



Dieter Schwenkel

# Bestimmung einer ausgleichenden Pyramide

Es wird ein Berechnungsansatz zur simultanen Approximation mehrerer ausgleichender Ebenen an ein Stützpunktfeld beschrieben. Die gegenseitige Lage der Ebenen wird dabei so definiert, dass sie die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide darstellen.

## Einleitung

Im ehemaligen Landschaftspark Garzau, ca. 40 km östlich von Berlin(-Mitte), befinden sich die Überreste einer Pyramide, die nach ihrem Erbauer, Friedrich Wilhelm Carl, Graf von Schmettau, benannt wird. Die ca 40 Fuß hohe Schmettau-Pyramide war auf einem Hügel im Landschaftspark als markanter Blickfang errichtet worden. Bild 1 ist dem Katalog „Die Pyramide“ [4] entnommen und stellt einen Ausschnitt einer zeitgenössischen Darstellung des Landschaftsparks Garzau dar (Bild 1).

Das unter der Pyramide befindliche Kellergewölbe sollte ursprünglich dem Fürsten als Grabstätte dienen. Die äußere Geometrie des Bauwerks vermittelt die Illusion, als ob es aus vier ineinander verschachtelten Pyramiden verschiedener Größe bestünde, deren obere Teile jedoch in unterschiedlichem Umfang abgetragen sind, sodaß jeweils Teile der darunter befindlichen kleineren Pyramide zu Tage treten. Dies wird in Bild 2 erkennbar, welches aus der Diplomarbeit [2] entnommen ist. Den deutlich größten Anteil am äußeren Erscheinungsbild trägt dabei die 2. Pyramide, von außen nach innen gezählt, nachfolgend mit „Hauptpyramide“ bezeichnet. Durch das Eingangsportal gelangte man einst über eine Vorhalle in den Innenraum mit oktagonalem Grundriss, Deckengewölbe, mehreren Nischen und Lichtöffnungen (Bild 2).

Das Bauwerk war bis zum vergangenen Jahr in einem desolaten Zustand. Der obere Teil war eingestürzt, im Wesentlichen waren äußerlich nur noch die Umrisse der Hauptpyramide und Teile des Innenraums erkennbar. Das Eingangsportal ist schon 1815 entfernt worden und befindet sich an der Pfarrkirche St. Marien im benachbarten Strausberg. Mittlerweile kümmert sich ein Förderverein „Pyramide und Schlosspark Garzau“ um den Erhalt des Bauwerks [5]. Durch den ebenfalls engagierten Pyramidenforscher Dr. Christian Tietze vom Historischen Institut der Universität Potsdam wurde 2002 an der TFH Berlin eine Diplomarbeit [2] initiiert, die das Aufmaß der Pyramide und ihres landschaftlichen Umfeldes, sowie die virtuelle Rekonstruktion der Pyramide zum Ziele hatte. Hierzu haben die Diplomanden die Ruine und das Gelände in Stützpunkten mit einem elektronischen Tachymeter aufgemessen und durch Anschlussmessungen im übergeordneten Bezugssystem des Landes Brandenburg georeferenziert. Die Rekonstruktion der ursprünglichen Geometrie des Bauwerks war eine knifflige Angelegenheit, waren doch augenscheinlich nur noch Reste der äußersten Pyramide, der Hauptpyramide, sowie größere Teile des Innenraums an ihrem ursprünglichen Platz, teilweise mit Schuttmaterial verdeckt und verwittert.

Bei der Auswahl der aufzumessenden Stützpunkte, wie auch bei der späteren Rekonstruktion der Bauwerksgeometrie, verfolgten die Diplomanden einen in der Archäologie üblichen Ansatz, das Bauwerk vor allem über markante Kanten zu erfassen und zu modellieren. Da jedoch zusätzlich genügend flächenhaft verteilte Stützpunkte aufgemessen wurden, war es möglich, für die Hauptpyramide zusätzlich eine Modellierung mit bestapproximierenden Ebenen vorzunehmen, um so eine unabhängige Kontrolle der grundlegenden Proportionen des Bauwerks zu erhalten.



