

Zur Raumstrecke im Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten

Eberhard Mittermayer, Berlin

Der Beitrag behandelt den Abstand zweier Punkte im Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten als Funktion des Kugelradius.

1 Einleitung

In diesem Beitrag betrachten wir die Raumstrecke zweier Punkte P_i und P_j in Verbindung mit dem vom Autor eingeführten Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$; siehe in den Grundlagen MITTERMAYER (1998 S. 111 ff.), Abb. 1.

In diesem Koordinatensystem beschreiben die Punkte P_i bzw. P_j Raumkurven, nämlich die r -Linien ($\bar{y} = \text{const.}$, $\bar{z} = \text{const.}$) bezüglich

$P_i : (\bar{y} = \bar{y}_i, \bar{z} = \bar{z}_i)$ bzw. $P_j : (\bar{y} = \bar{y}_j, \bar{z} = \bar{z}_j)$.

Diese Raumkurven ergeben sich als Durchdringung zweier biharmonischer Flächen, nämlich bezüglich

P_i : die Flächen $\bar{y} = \bar{y}_i$ und $\bar{z} = \bar{z}_i$ bzw.

P_j : die Flächen $\bar{y} = \bar{y}_j$ und $\bar{z} = \bar{z}_j$.

Umfangreiche differentialgeometrische und funktionentheoretische Betrachtungen dieser biharmonischen Flä-

chen siehe in sechs Beiträgen MITTERMAYER (1999a), (1999b), (1999c), (1999d), (2000a), (2000b). Als Durchstoß der r -Linien ($\bar{y} = \text{const.}$, $\bar{z} = \text{const.}$) mit der Kugel $r = \text{const.}$ (biharmonische Fläche) erhalten wir den Punkt $P(\bar{y}, \bar{z})$ in der Kugelfläche $r = \text{const.}$ liegend. In klassischer zweidimensionaler Betrachtung sind $\bar{y}$ und $\bar{z}$ mit der Dimension $[m]$ Lagekoordinaten, die Mercator-Koordinaten sphärischer Approximation.

Der Abstand d_{ij} der Punkte P_i und P_j ist eine Funktion von r , dem Radius der Kugel,

$$d_{ij}(r) = \overline{P_i P_j} = \left| \vec{X}_i(r; \bar{y}_i, \bar{z}_i) - \vec{X}_j(r; \bar{y}_j, \bar{z}_j) \right| \quad (1)$$

mit dem Ortsvektor

$$\vec{X}_i(r; \bar{y}_i, \bar{z}_i) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \left(\frac{\bar{y}_i}{r} \right) \text{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{r} \right) \\ r \sin \left(\frac{\bar{y}_i}{r} \right) \text{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{r} \right) \\ r \tanh \left(\frac{\bar{z}_i}{r} \right) \end{pmatrix} \quad (2)$$

und

$$\text{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{r} \right) = \frac{1}{\cosh \left(\frac{\bar{z}_i}{r} \right)}, \quad (3)$$

analog der Ortsvektor $\vec{X}_j$.

Wie verhält sich der Abstand d_{ij} , wenn der Radius der Kugel über alle Grenzen wächst? Das Grenzverhalten wird im Folgenden betrachtet, ein Beitrag zum tieferen Verständnis der Mercator-Koordinaten sphärischer Approximation.

2 Der Abstand d_{ij} für $r = ct \rightarrow \infty$

Mit der Wahl des einfachsten Ansatzes des Kugelradius r als Funktion der Zeit t

$$r = ct \quad (4)$$

beschreiben die Punkte P_i und P_j Bahnkurven; d. h. es wird eine Verbindung zur Kinematik hergestellt. Mit diesem Ansatz (4) entfernen sich die Punkte P_i und P_j längs ihrer Bahnkurven ($\bar{y} = \bar{y}_i$, $\bar{z} = \bar{z}_i$) bzw. ($\bar{y} = \bar{y}_j$, $\bar{z} = \bar{z}_j$) mit konstanter Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = c \left[\frac{m}{\text{sec}} \right]. \quad (5)$$

