = \frac{a}{(1+a^2)\,r} \tag{126}$$

und für $l \to \pm\infty$ der Grenzwert

$$\lim_{l\to\infty}\tau(l) = \frac{a}{r}\ . \tag{127}$$

Die Abb. 10 zeigt die Windung der l-Linie $r = 2$ für $H = a = 0.1$.

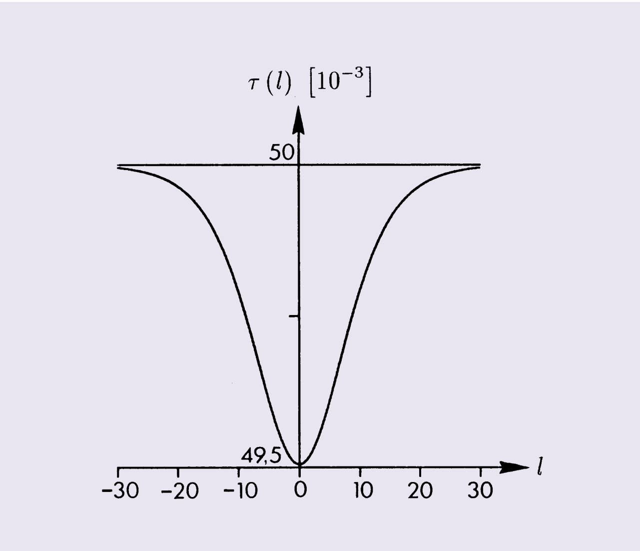

Abb. 10: Die Windung τ (l)

9 Eine weitere Parameterdarstellung der Flächen *H = const.*

In einer weiteren Parameterdarstellung der biegungsinvaranten Flächen $H = a =$ *const.* soll die Bogenlänge s der l-Linien (r = *const.*) als Flächenparameter v eingeführt werden, eine Transformationsaufgabe.

Ausgehend von der Vektordarstellung (18)

$$\vec{X}(r,l) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos l/\cosh(al) \\ r\sin l/\cosh(al) \\ r\tanh(al) \end{pmatrix} \tag{128}$$

und der Funktion (62) mit $s = v$

$$v = \frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}\ r\arctan\left[\sinh(al)\right] \tag{129}$$

erhalten wir die gesuchte inverse Transformation

$$\boxed{\begin{aligned} l &= l(r,v) \\ l &= \frac{1}{a}\operatorname{arsinh}\left(\tan\frac{av}{\sqrt{1+a^2}\ r}\right) \end{aligned}} \ . \tag{125}$$

Mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{av}{\sqrt{1+a^2}\ r} \tag{131}$$

und den Beziehungen

$$\sinh(al) = \sinh\left[\operatorname{arsinh}(\tan\beta)\right] = \tan\beta \tag{132}$$

$$\cosh(al) = \cosh\left[\operatorname{arsinh}(\tan\beta)\right] = \frac{1}{\cos\beta} \tag{133}$$

$$\tanh(al) = \tanh\left[\operatorname{arsinh}(\tan\beta)\right] = \sin\beta \tag{134}$$

erhalten wir die gesuchte Parameterdarstellung der biegungsinvarianten Flächen $H = a =$ *const.* mit den Flächenparametern r, v

$$\vec{X}(r,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(r,v) \\ y(r,v) \\ z(r,v) \end{pmatrix} \tag{135}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\left[\frac{1}{a}\operatorname{arsinh}(\tan\beta)\right]\cos\beta \\ y &= r\sin\left[\frac{1}{a}\operatorname{arsinh}(\tan\beta)\right]\cos\beta \\ z &= r\sin\beta \end{aligned}} \tag{135a}$$

und β (131). Es gilt

$$\left| \vec{X} \right| = r \ . \tag{136}$$

Mit den partiellen Ableitungen des Ortsvektors (135)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \cdots \text{Tangentenvektor an die } r\text{-Linie } (v = const.)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \cdots \text{Tangentenvektor an die } v\text{-Linie } (r = const.)$$

erhalten wir die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art

$$E = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \right\rangle = 1 + \frac{v^2}{r^2} \tag{137}$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial r}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right\rangle = -\frac{v}{r} \tag{138}$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} \right\rangle = 1 \tag{139}$$

und damit das Linienelement im Quadrat, die quadratische Form

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{r^2} & -\frac{v}{r} \\ -\frac{v}{r} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ dv \end{pmatrix} \ . \tag{140}$$

Für die v-Linie ($r = const.$, $dr = 0$) folgt

$$ds = dv \, , \tag{141}$$

also

$$s = v \, ; \tag{142}$$

d. h. der Parameter v ist wie erwartet die Bogenlänge s. Damit gelten die Ableitungen

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \vec{X}' \quad \text{(Einheitsvektor)} \tag{143}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2} = \vec{X}'' \tag{144}$$

$$\frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial v^3} = \frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial s^3} = \vec{X}''' \quad . \tag{145}$$

Mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art E, F, G (137) bis (139) folgt die differentialgeometrische Größe

$$W = \sqrt{EG - F^2} = 1 \tag{146}$$

und damit das Oberflächenelement

$$dO = dr \, dv \, . \tag{147}$$

Wir erhalten die Oberfläche der biegungsinvarianten Fläche $H = a = const.$ als Doppelintegral

$$O = \int_{r=0}^{R} \int_{v=0}^{\frac{\pi}{2a}\sqrt{1+a^2}\, r} dv \, dr \ . \tag{148}$$

$$O = \frac{\pi}{2a}\sqrt{1+a^2} \int_{r=0}^{R} r \, dr \tag{149}$$

mit dem erwarteten Ergebnis

$$O = \frac{R^2 \pi}{4a}\sqrt{1+a^2} \ , \tag{150}$$

siehe Formel (70).

