

Verschiedene Ansätze zur Schätzung einer ausgleichenden Raumgeraden

Stephan Kupferer, Karlsruhe

In diesem Beitrag werden drei unterschiedliche Ansätze zur Schätzung einer ausgleichenden Raumgeraden untersucht und die einzelnen Vor- und Nachteile der Modelle diskutiert. Außerdem wird anhand eines Beispiels der Frage nachgegangen, wann und warum eine Berechnung trotz ausreichender und nicht widersprüchlicher Restriktionen scheitern kann.

1 Einleitung

Die klassische Formanalyse wird durch das Problem bestimmt, ausgehend von einer meist großen Menge von Punkten im zwei- oder dreidimensionalen Raum eine mathematische Ersatzform zu bestimmen, die in der Lage ist, die bestehenden Punkte bestmöglich zu repräsentieren. Dabei ist zunächst eine Entscheidung zu treffen, welche Form die bestehende Punktwolke approximieren soll. Man stützt sich dabei auf Annahmen über die funktionalen Zusammenhänge des beobachteten Objektes oder Phänomens. Anschließend ist eine mathematische Beschreibung der Ersatzform zu formulieren und ein Kriterium zu wählen, anhand dessen die Bedingung der bestmöglichen Anpassung gemessen werden kann. Obgleich auf Basis des allgemeinen Normbegriffes viele solcher Kriterien denkbar sind, so hat sich aus verschiedenen Gründen die Minimierung der Summe der Quadrate der Verbesserungen an die Beobachtungen etabliert. Gerade in der Formanalyse ist die Wahl dieses Maßes leicht nachzuvollziehen, weil es sich ausschließlich um Verbesserungen von Koordinaten handelt, so dass die Forderung gleichbedeutend mit der Minimierung aller Punktabstände von der Form ist. Aus diesem Grund soll auch in dem vorliegenden Artikel nur von der L2-Norm Gebrauch gemacht werden. Damit ist das Ziel der Formanalyse (meistens) eindeutig festgelegt. Das trifft allerdings nicht auf den Weg der Berechnung zu. Oft lassen sich unterschiedliche mathematische Formulierungen für ein und dieselbe Ersatzform angeben. Dadurch entstehen Gleichungssysteme, die sich in ihren Charakteristika bisweilen deutlich unterscheiden (siehe auch [2]).

Hat man eine allgemein gültige und numerisch günstige Modellierung gefunden, so wird man gewiss bei der Programmierung der entsprechenden Rechenroutinen Möglichkeiten vorsehen, Restriktionen an die Parameter anzubringen, die nicht zwingend durch die Modellierung gefordert sind (beispielsweise ein fester Radius oder ein

fester Mittelpunkt bei einer ausgleichenden Kugel). Selbstverständlich müssen diese Restriktionen mit Bedacht gewählt werden. So muss man zum Beispiel verhindern, dass Zwangsbedingungen gesetzt werden, die sich in der Summe widersprechen. Dasselbe gilt für Paare von Restriktionen, die den selben Sachverhalt ausdrücken. Auch wenn man diesbezüglich mit größtmöglicher Sorgfalt vorgeht, wird man dennoch auf Fälle stoßen, bei denen eine Konvergenz des Verfahrens trotz offensichtlich adäquater Modellierung und nicht widersprüchlichen Restriktionen nicht gegeben ist.

Der vorliegende Artikel gliedert sich inhaltlich in zwei Teile: Zunächst werden am Beispiel der Bestimmung einer ausgleichenden Raumgeraden nach der L2-Norm drei verschiedene Modellierungen vorgestellt und die speziellen Vor- und Nachteile diskutiert. Anschließend wird bezüglich einer der Ansätze ein Fall analysiert, bei dem eine Konvergenz trotz korrekter Modellierung nicht gegeben ist. Auf der Basis der gewonnenen Erkenntnisse werden Hinweise zum Umgang mit dieser Klasse von Problemen gegeben.

2 Grundsätzliches zum Rechenweg

Bei den folgenden Modellierungen der Raumgeraden handelt es sich wie bei fast allen Ansätzen im Bereich der Formanalyse um Gleichungssysteme, bei denen Unbekannte und Beobachtungen nicht generell in getrennten Summanden vorzufinden sind. Demzufolge führt die notwendige Linearisierung auf einen Ansatz, der als Gauß-Helmert-Modell [3, 5] bekannt ist:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\hat{x},l} d\hat{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_{\hat{x},l} v + F(l, \hat{x}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{bzw. } A \cdot d\hat{x} + B \cdot v + w = 0$$

$$C_{ll} = \sigma_0^2 Q_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (2.2)$$

Die Menge der Unbekannten x enthält die Parameter, die die Form vollständig beschreiben. Unter l versteht man die Menge der Beobachtungen, die in die Ausgleichung eingehen. Im Fall einer Formanalyse handelt es sich dabei fast ausschließlich um die Koordinaten der Punkte, die durch die Ersatzform angenähert werden sollen. Der Vektor v beschreibt die Modifikationen der Beobachtungen, die anzubringen sind, wenn man die Beobachtungen auf die Ersatzform projiziert. Die Designmatrix A entsteht durch die Ableitung des funktionellen Zusammenhangs nach den Parametern x , die Matrix der Bedingungsgleichungen B aus den Ableitungen nach den Beobachtungen.

gen l . Der Vektor w folgt aus dem Funktionswert F an der Stelle der geschätzten Unbekannten und der Beobachtungen, er wird im allgemeinen als Vektor der Widersprüche bezeichnet. Die Matrix C_{ll} enthält die Varianzen und Kovarianzen der Beobachtungen.

Die Gleichung (2.1) stellt den linearisierten Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Unbekannten dar und wird deshalb als mathematisches Modell bezeichnet. Gleichung (2.2) gibt Aufschluss über die statistischen Eigenschaften der Beobachtungen, es handelt sich also um das stochastische Modell.