Die Bahnkurven der Punkte P_i bzw. P_j werden durch folgende Ortsvektoren als Funktion der Zeit t beschrieben

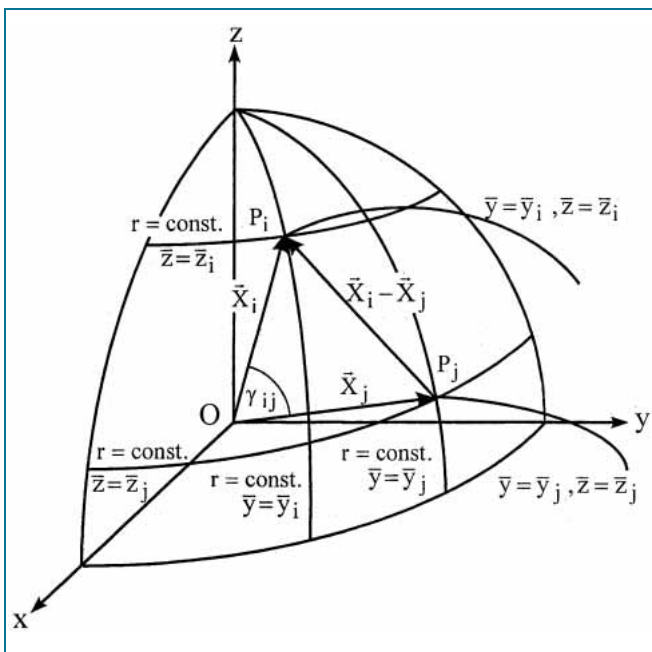


Abb. 1: Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$

$$\vec{X}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \cos \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ ct \sin \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ ct \tanh \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \end{pmatrix} \quad (6)$$

bzw.

$$\vec{X}_j(t) = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \cos \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ ct \sin \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ ct \tanh \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Im Weiteren betrachten wir das Dreieck OP_iP_j in der Abb. 1, siehe Abb. 2.

Mit den Einheitsvektoren als Funktion der Zeit bezüglich der Ortsvektoren (6) und (7)

$$\vec{n}_i(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i) = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ \sin \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ \tanh \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

bzw.

$$\vec{n}_j(t; \bar{y}_j, \bar{z}_j) = \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ \sin \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ \tanh \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

folgen die Darstellungen

$$\vec{X}_i(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i) = ct \vec{n}_i \quad (10)$$

bzw.

$$\vec{X}_j(t; \bar{y}_j, \bar{z}_j) = ct \vec{n}_j. \quad (11)$$

Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren (8) und (9) ist eine Funktion der Zeit

$$\cos \gamma_{ij}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle, \quad (12)$$

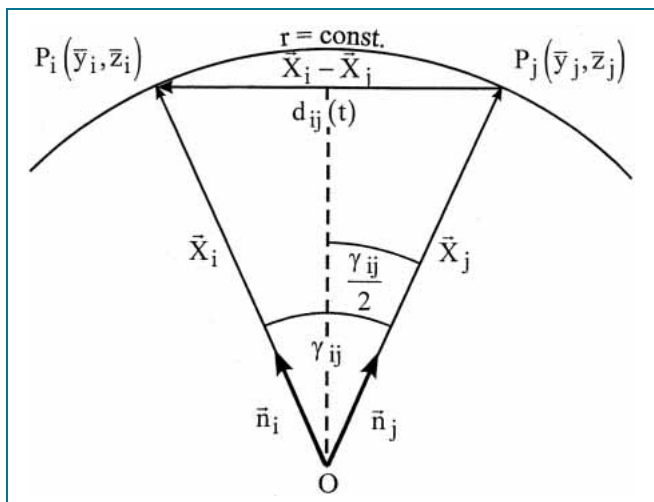


Abb. 2: Die Raumstrecke $\overline{P_iP_j}$

ausführlich

$$\langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = \cos \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \cos \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) + \sin \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \sin \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) + \tanh \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \tanh \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right). \quad (13)$$

