



# Anwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Berechnung der Refraktion bei der trigonometrischen Höhenübertragung

Bernd Binnenbruck, Claudius Laumen, Oleg Mozzuchin, Gernot Seegers, Bertold Witte

An praktischen Beispielen wird die Berechnung des Einflusses der Refraktion bei der trigonometrischen Höhenübertragung unter Anwendung der Ähnlichkeits- und Modellierungstheorie betrachtet. Es wird auf Einschränkungen für den Einsatz dieser Methode hingewiesen.

## 1 Grundlagen

### 1.1 Prinzip des Systemübergangs Modell-Natur

Die Ähnlichkeitstheorie als Wissenschaft von den ähnlichen Erscheinungen wird bei wissenschaftlichen und angewandten Untersuchungen in großem Umfang verwendet. Erscheinungen werden als ähnlich betrachtet, wenn sie von gleicher physikalischer Natur sind, in gleicher Weise in Form von Differentialgleichungen beschrieben werden können und sich unter Einwirkung gleicher Kräfte in geometrisch ähnlichen Systemen entwickeln. In diesem Fall können die gesuchten Eigenschaften einer Erscheinung aus den Charakteristiken einer anderen durch einfache Übertragung erhalten werden. Die Ähnlichkeitstheorie weist tief greifende Verbindungen mit der Dimensionsanalyse auf, wobei die Modellierungsmethodik ähnliche Erscheinungen benutzt.

Die Grundeigenschaft ähnlicher Erscheinungen ist das Vorhandensein dimensionsloser Größen, welche ein und denselben Zahlenwert erhalten:

$$\pi = \text{idem} \quad (1)$$

Die Bezeichnung „idem“ bedeutet hierbei „entsprechend gleich“. Der Begriff „konstant“ wird nicht verwendet, da Größen ins Auge gefasst werden, die paarweise in verschiedenen Systemen benutzt werden.

Zur Feststellung der Art der Verbindung zwischen den zu untersuchenden physikalischen Erscheinungen werden Zahlen eines Zahlenexperiments verwendet. Der erste Schritt bei Anwendung der Ähnlichkeitsmethode ist die Wahl der die Erscheinung bestimmenden Parameter.

### 1.2 Charakteristische Parameter der geodätischen Refraktion

Zahlreiche Untersuchungen der geodätischen Refraktion zeigten, dass die Größe des systematischen Fehlers

vom integralen Temperaturgradienten der Luft  $\overline{\gamma}_z = -\frac{\partial T}{\partial z}$  auf dem Wege der optischen Strahlenausbreitung abhängig ist. Der Gradient erhält ein negatives Vorzeichen, wenn die Temperatur mit der Höhe abnimmt. Die Größe des Gradienten hängt von der Höhe  $z$  des Zielstrahls über der Oberfläche und den Wetterverhältnissen ab. Als Charakteristikum für die meteorologischen Verhältnisse dient der lokale Temperaturgradient  $\gamma_1$  in der Höhe  $z = 1 \text{ m}$ .

Andererseits ist bekannt, dass die Änderungen der Temperatur mit der Höhe in der bodennahen Luftschicht  $\overline{\gamma}_z = \frac{T_*}{z}$  der logarithmischen Gesetzmäßigkeit unterliegt,

wobei  $T_* = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{z_2}{z_1}}$  der vom Temperaturunterschied zwischen den Höhen  $z_1$  und  $z_2$  abhängende Temperaturmaßstab ist. Folglich führt die Lösung der Aufgabe „Berechnung der Refraktion beim Nivellement“ zur Bestimmung der Abhängigkeit  $\overline{\gamma}_z = f(z, \gamma_1)$ . Von den drei beteiligten Größen  $\overline{\gamma}_z$ ,  $z$  und  $\gamma_1$  (oder  $T_*$ ) sind zwei unabhängig. Das eröffnet die Möglichkeit, mit diesen einen dimensionslosen Parameter zu erhalten, der die gesuchte Variable  $\overline{\gamma}_z$  einschließt:

$$\pi = \frac{\gamma_1}{\overline{\gamma}_z} = \text{idem} \quad (2)$$

oder

$$\pi = \frac{T_*}{\overline{\gamma}_z \cdot z} = \text{idem} \quad (3)$$

Nehmen wir an, dass die Parameter  $\overline{\gamma}_z'$ ,  $z'$ ,  $T_*'$  an einem natürlichen Objekt (Modell) gemessen wurden und sich die entsprechenden Größen auf ein anderes natürliches Objekt beziehen. Dann sind bei  $z' = z''$  und  $T_*' = T_*''$  in ähnlichen Punkten des Systems Modell-Natur die entsprechenden dimensionslosen Parameter gleich, d. h.  $\pi' = \pi''$ . Folglich gilt

$$\overline{\gamma}_z'' = \overline{\gamma}_z' \cdot \frac{z'}{z''} \cdot \frac{T_*''}{T_*'} = \frac{z'}{z''} \cdot \frac{\gamma_1''}{\gamma_1'}, \quad (4)$$

was die Möglichkeit aufzeigt, den gesuchten Parameter  $\overline{\gamma}_z''$  durch die leicht zugänglichen Größen  $z$  und  $\gamma_1$  zu bestimmen.