Die Forderung nach minimaler gewichteter Quadratsumme der Verbesserungen ($v^T P v$) ergibt das lineare Gleichungssystem $N \cdot z = n$, wobei die einzelnen Matrizen die Gestalt

$$\begin{bmatrix} BC_{ll}B^T & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ d\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

annehmen. Sind Restriktionen anzubringen (was oft unerlässlich für den mathematischen Zusammenhang der Ersatzfläche ist), so muss das Normalgleichungssystem wie folgt modifiziert werden:

$$\begin{bmatrix} BC_{ll}B^T & A & 0 \\ A^T & 0 & R^T \\ 0 & R & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ d\hat{x} \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ 0 \\ -b \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Dabei entsteht die Gleichung $R \cdot d\hat{x} + b = 0$ aus einer Bedingungsgleichung (beliebige Funktion der Unbekannten) durch Linearisieren an der Stelle der Näherungswerte der Unbekannten.

Die gesuchten Zuschläge zu den Näherungswerten der Unbekannten erhält man nach der Inversion der Normalgleichungsmatrix aus dem entsprechenden Teil des Vektors z .

$$z = N^{-1}n \quad (2.5)$$

Da es sich im Bereich der Formanalyse fast ausschließlich um nichtlineare Ausgangsmodelle handelt, muss üblicherweise mehrfach iteriert werden, bis die Zuschläge verschwindend gering werden und damit das lokale Minimum der Funktion $\hat{v}^T P \hat{v}$ gefunden wurde.

Von zentraler Bedeutung für die Beurteilung des Gleichungssystems ist nun die Kondition [4, 6] der Matrix N . Je nach untersuchtem Problem gibt es verschiedene Definitionen der Konditionszahl einer Matrix. Für iterative Gleichungslöser ist die spektrale Konditionszahl geeignet. Sie ist definiert durch den Quotienten des maximalen und des minimalen Eigenwertes der Matrix:

$$\text{cond}(N) = \frac{\lambda_{N_{\max}}}{\lambda_{N_{\min}}} \quad (2.6)$$

Die Kondition gilt als Maß dafür, wie stark die Berechnung des Vektors z und damit der Parameter der Form auf kleine Variationen im Vektor n reagiert, wenn man im Rahmen beschränkter Genauigkeit der Zahlendarstellung das Gleichungssystem löst. Gut konditionierte Matrizen sind solche mit einer kleinen Konditionszahl.

Iterative Gleichungslöser sind sehr empfindlich gegenüber schlecht konditionierten Matrizen N . Eine schlechte Kondition bewirkt, dass man entweder sehr viele Iterationen benötigt, um das lokale Minimum zu finden, oder dass

das Verfahren überhaupt nicht konvergiert, obwohl vom mathematischen Standpunkt gesehen eine Lösung existiert. Es ist im Falle einer schlechten Kondition von N auch möglich, dass das Verfahren konvergiert, ohne dass es sich um eine sinnvolle Lösung handelt.

3 Modellbildungen

3.1 Ansatz A

Ein sehr einfacher Ansatz zur Modellierung einer Raumgeraden ergibt sich aus der gedanklichen Projektion der Raumgeraden in die XY-Ebene und in die XZ-Ebene (Abb. 1).

Man erkennt, dass die Raumgerade vollständig durch die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} y &= f(x) = m_y x + b_y \\ z &= g(x) = m_z x + b_z \end{aligned} \quad (3.1)$$

beschrieben werden kann [1]. Eine Restriktion bezüglich der Unbekannten ist nicht vonnöten. Die beteiligten Matrizen werden wie folgt aufgebaut:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_{(2n \times 4)} & d\hat{x} \\ x_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_i & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dm_y \\ db_y \\ dm_z \\ db_z \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} B_{(2n \times 3n)} & \hat{v} \\ \hat{m}_x & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{m}_z & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} w \\ \hat{m}_x + x_i + \hat{b}_x - y_i \\ \hat{m}_z + x_i + \hat{b}_z - z_i \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

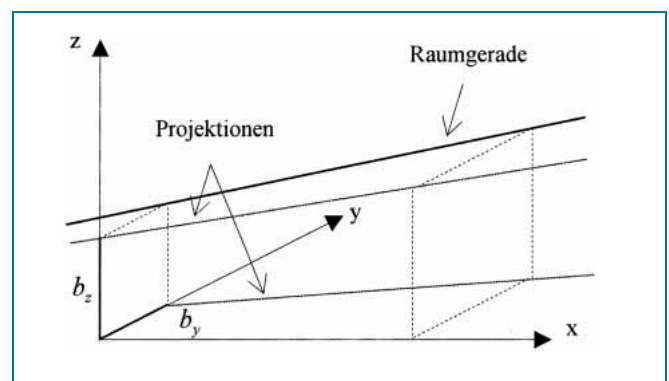


Abb. 1:

Tab. 1: Konditionszahlen von N unter Verwendung von Ansatz A

α	Anzahl der Punkte									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
70°	80	130	160	185	205	230	245	260	270	290
50°	95	130	160	185	200	220	245	255	270	290
30°	100	125	160	190	210	225	240	260	280	290
10°	901	565	478	357	325	290	275	300	310	320
8°	1 630	1 050	770	635	540	470	425	410	385	350
6°	5 055	2 340	1 690	1 355	1 190	1 045	925	840	765	730
4°	18 315	9 825	6 630	5 020	4 120	3 490	3 140	2 745	2 490	2 340
2°	282 840	153 070	93 730	70 365	55 720	46 770	40 225	35 045	31 520	28 252
1°	4 467 615	2 229 265	1 458 825	1 116 825	883 050	730 390	624 970	544 040	482 245	435 045
0.5°	7.7 E7	3.7 E7	2.3 E7	1.7 E7	1.4 E7	1.1 E7	99 973 345	8 892 185	7 721 890	6 965 705
0°	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Bemerkung: n sei die Anzahl der Punkte. Es sind immer die Näherungen aus der letzten Iteration zu verwenden, wenn Parameter eingesetzt werden müssen.