Mit den Grenzwerten für $t \rightarrow \infty$ und $\bar{y} = \text{const.} \neq 0$ bzw. $\bar{z} = \text{const.} \neq 0$ sowie konstanter Radialgeschwindigkeit c

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tanh \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right) = 0 \quad (14)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{sech} \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right) = 1 \quad (15)$$

folgt der Grenzwert des Skalarproduktes (13)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle = 1, \quad (16)$$

d. h. der Zentriwinkel γ_{ij} strebt für $t \rightarrow \infty$ gegen Null

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_{ij}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = 0, \quad (17)$$

ein Grenzwert dem man sich beliebig genau nähert, jedoch nie exakt erreicht. Betrachten wir nunmehr in der Abb. 2 den Abstand d_{ij} als Funktion der Zeit t

$$d_{ij}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = 2 ct \sin \frac{\gamma_{ij}(t)}{2}. \quad (18)$$

Mit der Beziehung

$$2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \cos \gamma \quad (19)$$

folgt aus (18) der Abstand im Quadrat

$$d_{ij}^2(t) = 2 c^2 t^2 [1 - \cos \gamma_{ij}(t)] \quad (20)$$

und im Weiteren mit dem Skalarprodukt (12) die Grundformel

$$d_{ij}^2(t) = 2 c^2 t^2 [1 - \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle]. \quad (21)$$

Diese Grundformel (21) folgt ebenso direkt aus den Ortsvektoren (10) und (11). Wir erhalten den Abstand der Punkte P_i und P_j im Quadrat

$$d_{ij}^2 = |\vec{X}_i - \vec{X}_j|^2 = c^2 t^2 |\vec{n}_i - \vec{n}_j|^2, \quad (22)$$

im Weiteren

$$d_{ij}^2 = c^2 t^2 \langle (\vec{n}_i - \vec{n}_j), (\vec{n}_i - \vec{n}_j) \rangle, \quad (23)$$

$$d_{ij}^2 = c^2 t^2 [\langle \vec{n}_i, \vec{n}_i \rangle - 2 \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle + \langle \vec{n}_j, \vec{n}_j \rangle]. \quad (24)$$



Mit den Skalarprodukten der Einheitsvektoren (8) und (9)

$$\langle \vec{n}_i, \vec{n}_i \rangle = 1, \quad \langle \vec{n}_j, \vec{n}_j \rangle = 1 \quad (25)$$

folgt

$$d_{ij}^2 = 2 c^2 t^2 [1 - \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle], \quad (26)$$

die Formel (21).

Mit dem Grenzwert (16) folgt der unbestimmte Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{ij}^2(t) = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle}{\left(\frac{1}{ct}\right)^2} = 2 \cdot \frac{0}{0}. \quad (27)$$

Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt den Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{\partial}{\partial t} \langle \vec{n}_i, \vec{n}_j \rangle}{\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{ct}\right)^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{N(t)} \quad (28)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} Z = & \bar{y}_i \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{y}_j \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_j \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{y}_i \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{y}_j \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_i \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_j \cdot \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \end{aligned} \quad (29)$$

und

$$N = \frac{1}{ct}. \quad (30)$$

Mit den Grenzwerten (14) und (15) folgen die Grenzwerte der Funktionen Z Box (29) und N (30) für $t \rightarrow \infty$ und ($\bar{y} = \text{const.} \neq 0$, $\bar{z} = \text{const.} \neq 0$, $c = \text{const.} \neq 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = 0 \quad (31)$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = 0 \quad (32)$$

und damit bezüglich des Abstandes im Quadrat wiederum ein unbestimmter Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{ij}^2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z(t)}{N(t)} = \frac{0}{0}. \quad (33)$$