Bild 1:

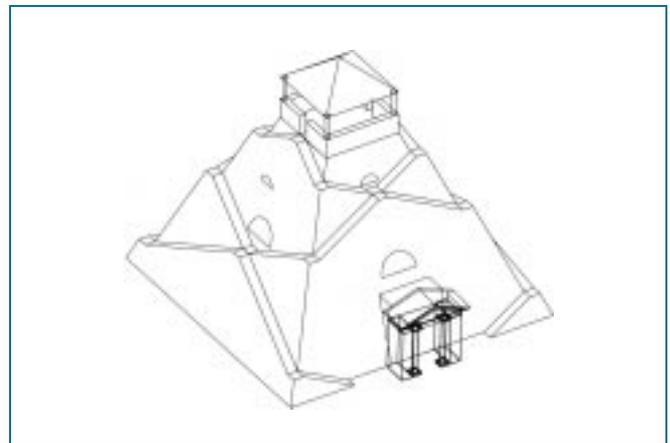


Bild 2:

Die nachfolgenden Ausführungen befassen sich deshalb ausschließlich mit der Approximation von Ebenen der Hauptpyramide, wobei insbesondere auf die simultane Approximation der vier Seitenflächen einer Pyramide in ihrer besonderen gegenseitigen Lage eingegangen wird.

## Gleichung einer Ebene

Eine Ebene kann einfach durch eine lineare Funktion  $z = f(x, y)$  beschrieben werden. Allerdings ist dieser Ansatz nicht geeignet für vertikale Ebenen. Es soll deshalb eine Definition gewählt werden, die uneingeschränkt für jede mögliche Orientierung der Fläche im Raum anwendbar ist.

Im dreidimensionalen kartesischen Bezugssystem ist eine Ebene  $\pi$  vollkommen definiert durch ihren Normalenvektor  $\mathbf{n}$ , den wir als normiert annehmen wollen,

$$\mathbf{n}^T = [n_1 \quad n_2 \quad n_3], \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (1.1)$$

und ihren lotrechten Abstand  $a$  vom Nullpunkt  $O$  (Figur 1).

Nehmen wir an, die Ebene  $\pi$  wurde längs des zu  $\mathbf{n}$  parallelen Vektors

$$\mathbf{x}_0 = a \cdot \mathbf{n} \quad (1.2)$$

aus dem Nullpunkt verschoben. Dann gilt:

Ein Punkt  $P$  liegt in der Ebene  $\pi$ , wenn für seinen Ortsvektor  $\mathbf{x}$

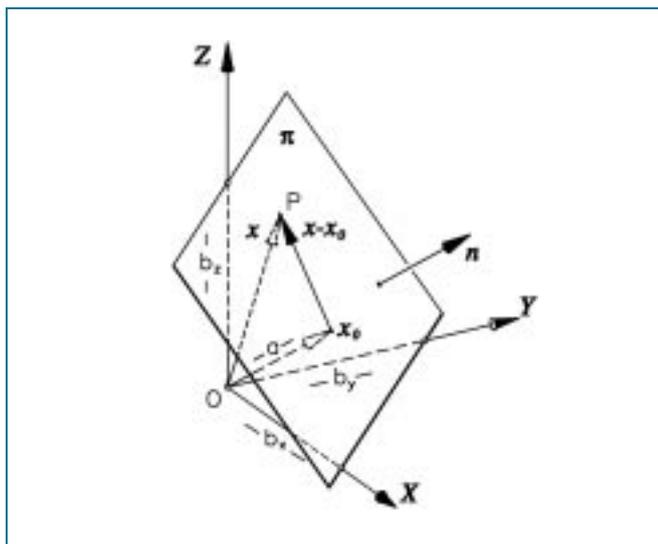
$$\mathbf{x}^T = [x \quad y \quad z] \quad (1.3)$$

und den Verschiebungsvektor  $\mathbf{x}_0$  gemäß (1.2) gilt (siehe auch Figur 1):