Die Krümmung der v-Linie ($r = const.$) ist gleich dem Betrag der zweiten Ableitung des Ortsvektors (144) nach der Bogenlänge s

$$\kappa = \left| \vec{X}'' \right| \tag{151}$$

mit dem Ergebnis

$$\boxed{\kappa(s) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sqrt{1 + a^2 \cos^2 \beta}}{\sqrt{1+a^2} \cos \beta} \quad \left[\frac{1}{m}\right]} \tag{152}$$

und

$$\beta = \frac{as}{\sqrt{1+a^2}\, r} \tag{153}$$

im Definitionsbereich

$$-\frac{\pi}{2a}\sqrt{1+a^2}\, r \leq s \leq \frac{\pi}{2a}\sqrt{1+a^2}\, r \ . \tag{154}$$

Diese Formel (152) folgt ebenso aus (113) mit der Transformation (133).

Die Windung der v-Linie ($r = const.$) als Funktion der Bogenlänge s folgt aus der Formel

$$\tau(s) = \frac{\left(\vec{X}' \, \vec{X}'' \, \vec{X}'''\right)}{\left| \vec{X}'' \right|^2} \tag{155}$$

mit dem Ergebnis

$$\boxed{\tau(s) = \frac{1}{r} \cdot \frac{a}{1 + a^2 \cos^2 \beta} \quad \left[\frac{1}{m}\right]} \tag{156}$$

und β (153) im Definitionsbereich (154). Diese Formel (156) folgt ebenso aus (125) mit der Transformation (133).

Die Gaußsche Flächenkrümmung erhalten wir mit der Größe W (146) aus der Formel

$$K = LN - M^2 \quad \left[\frac{1}{m^2}\right]. \tag{157}$$

Mit den Gaußschen Fundamentalgrößen 2. Art aus den Volumenprodukten

$$L = \left(\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial r^2} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \tag{158}$$

$$M = \left(\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial r \partial s} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \tag{159}$$

$$N = \left(\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \quad \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \tag{160}$$

und den Ergebnissen

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \frac{s^2 \tan\beta}{r^3\sqrt{1+a^2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ M &= \frac{s \tan\beta}{r^2\sqrt{1+a^2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \\ N &= \frac{\tan\beta}{r\sqrt{1+a^2}} \quad \left[\frac{1}{m}\right] \end{aligned}} \tag{161}$$

folgt die erwartete Gaußsche Krümmung

$$K = LN - M^2 = 0\,. \tag{162}$$

Literatur

BAULE, B. (1979): Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs, Teil 2 (Band VII, Differentialgeometrie). Verlag Harri Deutsch, Thun und Frankfurt/M.

MITTERMAYER, E. (1998): Die Kugel (im Oktober 1998). Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 10999 Berlin, Dresdner Str. 26 (2. erweiterte Auflage, 507 S., 162 Abb.).

MITTERMAYER, E. (1998a): Das begleitende Dreibein mit absoluter Orientierung. Allgemeine Vermessungsnachrichten S. 233–238.

MITTERMAYER, E. (1999a): Projektionen der *r*-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 22–27.

MITTERMAYER, E. (1999b): Hyperbolische Drehflächen bez. der *r*-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 175–187.

MITTERMAYER, E. (1999c): Die Flächennormale der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 258–265.

MITTERMAYER, E. (1999d): Implizite Darstellung der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) und Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 295–299.

MITTERMAYER, E. (1999e): Die Gaußschen Koordinaten als Ortsfunktionen und Funktionentheorie/Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 405–416.

MITTERMAYER, E. (2000a): Differentialgeometrische Betrachtungen der biharmonischen Flächen $r \cdot l = const.$ Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 23–30.

MITTERMAYER, E. (2000b): Eine weitere Parameterdarstellung der biharmonischen Flächen $r \cdot \lambda = const.$ Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 94–103.

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. EBERHARD MITTERMAYER, Univ.-Prof., TU Berlin, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, Sekr. H12, Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin

Zusammenfassung

In Verbindung mit den *r*-Linien ($\bar{y}$ = *const.*, $\bar{z}$ = *const.*) metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) existieren spiralförmige Kegelflächen, die eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen. Es ist eine Poisson-Gleichung. Zwei Parameterdarstellungen dieser biegungsinvarianten Flächen werden eingeführt. Es zeigt sich, dass die im Netz geodätischer Parallelkoordinaten auftretenden Orthogonaltrajektorien Loxodromen der Kugeln *r* = *const.* sind. Damit ist das Problem gelöst, die Loxodrome längentreu als Kreisbogen in die Ebene abzuwickeln. Im Weiteren werden Formeln für die Krümmung und Windung der Loxodrome angegeben.

Summary

In connection with the *r*-lines (($\bar{y}$ = *const.*, $\bar{z}$ = *const.*) of the metric spherical coordinates (Mercator) there exist conical helikoidal surfaces. These surfaces satisfy a partial differential equation of the second order. It is a Poisson equation. Two parametric representations of these bending-invariant surfaces are introduced. It comes out that the orthogonal trajectories, which occur as parametric lines in the net of geodetic parallel coordinates, are the loxodromes of the spheres *r* = *const.* This is the solution of the problem of a length-invariant development of a loxodrome as circle into a plane. Further, the formulas for the curvature and torsion of the loxodrome are given.