Nochmalige Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{ij}^2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t} [Z(t)]}{\frac{\partial}{\partial t} [N(t)]} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) \quad (34)$$

mit der Funktion $Q(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$

$$\begin{aligned} Q = & \bar{y}_i^2 \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - 2\bar{y}_i\bar{y}_j \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{y}_j^2 \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i^2 \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^3\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - 2\bar{z}_i\bar{z}_j \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_j^2 \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}^3\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \text{Terme} \left[\sin\left(\frac{\text{const.}}{ct}\right), \tanh\left(\frac{\text{const.}}{ct}\right) \right] [m^2]. \end{aligned} \quad (35)$$

Diese Funktion Q Box (35) hat 6 Terme, die ausschließlich cos-Funktionen bzw. sech-Funktionen enthalten, die übrigen Terme jedoch mindestens eine sin-Funktion bzw. tanh-Funktion. Aufgrund der Grenzwerte (14) und (15) liefern nur die genannten 6 Terme einen Beitrag zum Grenzwert der Funktion Q für $t \rightarrow \infty$. Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = \bar{y}_i^2 - 2\bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{y}_j^2 + \bar{z}_i^2 - 2\bar{z}_i\bar{z}_j + \bar{z}_j^2, \quad (36)$$

vereinfacht

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2 + (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2 [m^2]. \quad (37)$$

Damit erhalten wir aus (34) und (37) als Ergebnis den Grenzwert des Abstandes d_{ij} der Punkte P_i und P_j für $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} d_{ij}(t) = d_{ij}^\infty &= \sqrt{(\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2 + (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2} \\ &= \sqrt{\Delta \bar{y}^2 + \Delta \bar{z}^2} [m] \end{aligned}, \quad (38)$$

den Lehrsatz des Pythagoras mit den Mercator-Koordinaten $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j$ als kartesische Koordinaten. Dies ist das erwartete Ergebnis, denn die (isothermen) metrischen Mercator-Koordinaten sphärischer Approximation verhalten sich für $t \rightarrow \infty$ wie (isotherme) kartesische Koordinaten; siehe hierzu in MITTERMAYER (2002).

3 Die Projektion der Raumstrecke in die (y,z)-Ebene

Betrachten wir nunmehr die Projektion P' der Bahnkurven (6) und (7) in die (y,z)-Ebene, dargestellt durch die Ortsvektoren

$$\vec{X}'_i(t) = \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \\ ct \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \end{pmatrix}, \quad (39)$$

bzw.

$$\vec{X}'_j(t) = \begin{pmatrix} y_j \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ ct \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \end{pmatrix}, \quad (40)$$

siehe Abb. 3.

Der Abstand d'_{ij} der Punkte P'_i und P'_j in der (y,z)-Ebene ist eine Funktion der Zeit t

$$d'_{ij}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = |\vec{X}'_i - \vec{X}'_j|, \quad (41)$$

im Weiteren der Abstand im Quadrat

$$d'^2_{ij}(t) = |\vec{X}'_i - \vec{X}'_j|^2 = \langle (\vec{X}'_i - \vec{X}'_j), (\vec{X}'_i - \vec{X}'_j) \rangle, \quad (42)$$

ausführlich

$$d'^2_{ij}(t) = \frac{Z_1}{N_1} \quad (43)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} Z_1 = & \sin^2\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) + \sin^2\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - 2 \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \tanh^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) + \tanh^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - 2 \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right). \end{aligned} \quad (44)$$

und

$$N_1 = \left(\frac{1}{ct}\right)^2. \quad (45)$$

Mit den Grenzwerten (14) und (15) folgen die Grenzwerte der Funktionen Z_1 Box (44) und N_1 (45) für $t \rightarrow \infty$ und ($\bar{y} = \text{const.} \neq 0$, $\bar{z} = \text{const.} \neq 0$, $c = \text{const.} \neq 0$)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_1(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = 0 \quad (46)$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = 0. \quad (47)$$