Man erhält ein sehr kompaktes Normalgleichungssystem der Art (2.3), weil es gelang, den mathematischen Zusammenhang mit der minimalen Anzahl von vier Unbekannten zu formulieren: Die zu invertierende Matrix N hat die Dimension $(2n + 4, 2n + 4)$. Die Parameter sind aussagekräftig und leicht zu interpretieren. Erzeugt man für einen ersten Test eine Wolke von 20 Punkten für eine triviale Raumgerade mit den Sollwerten $m_x = m_y = b_x = b_y = 1$ auf einer Länge von etwa 100 m und belegt die Koordinaten mit einem leichten Rauschen (Standardabweichung 1 mm), so bewegen sich die Konditionszahlen für N um den Wert 120. Die Bestimmung der Unbekannten kann deshalb als stabil bezeichnet werden.

Das weist zunächst darauf hin, dass diese Modellierung einer Raumgeraden gut gewählt wurde. Betrachtet man den Ansatz allerdings genauer und variiert gedanklich die Lage der Raumgeraden, so stellt man fest, dass Objekte, die exakt in der YZ-Ebene liegen, nicht dargestellt werden können. In der Praxis wird die ausgeglichene Gerade selten exakt in der YZ-Ebene liegen, wohl aber nahe daran. Es ist zu vermuten, dass die Bestimmung der Parameter unsicherer wird, je kleiner der Winkel α zwischen der YZ-Ebene und der Raumgeraden wird. Um diese Aussage zu qualifizieren, wurden im vorliegenden Fall per Zufallsgenerator jeweils zehn Punktwolken (mit der Standardabweichung 1 mm je Koordinate) für unterschiedliche Raumgeraden erzeugt und als Beobachtungen in eine Ausgleichung eingeführt.

Tabelle 1 stellt die mittleren Konditionszahlen von N der jeweils zehn zufällig erzeugten Geraden dar, wobei die Punktzahl von 10 bis 100 und der Winkel gegen die YZ-Ebene von 70° bis 0° variiert wurde. Es bestätigt sich die Erwartung, dass die Berechnung der Parameter zunehmend unzuverlässiger wird, je mehr sich die Gerade an die YZ-Ebene schmiegt. Wirklich kritische Werte werden aber erst dann erreicht, wenn die Gerade fast mit der YZ-Ebene zusammenfällt. In allen anderen Fällen kann

die Modellbildung als ausreichend stabil angesehen werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass dieser Ansatz einen kleinen und intuitiv verständlichen Parametersatz bietet, sich mit einem kompakten Normalgleichungssystem begnügt und in den allermeisten Fällen ausreichend stabile Berechnungen gewährleistet. Für Geraden, die fast oder ganz in der YZ-Ebene liegen, ist dieser Ansatz jedoch nicht geeignet, weil die Bestimmung der Parameter unzuverlässig wird oder ganz scheitert.

3.2 Ansatz B

Die Raumgerade kann auch modelliert werden, wenn man der Tatsache Rechnung trägt, dass eine solche Gerade durch den Schnitt von zwei Ebenen definiert ist: Ebenen werden am besten durch die Hessesche Normalform [1] beschrieben (Abb. 2).

$$n_x x + n_y y + n_z z - d = 0 \quad (3.1)$$

Bemerkung: Man beachte den Parameter d , der nicht einfach durch eine Konstante 1 ersetzt werden kann. In diesem Fall könnte man keine Geraden darstellen, die den Ursprung des Koordinatensystems beinhalten.

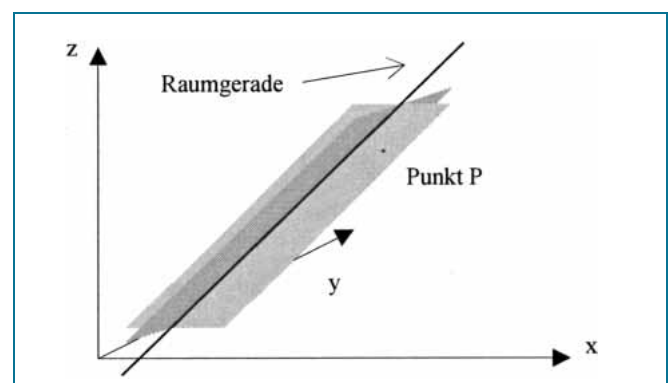


Abb. 2:

Die Modellierung der Raumgeraden als Schnitt zweier Ebenen kann nun folgendermaßen geschehen:

$$\begin{aligned} n_{x_1}x_i + n_{y_1}y_i + n_{z_1}z_i - d_1 &= 0 \\ n_{x_2}x_i + n_{y_2}y_i + n_{z_2}z_i - d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit den Restriktionen

$$\begin{aligned} n_{x_1}^2 + n_{y_1}^2 + n_{z_1}^2 &= 1 \\ n_{x_2}^2 + n_{y_2}^2 + n_{z_2}^2 &= 1 \\ n_{x_1}n_{x_2} + n_{y_1}n_{y_2} + n_{z_1}n_{z_2} &= 0 \\ n_{x_1}x_p + n_{y_1}y_p + n_{z_1}z_p - d_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die beiden ersten Restriktionen drücken die Forderung aus, dass die beiden Normalenvektoren Einheitsvektoren sind. Dadurch wird die Darstellung der Ebene auf eine von prinzipiell unendlich vielen Gleichungen festgelegt. Die Orientierung beider Ebenen zueinander muss auf genau einen möglichen Winkel fixiert werden. Deshalb ist die dritte Restriktion notwendig, die diesen Winkel auf 90° festsetzt. Schlussendlich muss auch die Rotation des Ebenenpaares um die Raumgerade verhindert werden. Die vierte Restriktion sorgt dafür, dass ein beliebig wählbarer Punkt, der nicht auf der Raumgeraden liegen darf, in der ersten Ebene liegen muss.