### 1.3 Zum Erhalt der empirischen Formeln

Die praktische Lösung der Aufgabe führt zur Aufstellung von Formeln für den Übergang vom Modell zur Natur, wozu Versuchsmessungen an einem Objekt verwendet

werden, die als Modell angenommen werden. Das Vorhandensein der Ähnlichkeit ist durch die logarithmische Gesetzmäßigkeit der Temperaturänderung mit der Höhe gegeben. Unter den Bedingungen der instabilen Temperaturschichtung (Abnahme der Temperatur mit der Höhe) kann dies gut verfolgt werden. Die Auswertung der Versuchsdaten kann in Form von

$$\pi = A_1 \cdot \gamma_1^n \quad (5)$$

$$\text{mit } A_1 = A \cdot z^m \quad (6)$$

mit den zu bestimmenden empirischen Konstanten A, m und n dargestellt werden.

Zur Darstellung der Parameter z und  $\gamma_1$  in dimensionsloser Form wird ein charakteristischer Maßstab verwendet. Dazu werden gewöhnlich Größen gleicher Dimension benutzt, die am besten den physikalischen Gegebenheiten entsprechen. So wird es als möglich erachtet, für den Gradienten  $\gamma_1$  einen Autokonvektionsgradienten mit  $\gamma_0 = 0,0342 \text{K} \cdot \text{m}^{-1}$  zu verwenden. Dann geht  $\gamma_1$  in Glg. (5) in Form von  $\gamma_1' \cdot \gamma_0^{-1}$ ,  $\gamma_1'' \cdot \gamma_0^{-1}$  usw. ein. Auf analoge Weise kann man für den geometrischen Parameter z den Mittelwert der am Experiment beteiligten Größen verwenden.

Folglich lässt sich Glg. (5) in dimensionsloser Form darstellen:

$$\pi = A \cdot \pi_z^m \cdot \pi_\gamma^n = A_1 \cdot \pi_\gamma^n \quad \text{mit } A_1 = A \cdot \pi_z^m \quad (7)$$

wobei A, m und n die gesuchten Parameter darstellen und  $\pi_z$  und  $\pi_\gamma$  als Ähnlichkeitszahlen bezeichnet werden. Der dimensionslose Parameter  $\pi$  wird über das Verhältnis zwischen dem lokalen und dem integralen Temperaturgradienten gebildet:

$$\pi = \frac{\gamma_1}{\bar{\gamma}_z} \quad (8)$$

Die beiden Gradienten unterscheiden sich in ihrem physikalischen Wesen. Der lokale Temperaturgradient  $\gamma_1$  kann durch Messungen an einem Standpunkt ermittelt werden, wobei der integrale Temperaturgradient  $\bar{\gamma}_z$  einen Wert entlang des gesamten Zielstrahls widerspiegelt. Gegenüber den gleichartigen Größen (mit gleicher Dimension und gleicher physikalischer Bedeutung)  $\pi_z = z \cdot z_0^{-1}$ ,  $\pi_\gamma = \gamma_1 \cdot 0,0342^{-1}$  besteht der Parameter  $\pi = \gamma_1 \cdot \bar{\gamma}_z^{-1}$  aus nicht gleichartigen Größen, wenn auch mit gleicher Dimension.

#### 1.4 Empirische Formeln für die praktische Anwendung

Nach Gleichsetzen von Glg. (5) mit Glg. (8) ergibt sich für den integralen Temperaturgradienten:

$$\bar{\gamma}_z = A^{-1} \cdot \gamma_1^{1-n} \cdot z^{-m} \quad (9)$$

Nach Einsetzen des Wertes für  $\bar{\gamma}_z$  in die nach Jordan benannte Formel für

$$\kappa = 503 \cdot p \cdot T^{-2} \cdot \left( 0,0342 - \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (10)$$

(vgl. u.a. Witte [1990]) und Verknüpfen mit der aus geometrischen Beziehungen abgeleiteten Korrektur (Mozžuchin [2001]) erhält man mit

$$\rho = 39,5 \cdot p \cdot T^{-2} \cdot s^2 \cdot (0,0342 - \bar{\gamma}_z) \cdot 10^{-6} \quad (11)$$

die Korrektur für den trigonometrisch gemessenen Höhenunterschied, der auf Grund der entfernungsabhängigen Refraktion zu klein gemessen wird. Hierbei ist p der Luftdruck in mbar, T die Temperatur in °C, s der Abstand der Punkte in m und  $\bar{\gamma}_z$  der integrale Temperaturgradient in  $\text{K} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Zur Bestimmung der empirischen Konstanten A, m und n (vgl. Glgn. 5 und 6) muss das Experiment so angeordnet sein, dass der letztendlich gesuchte Parameter nur von einem Argument abhängt. Im nächsten Abschnitt wird die Reihenfolge bei der Auswertung von Versuchsdaten an praktischen Beispielen geschildert.