Damit erhalten wir für den Abstand der Punkte P'_i und P'_j im Quadrat einen unbestimmten Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'^2_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_1(t)}{N_1(t)} = \frac{0}{0}. \quad (48)$$

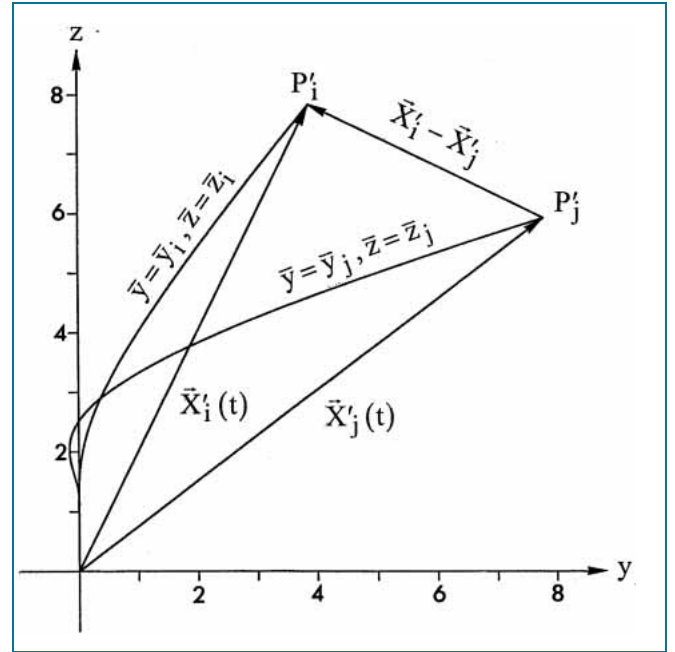


Abb. 3: Die Projektion der Raumstrecke $\overline{P'_i P'_j}$

Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'^2_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t} [Z_1(t)]}{\frac{\partial}{\partial t} [N_1(t)]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_2(t)}{N_2(t)} \quad (49)$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} Z_2 = & \bar{y}_i \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_i \cdot \sin^2\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \\ & + \bar{y}_j \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_j \cdot \sin^2\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{y}_i \cdot \cos\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{y}_j \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_j \cdot \sin\left(\frac{\bar{y}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{y}_j}{ct}\right) \operatorname{sech}\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_i \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \\ & + \bar{z}_j \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_i \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \tanh\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right) \\ & - \bar{z}_j \cdot \tanh\left(\frac{\bar{z}_i}{ct}\right) \operatorname{sech}^2\left(\frac{\bar{z}_j}{ct}\right). \end{aligned} \quad (50)$$

und

$$N_2 = \frac{1}{ct} . \quad (45)$$

Damit folgt wiederum ein unbestimmter Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Z_2(t)}{N_2(t)} = \frac{0}{0} . \quad (52)$$

Nochmalige Anwendung der Regel von l'Hospital ergibt für den betrachteten Abstand im Quadrat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial}{\partial t} [Z_2(t)]}{\frac{\partial}{\partial t} [N_2(t)]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Q}(t) \quad (53)$$

mit der Funktion $\tilde{Q}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j)$,

$$\begin{aligned} \tilde{Q} = & \bar{y}_i^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ & - 2\bar{y}_i\bar{y}_j \cdot \cos \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \cos \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech} \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ & + \bar{y}_j^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\bar{y}_j}{ct} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ & + \bar{z}_i^2 \cdot \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \\ & - 2\bar{z}_i\bar{z}_j \cdot \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ & + \bar{z}_j^2 \cdot \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\bar{z}_j}{ct} \right) \\ & + \text{Terme} \left[\sin \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right), \tanh \left(\frac{\text{const.}}{ct} \right) \right] [m^2] . \end{aligned} \quad (54)$$