Die anzulegenden Matrizen gestalten sich wie folgt:

$$\begin{aligned} &A_{(2n*8)} \begin{bmatrix} d\hat{x} \\ dn_{x_1} \\ dn_{y_1} \\ dn_{z_1} \\ dd_1 \\ dn_{x_2} \\ dn_{y_2} \\ dn_{z_2} \\ dd_2 \end{bmatrix} + \\ &B_{(2n*3n)} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ v_{v_{x_i}} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{bmatrix} + \\ &C_{(4*8)} \begin{bmatrix} w \\ \hat{n}_{x_1}x_i + \hat{n}_{y_1}x_i + \hat{n}_{z_1}x_i - \hat{d}_1 \\ \hat{n}_{x_2}x_i + \hat{n}_{y_2}x_i + \hat{n}_{z_2}x_i - \hat{d}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &R_{(4*8)} \begin{bmatrix} 2\hat{n}_{x_1} & 2\hat{n}_{y_1} & 2\hat{n}_{z_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\hat{n}_{x_2} & 2\hat{n}_{y_2} & 2\hat{n}_{z_2} & 0 \\ \hat{n}_{x_2} & \hat{n}_{y_2} & \hat{n}_{z_2} & 0 & \hat{n}_{x_1} & \hat{n}_{y_1} & \hat{n}_{z_1} & 0 \\ x_p & y_p & z_p & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot d\hat{x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$+ \begin{bmatrix} \hat{n}_{x_1} + \hat{n}_{y_1} + \hat{n}_{z_1} - 1 \\ \hat{n}_{x_2} + \hat{n}_{y_2} + \hat{n}_{z_2} - 1 \\ \hat{n}_{x_1}\hat{n}_{x_2} + \hat{n}_{y_1}\hat{n}_{y_2} + \hat{n}_{z_1}\hat{n}_{z_2} \\ \hat{n}_{x_1}x_p + \hat{n}_{y_1}y_p + \hat{n}_{z_1}z_p - d_1 \end{bmatrix} = 0$$

Da Restriktionen bezüglich der Parameter notwendig sind, erhält man ein Normalgleichungssystem der Art (2.4). Die zu invertierende Matrix N hat hier die Dimension $(2n + 12, 2n + 12)$, ist also nur unwesentlich größer als die entsprechende Matrix aus dem Ansatz A. Die Modellierung scheint für alle denkbaren Lagerungen einer Raumgeraden geeignet, Schwachstellen sind beim Durchdenken verschiedener möglicher Spezialfälle nicht zu entdecken. Auch diese Vermutung kann überprüft werden, indem man wie bei Ansatz A beschrieben per Zufallsgenerator jeweils zehn Punktwolken (mit der Standardabweichung 1 mm je Koordinate) für unterschiedliche Raumgeraden erzeugt und für eine Ausgleichung verwendet.

Tabelle 2 stellt die mittleren Konditionszahlen von N der jeweils zehn zufällig erzeugten Geraden dar, wobei die Punktzahl und der Sollrichtungsvektor der Geraden variiert wurde. Es wird deutlich, dass der Ansatz für alle untersuchten Sollrichtungen gleichermaßen geeignet ist. Die Konditionszahlen sind in allen Fällen ausgesprochen niedrig, die Berechnung der Parameter ist also numerisch unkritisch.

Die Vorteile des Ansatzes liegen demnach in der immer noch recht kleinen Größe der Normalgleichungsmatrix N und in der numerisch ausgesprochen stabilen Berechnung der Parameter bei beliebiger Lagerung der Geraden. Als Nachteil kann der Satz der Parameter empfunden werden, weil es sich um Parameter von Ebenen handelt, deren Schnitt erst die eigentlich gewünschte Gerade ergibt. Ist beispielsweise der Richtungsvektor samt Kovarianzmatrix gefragt, so ist ein zusätzlicher Verarbeitungsschritt vonnöten.

3.3 Ansatz C

Der Wunsch nach einer intuitiven Modellierung der Raumgeraden führt zur Punkt-Richtungs-Form [1] (Abb. 3).

Stellt man eine Gerade durch einen Punkt auf der Geraden und einen Richtungsvektor dar, dann ist der mathematische Zusammenhang festgelegt durch:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t_i \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

Damit die Parameter eindeutig werden, sind die Restriktionen

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1 \quad (3.2)$$

$$p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z = 0$$

anzubringen.

Die erste Restriktion sorgt dafür, dass die Menge der theoretisch unendlich vielen möglichen Richtungsvektoren auf einen einzigen (der mit der Länge 1) reduziert wird. Die zweite Bedingungsgleichung drückt aus, dass der Aufpunktvektor und der Richtungsvektor senkrecht

Tab. 2: Konditionszahlen von N unter Verwendung von Ansatz B

	Anzahl der Punkte									
Richtungsvektor	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
(1,1,1)	190	220	290	305	355	380	390	440	470	480
(1,1,0)	200	230	280	320	360	380	390	520	450	480
(1,0,1)	190	230	280	320	340	380	400	420	460	480
(1,0,0)	190	230	280	320	330	380	400	440	460	480
(0,1,1)	180	240	290	300	360	380	400	430	450	480
(0,1,0)	180	240	280	300	330	380	400	430	460	480
(0,0,1)	200	230	280	320	340	370	400	430	460	490

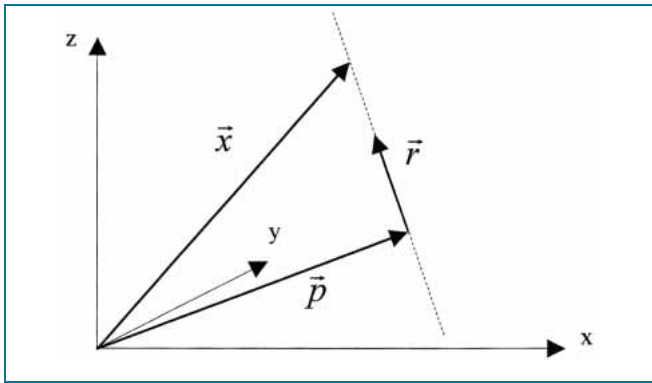


Abb. 3:

aufeinander stehen müssen. Damit ist der Aufpunktvektor ebenfalls eindeutig definiert.

