Zur Bestimmung von Hüll- bzw. Pferchgerade und -ebene

Helmuth Späth, Oldenburg

Der Hüllkreis ist derjenige Kreis mit kleinstem Radius, der in der Ebene gegebene Punkte enthält. Auf eine Gerade übertragen liegen die gegebenen Punkte alle auf einer Seite, möglichst nahe an der Geraden.

1 Problemstellung

Der Hüllkreis ist derjenige Kreis mit kleinstem Radius, der in der Ebene gegebene Punkte enthält, ein Pferchkreis ein solcher mit größtem Radius, der keinen der gegebenen Punkte im Innern enthält [1, 2]. Wir übertragen diese in der Koordinatenmesstechnik gängige Fragestellung auf die Gerade, die als an einer Stelle aufgeschnittener, aufgebogener und ins Unendliche gedehnter Kreis aufgefasst werden kann. Beim aufgebogenen Hüllkreis liegen die Punkte alle auf der einen Seite, beim Pferchkreis auf der anderen Seite einer Geraden. Somit wollen wir zu gegebenen Punkten eine Gerade so bestimmen, dass alle Punkte in der einen oder der anderen der durch sie definierten beiden Halbebenen liegen, was Nebenbedingungen liefert. Als Optimalitätskriterium wählen wir nahe liegender Weise, dass die Summe der quadrierten orthogonalen Abstände der gegebenen Punkte zu der gesuchten Geraden minimiert werden soll. Für den Fall, dass stattdessen der maximale Abstand minimiert werden soll, sind die Änderungen sehr einfach.

2 Das Modell für die Gerade

Der gerichtete orthogonale Abstand h_i eines gegebenen Punktes (x_i, y_i) $(i=1,\dots,n\geq 3)$ zu einer Geraden

$$ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 \neq 0 \tag{1}$$

ist gegeben [3] durch

$$h_i = -\operatorname{sgn}(c)\,\frac{ax_i + by_i + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} . \tag{2}$$

Für $h_i > 0$ liegen der Punkt (x_i, y_i) und der Ursprung auf verschiedenen Seiten der Geraden, für $h_i < 0$ auf derselben Seite und für $h_i = 0$ auf der Geraden. Das genannte Optimalitätskriterium lautet somit

$$S(a,b,c) = \frac{1}{a^2+b^2}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+by_i+c)^2 \rightarrow \min . \tag{3}$$

und die Nebenbedingungen sind entweder

$$-\operatorname{sgn} c\,(ax_i + by_i + c) \geq 0\ (i = 1, \dots, n) \tag{4}$$

oder

$$-\operatorname{sgn} c\,(ax_i + by_i + c) \leq 0\ (i = 1, \dots, n). \tag{5}$$

Im Fall (4) sollen Ursprung und (x_i, y_i) auf derselben Seite der Gerade liegen, im Fall (5) auf verschiedenen Seiten. Die Zielfunktion (3) zusammen mit den Nebenbedingungen (4) oder (5) definieren spezielle nichtlineare Programme, für die im Folgenden ein einfaches Enumerationsverfahren entwickelt wird.

3 Ein Algorithmus

Wie von der Nichtlinearen Optimierung her bekannt ist, müssen in (4) bzw. (5) die aktiven Nebenbedingungen identifiziert werden, d. h. jeweils diejenigen beiden Ungleichungen, die als Gleichungen erfüllt werden. Bis auf eventuell konstruierbare unrealistische Ausnahmefälle kann man somit alle $n(n-1)/2$ möglichen Paare von Gleichungen durchprobieren, jeweils *a, b, c* ausrechnen, damit die anderen Nebenbedingungen auf Erfülltsein überprüfen und gegebenenfalls die Zielfunktion auswerten und als Lösung eine solche heraussuchen, für die die Zielfunktion minimal wird. Genauer verläuft dies wie folgt:

Man setze SALT = 1.E30 (große Zahl). Für alle Paare (k, j) $(k = 1, \dots, n-1, j = k+1, \dots, n)$ berechne man die Koeffizienten *a, b* und *c* der Geraden (1) durch die Punkte (x_k, y_k) und (x_j, y_j). Diese Gerade ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} x_k - x_j \\ y_k - x_j \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Eliminiert man den Parameter t aus den beiden Gleichungen, so erhält man durch Vergleich der Koeffizienten von x und y und Vergleich der Konstanten mit (1) sehr einfach

$$\begin{aligned} a &= -(y_k - y_j), \\ b &= \ \ (x_k - x_j), \\ c &= x_j\,(y_k - y_j) - y_j\,(x_k - x_j). \end{aligned} \tag{7}$$

(Um $a = b = 0$ zu vermeiden, muss $(x_k, y_k) \neq (x_j, y_j)$ sein.) Dann kann man mittels (2) die Abstände h_i berechnen.