Es folgt der Grenzwert der Funktion $\tilde{Q}$ für $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Q}(t; \bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j) = \bar{y}_i^2 - 2\bar{y}_i\bar{y}_j + \bar{y}_j^2 + \bar{z}_i^2 - 2\bar{z}_i\bar{z}_j + \bar{z}_j^2, \quad (55)$$

vereinfacht

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = (\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2 + (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2 [m^2] . \quad (56)$$

Damit erhalten wir aus (53) und (56) als Ergebnis den Grenzwert des Abstandes d'_{ij} der Punkte P'_i und P'_j in der (y,z)-Ebene für $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'_{ij}(t) = d'^{\infty}_{ij} = \sqrt{(\bar{y}_i - \bar{y}_j)^2 + (\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2} = \sqrt{\Delta \bar{y}^2 + \Delta \bar{z}^2} [m] , \quad (57)$$

vergleiche Formel (38). Wir erkennen gleiche Abstände der Punkte P_i und P_j sowie deren Projektionen P'_i und P'_j für $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{ij}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} d'_{ij}(t) = \sqrt{\Delta \bar{y}^2 + \Delta \bar{z}^2} [m] ; \quad (58)$$

d. h. Parallelität der Raumstrecken $\overline{P_i P_j}$ und $\overline{P'_i P'_j}$ im R^3 für $t \rightarrow \infty$.

Analog folgen die Zusammenhänge zur Raumstrecke im Koordinatensystem transversaler metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \tilde{y}, \tilde{x})$ mit der y-Achse als Drehachse und den Gaußschen Koordinaten $P(\tilde{x}, \tilde{y})$ der Kugel $r = \text{const.}$ mit der vom Autor eingeführten Vektordarstellung

$$\vec{X}(r, \tilde{y}, \tilde{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \left(\frac{\tilde{x}}{r} \right) / \cosh \left(\frac{\tilde{y}}{r} \right) \\ r \tanh \left(\frac{\tilde{y}}{r} \right) \\ r \sin \left(\frac{\tilde{x}}{r} \right) / \cosh \left(\frac{\tilde{y}}{r} \right) \end{pmatrix}, \quad (59)$$

siehe in den Grundlagen MITTERMAYER (1998 S. 266 ff.).

Literatur

- MITTERMAYER, E.: Die Kugel, Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 2. erweiterte Auflage, Berlin, 1998.
- MITTERMAYER, E.: Hyperbolische Drehflächen bezgl. der r-Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 175–187, 1999a.
- MITTERMAYER, E.: Die Flächennormale der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 258–265, 1999b.
- MITTERMAYER, E.: Implizite Darstellung der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) und Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 295–299, 1999c.
- MITTERMAYER, E.: Die Gaußschen Koordinaten als Ortsfunktionen und Funktionentheorie / Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten. S. 405–416, 1999d.
- MITTERMAYER, E.: Differentialgeometrische Betrachtungen der biharmonischen Flächen $r \cdot l = \text{const.}$ Allgemeine Vermessungsnachrichten 107, S. 23–30, 2000a.
- MITTERMAYER, E.: Eine weitere Parameterdarstellung der biharmonischen Flächen $r \cdot \lambda = \text{const.}$ Allgemeine Vermessungsnachrichten 107, S. 94–103, 2000b.
- MITTERMAYER, E.: Die Mercator-Projektion als Lösung einer Anfangswertaufgabe (Kinematik). Zeitschrift für Vermessungswesen 127, S. 250–261, 2002.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. EBERHARD MITTERMAYER,
Univ.Prof., TU Berlin,
Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik,
Sekt. H12,
Straße des 17. Juni 135,
10623 Berlin.
E-mail: mit@mca.bv.tu-berlin.de

Zusammenfassung

In Verbindung mit dem eingeführten Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$ wird der Abstand zweier Punkte $P_i(r; \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ und $P_j(r; \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ als Funktion des Kugelradius $r = ct$ für $t \rightarrow \infty$ betrachtet. Der Grenzwert existiert. Man erhält eine Formel, den Lehrsatz des Pythagoras mit den Mercator-Koordinaten $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j$ als kartesische Koordinaten. Das gleiche Ergebnis erhält man bezüglich der Projektionen P'_i und P'_j in der (y, z) -Ebene.