Nach der Linearisierung erhält man folgende Matrizen:

$$\begin{aligned}
 & A_{3n \times (n+6)} \\
 & \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \hat{t}_i & 0 & 0 & \cdots & \hat{r}_x & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_i & 0 & \cdots & \hat{r}_y & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_i & \cdots & \hat{r}_z & \cdots \\ \vdots \\ d\hat{x}^T \end{bmatrix} \\
 & [dp_x \ dp_y \ dp_z \ dr_x \ dr_y \ dr_z \ dt_1 \ \cdots \ dt_n] \\
 & B_{(3n \times 3n)} \quad \hat{v} \\
 & \begin{bmatrix} \vdots \\ -1 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \\
 & w \\
 & \begin{bmatrix} \vdots \\ \hat{p}_x + \hat{t}_i \hat{r}_x - x_i \\ \hat{p}_y + \hat{t}_i \hat{r}_y - y_i \\ \hat{p}_z + \hat{t}_i \hat{r}_z - z_i \\ \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

$$R_{(2 \times (6+n))} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\hat{r}_x & 2\hat{r}_y & 2\hat{r}_z & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{r}_x & \hat{r}_y & \hat{r}_z & \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x^2 + \hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2 - 1 \\ \hat{r}_x \hat{p}_x + \hat{r}_y \hat{p}_y + \hat{r}_z \hat{p}_z \end{bmatrix}$$

Ähnlich wie bei Ansatz B entsteht ein Normalgleichungssystem der Art. (2.4). Die Matrix N ist nun aber bedeutend größer ($4n + 8, 4n + 8$), weil für jeden Punkt während der Ausgleichung ein Laufparameter t geschätzt werden muss, auch wenn diese Parameter t nach der Bestimmung der Geraden nutzlos sind. Um eine Aussage zur Eignung dieses Ansatzes für unterschiedliche Lagerungen von Raumgeraden zu erhalten, kann man wieder wie bei Ansatz A und B verschiedene Parameterkombinationen erzeugen und die Kondition der entstehenden Gleichungssysteme beobachten.

Bemerkung: Die Wahl des Aufpunktes ist unkritisch. Tabelle 3 enthält die mittleren Konditionszahlen für denkbare kritische Fälle und unterschiedliche Größen der Punktwolken. Wie der geometrische Sachverstand vermuten lässt, kann keine Lage der Raumgeraden ausgemacht werden, für die der Ansatz nicht geeignet wäre. Die Kondition der Gleichungssysteme ist in allen Fällen nicht so günstig wie bei Ansatz B. Die Konditionszahlen sind jedoch nicht besorgniserregend hoch, so dass man davon ausgehen kann, dass die Parameterberechnung numerisch stabil erfolgt.

Die Vorteile dieses Ansatzes liegen in der ausgesprochen leicht interpretierbaren Parameterwahl. Zudem ist das Modell für alle denkbaren Lagerungen der Raumgeraden bedenkenlos einsetzbar. Der Nachteil ist sicherlich die recht große Dimension des Gleichungssystems im Hinblick auf Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf.

Tab. 3: Konditionszahlen von N unter Verwendung von Ansatz C

Richtungs- vektor	Anzahl der Punkte									
	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
(1,1,1)	4 270	9 020	12 420	17 500	21 100	26 080	31 300	32 840	37 520	43 700
(1,1,0)	4 730	8 240	11 960	17 350	20 660	25 900	30 970	35 350	37 920	41 600
(1,0,1)	4 250	8 520	12 880	16 190	21 650	24 590	28 490	31 130	38 560	40 120
(1,0,0)	3 800	9 170	12 760	16 560	21 480	25 470	30 180	33 900	38 620	42 642
(0,1,1)	4 370	8 990	12 890	17 390	21 950	24 650	27 655	33 390	37 580	43 790
(0,1,0)	3 910	8 680	12 520	17 850	19 800	24 950	30 060	34 710	39 120	42 140
(0,0,1)	3 900	7 300	12 370	16 650	21 560	25 340	28 840	33 970	37 830	42 500

4 Divergenzprobleme

4.1 Zusätzliche Bedingungen für Ansatz C

Abgesehen von den notwendigen Restriktionen, die sich aus der Modellierung ergeben, können weitere Restriktionen angebracht werden, wenn die berechnete Form Bedingungen gerecht werden soll, die sich aus den Eigenheiten des aktuellen Objektes ergeben. Im Fall der Raumgeraden erscheinen die Angabe eines Fixpunktes, durch den die berechnete Gerade auf jeden Fall gehen muss oder die Vorgabe fester Werte für die Komponenten des Richtungsvektors sinnvolle Zwangsbedingungen zu sein.

$$0 = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + t_l \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} r_x &= r_{x_l} \\ r_y &= r_{y_l} \\ r_z &= r_{z_l} \end{aligned}$$

Aus der Linearisierung des funktionalen Zusammenhanges für Modell C (Gleichung 3.1) unter Berücksichtigung der zwingenden und der möglichen Restriktionen entstehen die nachfolgend angegebenen Matrizen.

$$\begin{bmatrix} A \\ d\hat{x}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & 0 & 0 & 0 \cdots & \hat{r}_x & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & 0 & \cdots & \hat{r}_y & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & \cdots & \hat{r}_z & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$[dp_x \ dp_y \ dp_z \ dr_x \ dr_y \ dr_z \ dt_1 \ \cdots \ dt_n \ dt_l]$$

$$\begin{bmatrix} B \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v} \\ \vdots \\ v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\begin{bmatrix} w \\ \vdots \\ \hat{p}_x + \hat{t}_l \hat{r}_x - x_l \\ \hat{p}_y + \hat{t}_l \hat{r}_y - y_l \\ \hat{p}_z + \hat{t}_l \hat{r}_z - z_l \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ 0 & 0 & 0 & 2\hat{r}_x & 2\hat{r}_y & 2\hat{r}_z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hat{r}_x & \hat{r}_y & \hat{r}_z & \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & 0 & 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \hat{t}_l & 0 & \cdots & 0 & \hat{r}_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} b \\ \hat{r}_x^2 + \hat{r}_y^2 + \hat{r}_z^2 - 1 \\ \hat{r}_x \hat{p}_x + \hat{r}_y \hat{p}_y + \hat{r}_z \hat{p}_z \\ \hat{p}_x + \hat{t}_l \hat{r}_x - x_l \\ \hat{p}_y + \hat{t}_l \hat{r}_y - y_l \\ p_z + \hat{t}_l \hat{r}_z - z_l \\ \hat{r}_x - r_{x_l} \\ \hat{r}_y - r_{y_l} \\ \hat{r}_z - r_{z_l} \end{bmatrix}$$

