Zum Mittelwert von Kugeldaten

Helmuth Späth

In [1, 2] wurde das Problem behandelt, für Punkte auf einem Kreis einen sinnvollen Mittelwert auf demselben zu definieren und zu berechnen. Dies wird hier für Punkte auf der Einheitskugel verallgemeinert. Zwei Lösungswege werden vorgestellt: der erste ist im Standartwerk [1] nicht zu finden; der zweite Weg ist dort zwar angedeutet aber nicht ausgeführt. Numerische Beispiele werden angegeben.

1 Lösungsweg 1

Gegeben seien Datenpunkte (x_i, y_i, z_i), $i = 1, ..., m$ o. B. d. A. auf der Einheitskugel, also mit der Eigenschaft

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \ (i = 1, \ldots, m). \tag{1}$$

Ein geeigneter Mittelwert (x,y,z) wird definiert über die Zielfunktion bei der Methode der kleinsten Quadrate, also über

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \to \min, \tag{2}$$

wozu allerdings hier die Nebenbedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{3}$$

kommt, die bedeutet, dass der gesuchte Mittelwert ebenfalls auf der Kugel liegen soll.
Die LAGRANGE-Funktion ist dann

$$L(x, y, z, \lambda) = V(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1), \tag{4}$$

und die notwendigen Bedingungen für ein Extremum lauten

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial x} = -\sum_{i=1}^{m} (x_i - x) - \lambda x = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{m} (y_i - y) - \lambda y = 0 \tag{6}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial z} = -\sum_{i=1}^{m} (z_i - z) - \lambda z = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0. \tag{8}$$

Eliminiert man λ aus (5) – oder aus (6) oder (7), falls dies nicht möglich sein sollte –, so ergibt sich

$$\lambda = -\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{m} (x_i - x). \tag{9}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (6) und (7) ein, so erhalten wir

$$-x\sum_{i=1}^{m} (y_i - y) + y\sum_{i=1}^{m} (x_i - x) = 0, \tag{10}$$

$$-x\sum_{i=1}^{m} (z_i - z) + z\sum_{i=1}^{m} (x_i - x) = 0. \tag{11}$$

Mit den Abkürzungen

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i, \tilde{y} = \sum_{i=1}^{m} y_i, \tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} z_i \tag{12}$$

ergibt sich aus (10) und (11)

$$x = y\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}, \ z = y\frac{\tilde{z}}{\tilde{y}}. \tag{13}$$

Definiert man

$$r = 1 \ / \ \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2} \tag{14}$$

und setzt (13) in (8) ein, so erhalten wir

$$x = r\tilde{x}, \ y = r\tilde{y}, \ z = r\tilde{z}. \tag{15}$$

Eine weitere Lösung ist offenbar

$$(-x, -y, -z). \tag{16}$$

Über die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen könnte man entscheiden, welcher der beiden Werte einem Minimum und welcher einem Maximum entspricht. (Die stetige Funktion V nach (2) nimmt auf der kompakten Menge (3) Minimum und Maximum an.) Einfacher ist es jedoch, die beiden Werte (15) und (16) in (2) einzusetzen und festzustellen, welcher dem gesuchten Minimum entspricht. In den später folgenden Beispielen war dies stets (15).

2 Lösungsweg 2

Der zweite Lösungsweg besteht darin, Kugelkoordinaten [3]

$$\begin{aligned} x_i &= \sin\theta_i \cos\varphi_i, \\ y_i &= \sin\theta_i \sin\varphi_i, \ (i =, \ldots, m), \\ z_i &= \cos\theta_i \end{aligned} \tag{17}$$

einzuführen. Nach [3] erhält man umgekehrt hieraus

$$\begin{aligned}\cos\varphi_i &= x_i \,/\, \sqrt{x_i^2+y_i^2},\\ \sin\varphi_i &= y_i \,/\, \sqrt{x_i^2+y_i^2},\\ \cos\theta_i &= z_i \,/\, \sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2},\\ \sin\theta_i &= \sqrt{1-\cos^2\theta_i}.\end{aligned} \tag{18}$$

Auf diese Weise tritt die Nebenbedingung (1) nicht mehr auf, da die rechten Seiten von (17) quadriert und aufaddiert die Eins ergeben. Ähnlich ist dies für den gesuchten Mittelwert, wenn man

$$\begin{aligned}x &= \sin\alpha\cos\beta,\\ y &= \sin\alpha\sin\beta,\\ z &= \cos\alpha\end{aligned} \tag{19}$$

mit den Unbekannten α und β ansetzt. Die Zielfunktion (2) lautet dann

$$W(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{m}(\sin\theta_i\cos\varphi_i - \sin\alpha\cos\beta)^2 + (\sin\theta_i\sin\varphi_i - \sin\alpha\sin\beta)^2 + (\cos\theta_i - \cos\alpha)^2 \to \min. \tag{20}$$