Summery

In connection with the introduced coordinate system of metric Mercator coordinates $P(r, \bar{y}, \bar{z})$ the distance of two points $P_i(r; \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ and $P_j(r; \bar{y}_j, \bar{z}_j)$ as a function of the radius $r = ct$ will be considered for $t \rightarrow \infty$. The limit exists. We obtain a formula, the thesis of Pythagoras using Mercator-coordinates $\bar{y}_i, \bar{z}_i, \bar{y}_j, \bar{z}_j$ as cartesian coordinates. The same result follows using the projections P'_i and P'_j into the (y, z) -plane.

BUCHBESPRECHUNG

Pioniere der Alpentopografie

Die Geschichte der Schweizer Kartenkunst

Von Paul Caminada,
240 Seiten, 420 Abb. vierfarbig
ISBN 3-905111-99-3, 59,80

Erobern, erforschen, vermessen, benennen

Die Landeskarte der Schweiz gilt als eine der weltweit besten topografischen Karten. Das Kartenwerk, das seit 1935 mit modernsten technischen Maßstäben herausgegeben wird, beruht auf einer 200 Jahre alten topografischen Tradition: Gerade in den Alpenregionen, die nur schwer zugänglich waren, wurde in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein unglaublicher Aufwand betrieben, um das Gelände zu vermessen und anschließend kartografisch festzuhalten. Die Topografen bestiegen Hunderte von Berggipfeln – oftmals als Erstbesteigungen

– und meisterten schwierige Überquerungen. Sie waren nicht nur präzise Vermesser, sondern auch hervorragende Alpinisten.

In „Pioniere der Alpentopografie“ stellt Paul Caminada – reich illustriert und mit einem ausführlichen Anmerkungs- und Quellenapparat versehen – die Anfänge der Schweizer Topografie und ihre Entwicklung bis in die ersten Jahrzehnte des 20. Jahrhunderts dar, also bis in die Zeit, als Vermessungsflugzeuge die Landgeometer abzulösen begannen. Ausblicke auf die moderne Vermessungstechnik verfolgen die Entwicklung bis in die heutige Zeit. Der Schwerpunkt liegt auf den ersten bei-



*Eduard Imhof als Alpinist
Farbstiftzeichnung des Bruders Paull aus dem Jahre 1915. (aus „Pioniere der Alpentopographie“ von Paul Caminada)*

den nationalen Kartenwerken der Schweiz, der Dufourkarte, die zwischen 1844 und 1864 erschien, und dem Siegfriedatlas, der zwischen 1868 und 1950 entstand; die unterhaltsam formulierte Schilderung beginnt aber schon im

Spätmittelalter und widmet sich ausführlich den frühen Reliefplänen und Kartenwerken der Schweiz. Die Arbeitsinstrumente der Topografen werden ebenso vorgestellt wie – in mehr als 270 Kurzbiografien – die wichtigen Persönlichkeiten und ihre Leistungen: eine umfassende Darstellung der Kartografie der Schweiz, von ihren Anfängen bis heute.

Paul Caminada, geboren 1941, ist Ingenieur und war Teilhaber eines Ingenieurbüros in Zürich. Er hat verschiedene Bücher über den Bau der Rhätischen Bahn, den Glacier Express, die Geschichte des Straßenbaus in Graubünden sowie die Entstehung und Entwicklung des Wintersports verfasst, ist passionierter Fotograf und Mitglied der Schweizerischen Gesellschaft für Kartographie. Er lebt in Thalwil.