Die ersten beiden Zeilen in der Matrix R der Restriktionen müssen vorhanden sein, während die verbleibenden Zeilen durch das Anbringen der zusätzlichen Restriktionen entstehen. Die Zeilen drei bis fünf entsprechen der Wahl eines Fixpunktes, die Zeilen sechs, sieben und acht entsprechen jeweils der Vorgabe von Werten r_{x_l} , r_{y_l} und r_{z_l} für die Komponenten r_x , r_y und r_z des Richtungsvektors. Der Vektor x muss um die Unbekannte t_l erweitert werden, wenn ein Fixpunkt angegeben werden soll. Dementsprechend sind auch die jeweils letzten Spalten der Designmatrix A und der Matrix R der Restriktionen zu setzen, die mit dieser zusätzlichen Unbekannten korrespondieren.

4.2 Fallbeispiel

Der dargestellte Ansatz kann getestet werden, indem man für verschiedene Kombinationen von Sollparametern Punktwolken erzeugt, diese mit einem leichten Rauschen belegt und anschließend einer Ausgleichung zuführt. Ohne das Setzen von zusätzlichen Zwangsbedingungen ist die Schätzung der Geraden mit diesem Modell völlig unkritisch. Auch bei unterschiedlichen Kombinationen von Restriktionen wird man in den allermeisten Fällen die erwarteten Ergebnisse erzielen. Es gibt jedoch Konfigurationen, in denen eine Konvergenz des iterativen Berechnungsprozesses offensichtlich nicht gegeben ist, wie in folgendem Beispiel: Zunächst erzeugt man für die Sollparameter

$$\begin{aligned} r_x &= 1 \\ r_y &= 0 \\ r_z &= 0 \\ \vec{p} &\text{ beliebig} \end{aligned} \quad (4.8)$$

per Zufallsgenerator eine Punktwolke der Länge 100 m und belegt die einzelnen Koordinaten mit einem Rauschen von 1 mm. Diese Punkte werden anschließend als Beobachtungen in eine Ausgleichung eingeführt. Nach der fünften Iteration haben sich alle Parameter auf einen konstanten Wert eingependelt. Die Kondition der Matrix N liegt bei 30 Punkten etwa bei 13 000, die Berechnung ist also numerisch unkritisch. Nimmt man nun dieselbe Punktwolke und schätzt eine Raumgerade unter der zusätzlichen Bedingung, dass die X-Komponente des Richtungsvektors r_x den Wert 1 annehmen soll, dann wird der Berechnungsalgorithmus nicht mehr konvergieren. Die Ursache für das Scheitern der Schätzung erschließt sich nicht auf Anhieb:

Wenn eine Divergenz vorliegt, dann liegt das üblicherweise entweder daran, dass die Modellierung der Ersatzform Schwächen in Bezug auf die vorliegende Parameterkonfiguration hat oder die Restriktionen widersprechen sich, so dass eine Schätzung nicht erfolgen kann. Wie aus den vorangegangenen Kapiteln bekannt ist und leicht nachvollzogen werden kann, leistet sich die mathematische Modellierung keine Schwächen hinsichtlich geometrischer Sonderfälle. Betrachtet man die vorliegenden Restriktionen (normierter Richtungsvektor, Aufpunktvektor senkrecht auf Richtungsvektor, feste X-Komponente des Richtungsvektors) genauer,

$$\begin{aligned} r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 &= 1 \\ p_x r_x + p_y r_y + p_z r_z &= 0 \\ r_x &= r_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

so fallen auch hier keine Unstimmigkeiten ins Auge. Schließlich sind die ersten beiden Bedingungen notwendig, um die Gerade eindeutig zu beschreiben. Die neu hinzugekommene Bedingung widerspricht den beiden Defaultrestriktionen im allgemeinen nicht. Sie übt auch offensichtlich keinen allzu starken Zwang auf die Parameterbestimmung aus, da der Erwartungswert für diesen Parameter den gleichen Wert aufweist.

Nachdem logische Überlegungen keinen Hinweis auf die Ursache des Problems geben können, ist es angebracht, das numerische Verhalten des Gleichungssystems nachzuvollziehen. Dabei stellt sich schnell heraus, dass sich die Kondition [1, 4, 6] von N nach dem Hinzufügen der zusätzlichen Restriktion von ursprünglich 10E4 auf 10E16 verschlechtert. Entfernt man das Rauschen der Koordinaten, dann ist N singulär. Da die Berechnung ohne die zusätzliche Restriktion problemlos war, kann das Problem nur in der Restriktionsmatrix R liegen. In der Tat verschlechtert sich die Kondition von R nach der Einführung der dritten Restriktion rapide von 1 auf 10E7. In dem vorliegenden Fall ist die Matrix R wie folgt aufgebaut:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\hat{r}_x & 2\hat{r}_y & 2\hat{r}_z & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{r}_x & \hat{r}_y & \hat{r}_z & \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Die Gleichungen erscheinen zunächst unkritisch. Setzt man jedoch hinreichend gute Näherungswerte ein und stellt die aktuelle Belegung der Matrix dar, dann erkennt man die Ursache der Divergenz.

$$\text{Sei } r_{\text{soll}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{p} \text{ beliebig}$$

$$\Rightarrow R \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & p_x & p_y & p_z & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Formuliert man die erste und die dritte Gleichung aus, dann erhält man die Aussage

$$\begin{aligned} 2dr_x &= 0 \\ \Rightarrow dr_x &= 0 \\ 1dr_x &= 0 \end{aligned}$$

An sich ist kein Widerspruch zu entdecken, denn in der Tat sollte kein nennenswerter Zuschlag zu dem Näherungswert $\hat{r}_x$ erfolgen, wenn dieser bereits dem Sollwert entspricht.