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (1.4)$$

d.h. wenn der Vektor  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$  senkrecht auf dem Vektor  $\mathbf{n}$  steht. Unter Beachtung von (1.2) lautet die Bedingung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - a \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - a \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$$



Figur 1:

Hieraus folgt mit (1.1) die Gleichung der Ebene:

$$n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - a = 0 \quad (1.5)$$

Für alle Flächen, die nicht durch den Nullpunkt  $O$  verlaufen, kann (1.5) auch in der Form

$$\bar{n}_1 \cdot x + \bar{n}_2 \cdot y + \bar{n}_3 \cdot z - 1 = 0 \quad (1.6)$$

geschrieben werden, indem

$$\bar{n}_1 = \frac{n_1}{a}, \quad \bar{n}_2 = \frac{n_2}{a}, \quad \bar{n}_3 = \frac{n_3}{a} \quad (1.7)$$

gesetzt werden. Vergleicht man (1.6) mit der Achsenabschnittsform der Ebenengleichung in [1], so gilt andererseits mit den Achsenabschnitten  $b_x, b_y, b_z$  (siehe Figur 1):

$$\bar{n}_1 = \frac{1}{b_x}, \quad \bar{n}_2 = \frac{1}{b_y}, \quad \bar{n}_3 = \frac{1}{b_z} \quad (1.8)$$

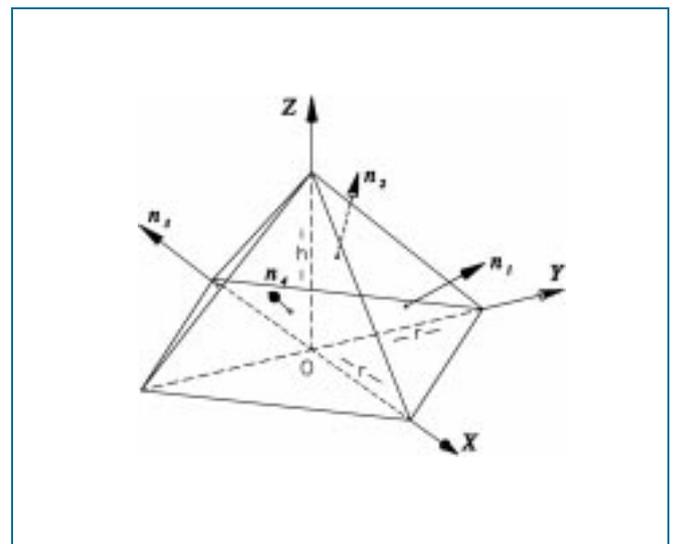
## Ausgleichende vierseitige Pyramide

Nachfolgend wird die simultane Bestimmung ausgleichender Ebenen beschrieben, die so zueinander orientiert sein sollen, dass sie die Oberfläche einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide definieren.

Wir gehen zunächst von der speziellen Position der Pyramide im Nullpunkt des Koordinatensystems (Figur 2) aus. Die Grundfläche der Pyramide liege auf  $z = 0$ , die Höhe der Pyramide sei mit  $h$  benannt und die Diagonale der Grundfläche betrage  $2 \cdot r$ . Die Normalenvektoren der vier Ebenen weisen jeweils in Richtung der Winkelhalbierenden der vier Quadranten der x-y-Ebene. Somit ist der Betrag der Achsenabschnitte auf der x- und der y-Achse jeweils  $r$ , auf der z-Achse  $h$  (Figur 2).