Für $\sin\alpha \neq 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{2\sin\alpha}\frac{\partial W}{\partial\beta} = \sin\beta\sum_{i=1}^{m}\sin\theta_i\cos\varphi_i - \cos\beta\sum_{i=1}^{m}\sin\theta_i\sin\varphi_i = 0, \tag{21}$$

woraus man tgβ und somit β berechnen kann. Mit β ist $\beta+\pi$ eine zweite Lösung. Weiter haben wir

$$\frac{1}{2}\frac{\partial W}{\partial\alpha} = -\cos\alpha\left(\cos\beta\sum_{i=1}^{m}\sin\theta_i\cos\varphi_i + \sin\beta\sum_{i=1}^{m}\sin\theta_i\sin\varphi_i\right) \tag{22}$$

$$+\sin\alpha\sum_{i=1}^{m}\cos\theta_i = 0. \tag{23}$$

Hieraus lassen sich alternativ für die beiden gefundenen Werte von β jeweils tgα und somit die beiden dazu gehörenden Lösungen α und $\alpha+\pi$ ausrechnen.
Gelten (21) und (22) für das Paar (α,β), so gilt das auch für das Paar $(\alpha+\pi,\beta)$, nicht aber für die weiter möglichen Paare $(\alpha,\beta+\pi)$ und $(\alpha+\pi,\beta+\pi)$, wie man durch Einsetzen in (21) und (22) erkennt. Daher ist nur zu überprüfen, ob (α,β) oder $((\alpha+\pi,\beta)$ den kleineren Wert für W liefert.

3 Numerische Beispiele

Beispiel 1: Wir benutzen die $m=10$ zufällig auf der Einheitskugel in Quadranten $x,y,z \geq 0$ erzeugten Kugelpunkte (x_i,y_i,z_i) aus Tabelle 1.
Mit der ersten Methode ergibt sich das gesuchte Minimum zu

$x = .656494,\ y = .502899,\ z = .562235$

Tab. 1:

i	x_i	y_i	z_i
1	0.715219	0.632314	0.297726
2	0.700449	0.250055	0.668463
3	0.765722	0.560183	0.316014
4	0.760683	0.358145	0.541380
5	0.929407	0.250992	0.270567
6	0.741381	0.304962	0.597790
7	0.099293	0.994861	0.019819
8	0.448270	0.154581	0.880431
9	0.485261	0.237959	0.841367
10	0.236001	0.761531	0.603634

Tab. 2:

1	$\sin\varphi_i$	$\cos\varphi_i$	$\sin\theta_i$	$\cos\theta_i$
1	0.662351	0.749194	0.954651	0.297726
2	0.336211	0.941787	0.743745	0.668463
3	0.590441	0.807081	0.948754	0.316014
4	0.425969	0.904738	0.840778	0.541380
5	0.260716	0.965415	0.962701	0.270567
6	0.380416	0.924815	0.801653	0.597790
7	0.995056	0.099313	0.999804	0.019819
8	0.326001	0.945369	0.474174	0.880431
9	0.440286	0.897857	0.540465	0.841367
10	0.955184	0.296014	0.797261	0.603634

mit dem Zielfunktionswert $V(x,y,z) = 2.081540$. Die für die zweite Methode benötigten Werte (18) finden sich in Tabelle 2.
Es wurde gefunden (α,β) charakterisiert durch

$\sin\alpha = .826978,\ \cos\alpha = .562235,\ \sin\beta = .608116,$
$\cos\beta = .793848.$

Beispiel 2: Jetzt haben wir die $m=10$ auf der ganzen Einheitskugel zufällig erzeugten Punkte aus Tabelle 3 benutzt.
Mit der ersten Methode ergab sich der gesuchte Mittelwert zu

$x = .786074,\ y = -.617995,\ z = .013034$

mit $V(x,y,z) = 15.20879$. Die für die zweite Methode erforderlichen Daten finden sich in Tabelle 4.
Das Ergebnis war hierfür

$\sin\alpha = .999915,\ \cos\alpha = .013034,\ \sin\beta = -.618047,$
$\cos\beta = .786141,$

natürlich wie auch in Beispiel 1 mit $W(\alpha,\beta) = V(x,y,z)$.

Tab. 3:

i	x_i	y_i	z_i
1	0.767407	0.549374	– 0.330567
2	0.698203	– 0.351521	0.623655
3	0.848492	0.246705	– 0.468186
4	0.924153	– 0.091234	0.370969
5	0.481531	– 0.635636	– 0.603402
6	– 0.145405	– 0.906712	– 0.395892
7	– 0.572875	0.477626	– 0.666099
8	– 0.211288	– 0.766789	0.606129
9	0.073059	– 0.482398	0.872900
10	– 0.906287	0.422041	0.022941

Tab. 4:

1	sin φ_i	cos φ_i	sin θ_i	cos θ_i
1	0.582098	0.813119	0.943783	– 0.330567
2	– 0.449688	0.893186	0.781700	0.623655
3	0.279195	0.960234	0.883630	– 0.468186
4	– 0.098244	0.995162	0.928645	0.370969
5	– 0.797099	0.603848	0.797437	– 0.603402
6	– 0.987384	– 0.158342	0.918297	– 0.395892
7	0.640366	– 0.768070	0.745864	– 0.666099
8	– 0.964070	– 0.265649	0.795366	0.606129
9	– 0.988725	0.149742	0.487899	0.872900
10	0.422152	– 0.906525	0.999737	0.022941

Literatur

[1] Mardia, K. V.: Statistics of Directional Data, Academic Press 1972.

[2] Späth, H.: Mittelwert und Streuung bei Winkelmessdaten, AVN 2/1998, 58–60.

[3] Stöcker, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, 3. Auflage Harri Deutsch 1995.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Helmuth Späth,
Fakultät V, Institut für Mathematik,
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg,
Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany,
E-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de