Verletzen diese (ohne den Faktor $1/\sqrt{a^2 + b^2}$) (4) bzw. (5), so betrachte man das nächste Paar (k, j). Andernfalls wird SNEU = $S(a, b, c)$ nach (3) berechnet. Ist SNEU kleiner als SALT, so wird SALT = SNEU gesetzt und die Werte a, b, c und h_i ($i = 1, ..., n$) werden als momentan beste Lösung weggespeichert. Anschließend wird das nächste Paar (k, j) so lange untersucht, bis alle Paare abgearbeitet sind.

4 Ein Beispiel

Gegeben seien die $n = 10$ Punkte

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	10
y_i	7	8	6	6	4	3	4	2	3	2

Für die Nebenbedingungen (4) ergibt sich so die Gerade $2x + 3y = 26$ und für (5) $4x + 5y = 35$. Die Punkte und die beiden Geraden (die erste ausgezogen, die zweite gestrichelt) sind in Fig. 1 visualisiert.

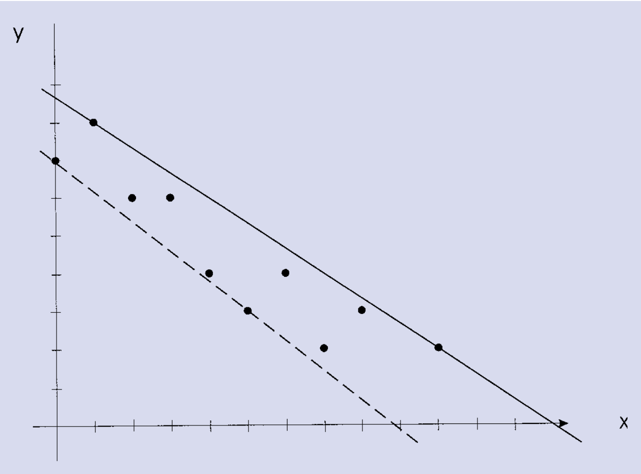

Fig. 1

5 Das Modell für die Ebene

Für eine Ebenengleichung

$$ax + by + cz + d = 0, \ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0 \qquad (8)$$

sind die Abstände von gegebenen Punkten (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, ..., n \geq 4$) im Raum durch

$$h_i = -\operatorname{sgn}(d) \frac{ax_i + by_i + cz_i + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (9)$$

gegeben. Die (3) entsprechende Zielfunktion ist dann

$$S(a,b,c,d,) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \sum_{i=1}^{n} (ax_i + by_i + cz_i + d)^2 \to \min, \qquad (10)$$

und die Nebenbedingungen lauten

$$-\operatorname{sgn} d \, (ax_i + by_i + cz_i + d) \geq 0 \qquad (11)$$

bzw.

$$-\operatorname{sgn} d \, (ax_i + by_i + cz_i + d) \leq 0. \qquad (12)$$

Die Koeffizienten a, b, c und d einer durch die drei Punkte (x_j, y_j, z_j), (x_k, y_k, z_k) und (x_ℓ, y_ℓ, z_ℓ) – falls diese nicht auf einer Geraden liegen – eindeutig bestimmten Ebene (8) erhält man aus der parametrischen Darstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} x_k - x_j \\ y_k - y_j \\ z_k - z_j \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} x_\ell - x_j \\ y_\ell - y_j \\ z_\ell - z_j \end{pmatrix}$$

durch Elimination der Parameter u und v und anschließendem Koeffizientenvergleich mit (8). Der für die Gerade geschilderte Algorithmus lässt sich dann leicht übertragen: es müssen nur stets drei statt zwei Punkte betrachtet werden.

Literatur

[1] SPÄTH, H.: Bestimmung von Hüllkreis und -kugel mittels sequentieller linearer Optimierung. AVN 7/1999, 239–242.

[2] SPÄTH, H.: Bestimmung von Pferchkreisen und -kugeln mittels sequentieller linearer Optimierung. AVN 10/1999, 343–345.

[3] STÖCKER, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Verlag Harri Deutsch 1995.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. HELMUTH SPÄTH, Fachbereich Mathematik, Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg, Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany
E-Mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Zu gegebenen Punkten in der Ebene bestimmen wir eine Gerade so, dass alle Punkte auf der einen oder der anderen Seite der Gerade liegen und sich außerdem in einem gewissen Sinn möglichst nahe an der Gerade befinden. Liegen die gegebenen Punkte im Raum, so lässt sich das Verfahren auf eine zu suchende Ebene übertragen.

Abstract

For given data points in the plane we determine a straight line such that all data points are on the same side of that straight line and are as near as possible in some certain sense. For given data points in space the method can easily be extended for a plane.