Die Gleichung der ersten Pyramidenfläche ( $F_1$ ) lautet demnach in Entsprechung zu (1.6) und (1.8):

$$F_1 : \frac{1}{r} \cdot x_i + \frac{1}{r} \cdot y_i + \frac{1}{h} \cdot z_i - 1 = 0 \quad (2.1.1)$$



Figur 2:

Für die 3 anderen Flächen erhält man entsprechende Ansätze, die sich nur in den Vorzeichen der Achsenabschnitte unterscheiden dürfen:

$$F_2 : -\frac{1}{r} \cdot x_i + \frac{1}{r} \cdot y_i + \frac{1}{h} \cdot z_i - 1 = 0 \quad (2.1.2)$$

$$F_3 : -\frac{1}{r} \cdot x_i - \frac{1}{r} \cdot y_i + \frac{1}{h} \cdot z_i - 1 = 0 \quad (2.1.3)$$

$$F_4 : \frac{1}{r} \cdot x_i - \frac{1}{r} \cdot y_i + \frac{1}{h} \cdot z_i - 1 = 0 \quad (2.1.4)$$

Im allgemeinen Fall ist eine 3-Parameter-Transformation der gegebenen Koordinaten  $X_i, Y_i, Z_i$  notwendig, um die Pyramide in die spezielle Nullpunktlage zu bringen:

$$\begin{aligned} x_i &= (X_i - X_0) \cdot \cos \alpha + (Y_i - Y_0) \cdot \sin \alpha \\ y_i &= (Y_i - Y_0) \cdot \cos \alpha - (X_i - X_0) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.2)$$

Integriert man die Transformation (2.2) in (2.1), erhält man Beziehungen mit 5 Unbekannten. Diese sind: 2 Formparameter  $r, h$ ; 2 Verschiebungen  $X_0, Y_0$ ; 1 Drehwinkel  $\alpha$

Diese Größen lassen sich durch Parameter  $u_i$  substituieren, sodass man unter Beachtung der Vorzeichenregeln gemäß (2.1.1) bis (2.1.4) auf die Gleichungen (2.3) für die 4 Flächen kommt:

$$F_1 : x_i \cdot u_1 + y_i \cdot u_2 + z_i \cdot u_3 - u_1 \cdot u_4 - u_2 \cdot u_5 - 1 = 0 \quad (2.3.1)$$

$$F_2 : y_i \cdot u_1 - x_i \cdot u_2 + z_i \cdot u_3 + u_2 \cdot u_4 - u_1 \cdot u_5 - 1 = 0 \quad (2.3.2)$$

$$F_3 : -x_i \cdot u_1 - y_i \cdot u_2 + z_i \cdot u_3 + u_1 \cdot u_4 + u_2 \cdot u_5 - 1 = 0 \quad (2.3.3)$$

$$F_4 : -y_i \cdot u_1 + x_i \cdot u_2 + z_i \cdot u_3 - u_2 \cdot u_4 + u_1 \cdot u_5 - 1 = 0 \quad (2.3.4)$$

mit

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{r} \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) & u_2 &= \frac{1}{r} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha) \\ u_3 &= \frac{1}{h} & u_4 &= X_0 & u_5 &= Y_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Bei (2.3) handelt es sich um nichtlineare Bedingungsgleichungen für die Beobachtungen  $x_i, y_i, z_i$ , bzw. deren Verbesserungen  $v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}$  und die gesuchten Parameter  $u_i$  der Flächen, somit um nichtlineare Funktionen  $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$ . Die Kleinste-Quadrate-Lösung für gleichgewichtete und unabhängige Beobachtungen wird nach Einführung der Korrelaten  $\mathbf{k}$  durch das Minimum der Zielfunktion

$$\Phi = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} - 2 \cdot \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (2.5)$$

definiert. Ersetzt man die nichtlinearen Funktionen  $\mathbf{f}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  näherungsweise durch ihre linearisierten Formen

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (2.6)$$

erhält man für (2.5) die Darstellung

$$\Phi = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v} - 2 \cdot \mathbf{k}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{v} + \mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}) \quad (2.7)$$

welche nach [3] auf das symmetrische Lösungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.8)$$

und die Lösungen

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= -(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{w} \\ \mathbf{k} &= -(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot (\mathbf{B}^T \cdot \Delta \mathbf{u} + \mathbf{w}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (2.9)$$

führt. Da man bei der betrachteten Anwendung für  $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A}$  eine Diagonalmatrix mit identischen Diagonalelementen erhält, muss man tatsächlich nur die (5,5)-Matrix  $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T)$  invertieren.