Das Problem ist vielmehr, dass sich die Charakteristik der ersten Bedingungsgleichung durch die besonderen numerischen Eigenschaften dieses Falles verändert. Dies ändert nichts an der Gesamtaussage bezüglich der Parameter, hat aber den Effekt, dass die Matrix R und damit auch die Matrix N fast singulär werden. Nur das statistische Rauschen, das den Koordinaten auferlegt wurde, verhindert einen realen Rangdefekt dieser Matrizen. Da die Matrix N nur fast singulär ist, kann die notwendige Inversion im Laufe des Berechnungsprozesses erfolgen. Wie jedoch bereits gezeigt wurde, verhindert die ausgesprochen schlechte Kondition von N in diesem Fall eine Konvergenz des Verfahrens.



4.3 Gegenmaßnahmen

Im Prinzip hat man nun zwei Möglichkeiten. Entweder man bricht das Verfahren ab oder man beseitigt die Ursache des Problems und fährt mit der Berechnung fort. Im obigem Beispiel ist zu erkennen, dass das divergente Verhalten aufgrund der linearen Abhängigkeit der beiden Bedingungsgleichungen entsteht. Da die erste und die dritte Bedingungsgleichung numerisch gesehen ohnehin denselben Sachverhalt ausdrücken, müsste man nur eine der beiden Gleichungen entfernen, um die Kondition von R und damit von N zu verbessern. In der Tat kann auf diese Weise eine Konvergenz erreicht werden. Bemerkenswerterweise ist es unwichtig, welche der beiden Bedingungen nun eliminiert wird. Dies kann sowohl mit der Bedingung, die die X -Komponente des Richtungsvektors fixiert, als auch mit der Bedingung, die den Richtungsvektor auf die Länge 1 festlegt geschehen. Das überrascht zunächst, weil doch eine der beiden Restriktionen als unabdingbar für eine Eindeutigkeit des Parametersatzes angesehen wird. Man muss sich vor Augen halten, dass durch die Besonderheiten der angesprochenen Fälle beide Bedingungsgleichungen numerisch gesehen dasselbe ausdrücken.

Dennoch ist festzustellen, dass der berechnete Parametersatz nach der Eliminierung der linearen Abhängigkeit rein mathematisch gesehen nicht mehr dem entspricht, was durch die Wahl der zusätzlichen Bedingungsgleichung erreicht werden sollte. Die Werte der Unbekannten werden den Werten entsprechen, die aus einer Schätzung der Raumgeraden ohne die zusätzliche Bedingung resultieren würden.

Nach einem solchen Eingriff in den Berechnungsprozess wird also dem Sachverhalt, dem der Benutzer durch das Anbringen der Restriktion Rechnung tragen wollte, nicht mehr exakt entsprochen. Aus diesem Grunde scheint es ratsam, auf eine automatische Regularisierung zu verzichten und einen Abbruch der Berechnung zu bevorzugen. Das vorgestellte Beispiel ist nur eines von vielen denkbaren Fällen, in denen Restriktionen aus numerischen Gründen voneinander abhängig werden können. Ein Merkmal all dieser Problemfälle ist die verhältnismäßig schlechte Kondition der Matrix R . Deshalb sollte man während der iterativen Berechnung in jedem Schritt die Kondition von R bestimmen und im Falle eines hohen Wertes das Verfahren abbrechen und den Benutzer oder den übergeordneten Prozess durch eine geeignete Fehlermeldung von der Ursache unterrichten.

5 Zusammenfassung

Alle drei vorgestellten Ansätze modellieren letztlich dasselbe Objekt. Dennoch offenbaren sich deutliche Unterschiede, wenn man den Rechengang genauer betrachtet. Während Ansatz A aufgrund seiner Schwäche bei der Darstellung von Geraden nahe der YZ -Ebene nicht zu emp-

fehlen ist, eignen sich die Ansätze B und C für die Ausgleichung von Raumgeraden. Eine Entscheidung zwischen beiden Ansätzen ist eine Frage der Gewichtung der spezifischen Vor- und Nachteile, wobei man wohl aufgrund günstigeren rechentechnischen Eigenschaften eher zu Ansatz B tendieren wird.

Beim Formulieren von zusätzlichen Bedingungen bezüglich der Parameter ist eine gründliche Analyse der geometrischen Zusammenhänge angebracht, um schon im Vorfeld Schwierigkeiten bei der Berechnung zu umgehen. Wie man an dem dargestellten Beispiel jedoch erkennen kann, ist geometrischer Sachverstand beim Anbringen von Restriktionen kein Garant für eine fehlerfreie Berechnung der gewünschten Parameter. Wie gezeigt wurde kann es durch numerische Besonderheiten in bestimmten Fällen zu einem Versagen des Algorithmus kommen, ohne dass dies bei der Wahl der Restriktionen vorauszusehen gewesen wäre. Um solche Situationen zu erkennen, sollte grundsätzlich in jeder Iteration die Kondition der Matrix R der Bedingungsgleichungen bestimmt werden. Ist dieses Maß zu hoch, dann muss die Berechnung abgebrochen werden.

Das Eliminieren von linear abhängigen Bedingungsgleichungen während des Prozesses ist keine geeignete Gegenmaßnahme. Dadurch kann zwar eine Regularisierung des Gleichungssystems erreicht werden. Die resultierenden Parameterwerte genügen dann aber nicht mehr exakt den Forderungen, die der Benutzer an die Schätzung gestellt hat.

Literatur

- [1] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik / GROSCHKE, G., ZIEGLER, V. 25. durchgesehene Auflage. Frankfurt: Verlag Harry Deutsch. 1991.
- [2] DRIXLER, E.: Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. Heft 409, Reihe C, München: Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 2002 – ISBN 3-7696-9554-6.
- [3] GRAFAREND, E., SCHAFFRIN, B.: Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen. BI Wissenschaftsverlag, 1993. ISBN 3-411-16381-X.
- [4] HIGHAM, N. J.: Accuracy and Stability of Numerical Algorithms. Philadelphia: SIAM, 1996.
- [5] HÖPCKE, W.: Fehlerlehre und Ausgleichungsrechnung. Berlin, New York: de Gruyter, 1980.
- [6] SCHWARZ, H. R.: Numerische Mathematik. B. G. Teubner, Stuttgart, 1997.

Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Ing. Stephan Kupferer,
Wissenschaftlicher Mitarbeiter,
Geodätisches Institut,
Englerstraße 7,
76128 Karlsruhe,
Tel.: 07 21/6 08 23 07,
E-mail: kupferer@gik.uni-karlsruhe.de

Zusammenfassung

Im ersten Teil des Beitrags werden drei unterschiedliche Ansätze zur Schätzung einer ausgleichenden Raumgeraden nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate vorgestellt. Eine Betrachtung der numerischen Eigenschaften und der Eignung hinsichtlich denkbarer Sonderfälle zeigt die unterschiedlichen Vor- und Nachteile der einzelnen Modellbildungen auf.

Der zweite Teil nimmt Bezug auf einen der vorgestellten Ansätze und widmet sich Fällen, in denen das Verfahren auch nach vielen Iterationen nicht konvergiert, obwohl die Modellierung keine Schwächen bezüglich denkbarer Sonderfälle aufweist und der Satz der Restriktionen geeignet sein müsste, ein reguläres System zu erzeugen. Anhand eines Beispiels erfolgt eine Bestimmung der Ursache für die Divergenz und eine Diskussion möglicher Gegenmaßnahmen.

Abstract

The first part of this article presents different way's to estimate three-dimensional lines by means of the least squares method. A closer view to the numerical properties and the applicability in critical circumstances reveals their assets and drawbacks.

The second part refers to cases, in which a necessary iterative calculation doesn't seem to converge to a local or global extreme even if the chosen model is supposed to be appropriate for every possible variation of its parameters and the set of restrictions is proven to produce a regular system of equations. It makes use of an approximating 3D-line as defined in the first part to locate the problem and to give advice how to get around such situations

BUCHBESPRECHUNG

Hartmut Asche, Christian Herrmann (Hrsg.)

Web.Mapping 2

Telekartographie, Geovisualisierung und mobile Geodienste

Herbert Wichmann Verlag, Hüthig GmbH & Co. KG, Heidelberg, 2003, 208 Seiten, ISBN 3-87907-388-0, Euro 40,-

Das Internet hat sich in den letzten Jahren zum weltweit bedeutendsten Kommunikations- und Informationsmedium entwickelt. Die enge Verknüpfung vieler Informationen mit der Erdoberfläche führt zwangsläufig zu einem rasant wachsenden Bedarf an Karten für das Internet. Die Karte dient nicht mehr allein der Veranschaulichung der Informationen, sondern wird durch die Interaktionsfähigkeit mit dem Benutzer heute auch vielfach zur Gewinnung zusätzlicher oder neuer Informationen genutzt, wodurch diese sich mittlerweile zu einem wichtigen Bestandteil des Internets entwickelt hat. Im vorliegenden Buch „Web.-Mapping 2“ werden der derzeitige Stand sowie die wichtigsten Tendenzen der Internet-Kartographie in Methodik, Technik und Anwendung aufgegriffen. Die in fünf The-

menabschnitte gegliederten Beiträge sind eine überarbeitete Auswahl von Aufsätzen der Web.Mapping-Symposien der Jahre 2000 sowie 2001 und führen so das erfolgreiche Modell des ersten Bandes dieser Reihe mit dem Titel „Web.Mapping 1“ fort. Zum Einstieg in die Thematik werden unter der Überschrift „Webmapping – Status und Perspektiven“ Entwicklung und Stand der Internet-Kartographie von der Einführung dieses Mediums bis heute aufgezeigt. Es werden aktuelle Themen des „Webmappings“ aufgegriffen und auf Anforderungen, Trends sowie amtliche Datenquellen eingegangen. Der nächste Abschnitt „Geovisualisierung – Methodik und Anwendung“ beschäftigt sich mit grundsätzlichen Kriterien der Kartenpräsentation im Internet. Ausgehend von

den gängigen Kartenformaten werden einerseits klassische Fragestellungen der Symbolisierung, Schriften und Farben diskutiert, andererseits werden zusätzliche, für das Medium Internet wichtige Kriterien wie Animation, Interaktion etc. von Karten im Web behandelt. Zusätzlich werden neuere Formate und Techniken der Kartendarstellung im Internet dargestellt und eine Einführung in virtuelle dreidimensionale Karten gegeben.

Im dritten Teil „Innovative Projekte und Applikationen“ werden eine Reihe von praktischen Beispielen existierender internetbasierter Kartenanwendungen in Form von interaktiven Atlanten oder Virtual Reality Systemen (VRS) vorgestellt.

Unter der Überschrift „Geoinformation und Mobile Computing“ wird im darauf folgenden Block auf die Anforderungen und den Aufbau kartenbasierender Applikationen für mobile Endgeräte eingegangen. Dabei werden sowohl grundlegende Technologien des „Mobile Computings“ als auch konkrete Projekte und deren Umsetzung erläutert.

Abschließend werden unter dem Schlagwort „Webmapping-Praxis“ Standardisierungsbestrebungen für die Darstellung und Verarbeitung von Karten im Internet aufgezeigt. Dabei wird zum einen ein Überblick über die Aktivitäten des OpenGIS Consortiums (OGC) gegeben und zum anderen ein relativ junger, vom World Wide Web Consortium (W3C) verabschiedeter Vektorgrafikstandard namens SVG vorgestellt.

Das Buch „Web.Mapping 2“ kann als Leitfaden für den derzeitigen Stand und auch für zukünftige Entwicklungen im Bereich der Internet-Kartographie angesehen werden. Das Werk sensibilisiert jedoch auch auf spezielle Anforderungen kartenbasierter Anwendungen im Internet. Zur Beschaffung eines Überblicks eignet sich daher der Band für Studierende, Anwender und Interessenten aus dem Bereich GIS, Geodäsie, Kartographie und weiterer verwandter Fachdisziplinen und gibt darüber hinaus auch wertvolle Anregungen für eigene Anwendungen.

J. BLANKENBACH, Darmstadt