In (2.9) sind Näherungswerte  $u_{i0}$  für die Parameter  $u_i$  enthalten. Sie müssen iterativ verbessert werden. In der Anwendung zeigten sich keine Konvergenzprobleme bei schlechten Näherungswerten. Streng betrachtet müssten auch die  $x_i, y_i, z_i$  in jedem Iterationsschritt korrigiert werden. Da jedoch angenommen werden kann, dass es sich bei den Beobachtungen  $x_i, y_i, z_i$  um gute Näherungswerte für die ausgeglichenen Beobachtungen,

$$\bar{x}_i = x_i + v_{x_i}, \quad \bar{y}_i = y_i + v_{y_i}, \quad \bar{z}_i = z_i + v_{z_i} \quad (2.10)$$

handelt, wurde auf diese Maßnahme verzichtet.

In erster Linie interessieren uns die ausgeglichenen Parameter  $u_i$  bzw. die daraus resultierenden Formparameter  $r$  und  $h$ . Diese erhält man durch Umkehrung aus den Beziehungen (2.4):

$$\alpha = \arctan((u_2 - u_1)/(u_2 + u_1)) + \pi, \text{ falls } (u_2 + u_1) < 0$$

$$r = 2 \cdot \cos \alpha / (u_2 + u_1) \quad h = 1/u_3 \quad X_0 = u_4 \quad Y_0 = u_5 \quad (2.11)$$

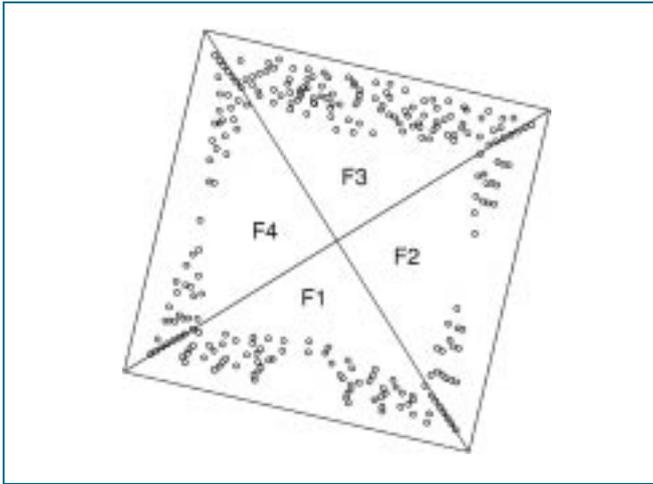
Die Genauigkeit der aus den Unbekannten  $u_i$  resultierenden Form- und Lageparameter muss durch Linearisierung von (2.11) aus der Kofaktorenmatrix

$$\mathbf{Q}_{uu} = (\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \quad (2.12)$$

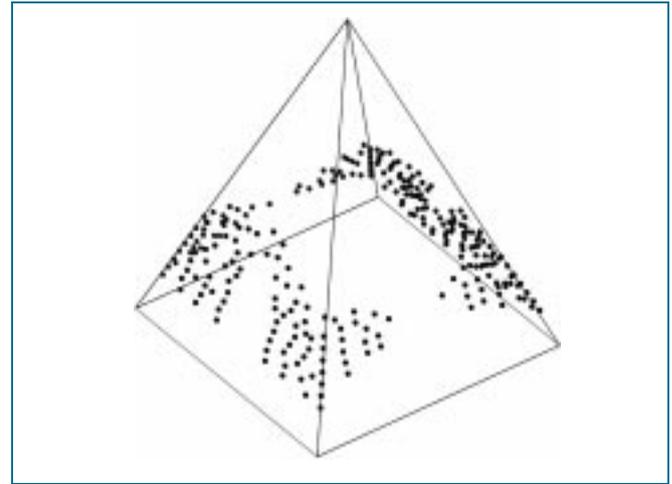
nach dem allgemeinen Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden.

## Zahlenbeispiel Schmettau-Pyramide

Der dargelegte Ausgleichungsansatz wurde nun auf Daten angewendet, die von der tachymetrischen Aufmessung der Ruine der Schmettau-Pyramide stammen. Die Form des ursprünglichen Bauwerks wird in [2] so beschrieben: *Das Bauwerk besteht aus einem pyramidenförmigen, oben abgeschnittenen Hauptkörper, ... „Hauptpyramide“ genannt, sowie einer vorgesetzten Teilpyramide im unteren Bereich und zwei zurückgesetzten Teilpyramiden im oberen Bereich.* Da die vorgefundenen Mauerreste hauptsächlich der Hauptpyramide zuzuordnen sind, beschränkte



Figur 3a:



Figur 3b:

sich die nachfolgend dokumentierte Auswertung auf die gewonnenen Stützpunkte der Hauptpyramide (Figur 3a). Durch Polygonierung waren die Aufnahmezustandpunkte an das Lagebezugssystem 489 des Landes Brandenburg angeschlossen worden. Die Höhen waren durch Anschluss an Festpunkte des DHHN 92 durch Liniennivellement ermittelt worden. Die Fußbodenhöhe der Pyramide wird in [2] mit 73,95 m angegeben. Sie wurde bei den Z-Werten in Abzug gebracht. Bei der Aufmessung waren die Punkte

in entsprechenden Nummernbereichen nummeriert worden, sodass eine Zuordnung zu den verschiedenen Ebenen – insbesondere auch zu den vier Ebenen F1, ..., F4 (vgl. Figur 3a) der Hauptpyramide – gegeben war. Nachfolgend ist ein Auszug aus dem Berechnungsprotokoll der Ausgleichung von insgesamt 296 Messpunkten wiedergegeben. Das Ergebnis (vgl. Tabellen, Figur 3b) wurde nach 5 Iterationen erhalten.

### Ausgleichende Pyramide Stützpunkte:

Nr	X	Y	Z	Ebene
1100	3428432,982	5821470,197	75,822	1
1101	3428434,188	5821469,896	75,816	1
1102	3428435,224	5821469,636	75,810	1
...	...	...	...	.
4038	3428434,638	5821471,457	79,199	4

### Startwerte für die Unbekannten:

u1 = 1,000	u2 = 1,000	u3 = 1,000	u4 = 0,000	u5 = 0,000
------------	------------	------------	------------	------------

### Ergebnisse:

Drehung = - 235,356 gon ± 0,055  
 Diagonale = 17,699 m ± 0,027  
 Höhe = 16,243 m ± 0,084  
 Y0 = 3428439,557 m ± 0,005  
 X0 = 5821474,233 m ± 0,004  
 ...

Nr	VX	VY	VZ	Probe:
1100	- 0,02136	- 0,09120	0,03608	0,00000
1101	- 0,01822	- 0,07782	0,03079	0,00000
1102	- 0,01532	- 0,06542	0,02589	0,00000
...	...	...	...	...
4038	- 0,06723	0,01574	0,02660	0,00000

$\sigma_0 = \pm 0,047$  m aus 296 Punkten

Aus der errechneten Diagonale ergibt sich für die Hauptpyramide eine Grundfläche von  $12,515 \text{ m} \times 12,515 \text{ m}$ . In [2] wurden für die Hauptpyramide auf anderem Wege eine Grundfläche von  $40 \times 40$  preußischen Fuß oder  $12,56 \text{ m} \times 12,56 \text{ m}$ , und die Höhe zu  $16,30 \text{ m}$  ermittelt. Insgesamt ergab sich die Lage der Pyramide wesentlich genauer als ihre Form. Angesichts der Tatsache, dass sich die Stützpunkte nur im unteren Teil der Pyramide befinden (vgl. Figur 3b), erscheint es durchaus plausibel, dass die ermittelte Höhe  $h$  die geringste Genauigkeit aufweist. Wenn man die Situation vor Ort zum Zeitpunkt der Messung in Betracht zieht, weisen die errechneten Parameter eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen in [2] auf, und liefern damit eine Bestätigung der dort gewonnenen Resultate.

### Literatur

- [1] BRONSTEIN-SEMENDJAJEW: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch
- [2] GAST, A.; WIEDMANN, H.: Virtuelle Rekonstruktion der Schmettau-Pyramide, Diplomarbeit, TFH Berlin, 2002
- [3] GOTTHARDT, E.: Einführung in die Ausgleichsrechnung, S. 252 ff. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1978
- [4] TIETZE, C.: Die Pyramide. Geschichte – Entdeckung-Faszination, S. 120, Arcus Verlag, Potsdam, 1999
- [5] <http://home.arcor.de/olaf.pistulla/pyramide/>

### Kurzfassung

Es wird ein Berechnungsansatz zur simultanen Approximation mehrerer ausgleichender Ebenen an ein Stützpunktfeld beschrieben. Die gegenseitige Lage der Ebenen wird dabei so definiert, dass sie die Oberflächen einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide darstellen. Der Ansatz wurde bei der Bestimmung der Formparameter der „Schmettau“-Pyramide erprobt.

### Abstract

A solution model for simultaneous calculation of best fitting planes to an irregular disposition of three dimensional points is described. By special definition of the mutual position of the planes the shape of a regular pyramid is realized. For an example the solution model was tested with the „Schmettau“-Pyramid.

## BUCHBESPRECHUNGEN

### Kuhlmann/Markus/Theurer CAD und GIS in der Stadtplanung

Karlsruhe, Harzer Verlag, 2003  
ISBN 3-98031128-6-0, EUR 19,80

Der kommunale GIS-Markt ist einer der attraktivsten aber auch schwierigsten Märkte für die Nutzung von Geoinformationssystemen. Gerade die Erwartungshaltung und das „Halbwissen“ führen oftmals zu schwierigen Diskussionen zwischen den Anwendern einerseits und der GIS-Industrie (Hersteller, Ingenieurbüros, Beratern) andererseits. Um dieses Defizit zu verringern, ist das vorliegende Buch als ein Leitfaden zum effizienten Einsatz von CAD und GIS konzipiert.

Durch die Untergliederung in sieben Schritte bei der Einführung wird dem Leser eine Empfehlung an die Hand gegeben, in der die wichtigsten Erfahrungen der Autoren aus vielfältigen Projekten aufgearbeitet sind. Durch die Unterstützung mit einfachen Beispielen und Checklisten werden die verschiedenen Projektschritte anschaulich ergänzt und damit die Theorie vervollständigt. Unglücklich ist allerdings der Titel gewählt. Der Versuch, mit der Nennung von CAD

und GIS einen breiten Leserkreis zu erschließen, wird durch die explizite Nennung der Stadtplanung als Anwendungsfeld wieder eingeengt, obwohl viele Empfehlungen für alle Bereiche der kommunalen raumbezogenen Datenverarbeitung gelten. Hervorzuheben ist sicherlich das attraktive Preis-Leistungs-Verhältnis, was nicht zuletzt darauf basiert, dass ein Teil der Entstehungskosten durch Werbung finanziert wurde. Die direkte Kopplung zwischen Werbung im Buch und Nennung in

den Bezugsquellen schränkt aber den Wert dieser Bezugsliste erheblich ein. Zusammenfassend ist das Buch für jeden Projektverantwortlichen in einer Kommunalverwaltung dringend zu empfehlen, da er von den Hinweisen und Erfahrungen der Autoren viele Anregungen bekommt und damit der Anschaffungspreis sehr gut investiert ist.

R. SEUSS, Darmstadt