## 2 Auswertung von Versuchsdaten

Die Differenzen der Ergebnisse eines geometrischen Präzisionsnivelements und einer trigonometrischen Höhenübertragung bilden die Grundlage zur Berechnung der gesuchten Parameter. Zusätzliche Eingangsdaten sind die mittlere Zielstrahlhöhe und der lokale Temperaturgradient, der mit Hilfe eines Aspirationspsychrometers und Look-Up Tabellen erhalten werden kann (Mozžuchin [2001]).

### 2.1 Berechnung von Parametern zur Bestimmung des integralen Temperaturgradienten aus Messungen in Russland

Auf einer  $s = 951$  m langen Strecke wurden mit einer Zielstrahlhöhe  $z = 2,9$  m die Höhenunterschiede h trigonometrisch gemessen. Weiterhin wurden mit Hilfe der nivellierten Höhenunterschiede  $h_0$  (Sollwerte) die Differenzen  $\rho_0 = h - h_0$  erhalten, welche dem refraktiven Einfluss entsprechen.

#### 2.1.1 Bestimmung des Exponenten n zum Parameter $\gamma_1$

Nach Umstellung von Glg. (11) können die integralen Temperaturgradienten direkt mit

$$\bar{\gamma}_z = 0,0342 - \frac{\rho \cdot T^2}{39,5 \cdot p \cdot s^2} \cdot 10^6 \quad (12)$$

berechnet werden.

Die Änderung des integralen Gradienten  $\bar{\gamma}_z$  ist abhängig vom lokalen Gradienten  $\gamma_1$  und wird in Glg. (5) beschrieben. Durch eine grafische Darstellung der Versuchsdaten mit den Koordinaten  $\log(\pi)$  und  $\log(\pi_\gamma)$  findet man mittels des Tangens des Neigungswinkels der erhaltenen Geraden an die Abszissenachse den Exponenten  $n = 0,8$  (Abb. 1). Der zweite unbekannte Parameter  $A_1$  kann aus der Beziehung

$$A_1 = \frac{\pi}{\pi_\gamma^{0,8}} = \frac{\gamma_1^{0,2} \cdot 0,0672}{\bar{\gamma}_z} \quad (13)$$

gefunden werden. Da  $\pi_z = 1$  ist die Konstante  $A = A_1$ . Dar- aus ergibt sich unter Berücksichtigung von Glg. (13)

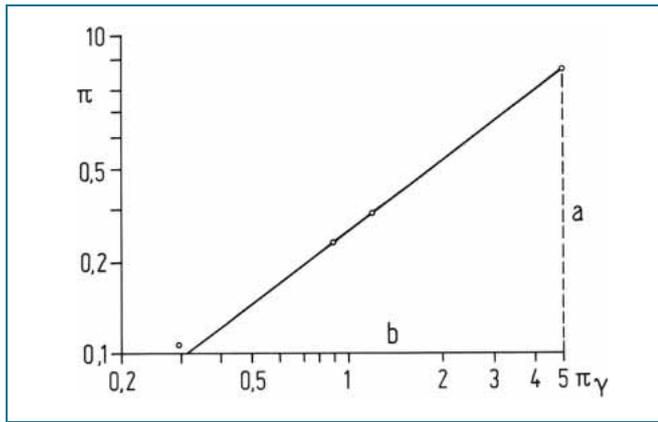


Abb. 1: Beziehung für  $\log(\pi) = f(\log(\pi_\gamma))$

$$\bar{\gamma}_z = \frac{0,0672 \cdot 2,9}{0,25} \cdot \frac{\gamma_1^{0,2}}{z} \approx 0,8 \cdot \frac{\gamma_1^{0,2}}{z} \quad (14)$$

Einsetzen von Glg. (14) in Glg. (11) ermöglicht die Berechnung von Verbesserungen  $\rho$  unter der Bedingung, dass die Verteilung der Lufttemperatur in Abhängigkeit von der Höhe im Natur- und im Modellobjekt ähnlich zueinander ist.

### 2.1.2 Bestimmung des Exponenten $m$ zum geometrischen Parameter $z$

In diesem Fall werden die Beobachtungsergebnisse von einem Objekt auf eine Reihe anderer Objekte, mit verschiedener Zielstrahlhöhe, übertragen. Bei den durchgeführten Versuchsmessungen wurde zu vier Punkten in Abständen von 11,1 km, 6,2 km, 3,9 km und 1,5 km beobachtet.

Die Gradienten  $\bar{\gamma}_z$  werden nach Glg. (12) unter Verwendung der gemessenen meteorologischen Daten berechnet.  $A_1$  wird mit Glg. (13) bei  $\gamma_1 = 0,16$  K/m bestimmt. Aus der grafischen Darstellung der Versuchsdaten mit den Koordinaten  $\log(A_1)$  und  $\log(\pi_z)$  wird der Exponent  $m = 0,7$  gefunden (Abb. 2).

Zusammenfassend ergeben sich die drei Parameter zu:

Tab. 1: In Russland bestimmte Werte für die Parameter  $n$ ,  $m$  und  $A$

Parameter	bestimmter Wert
$n$	0,8
$m$	0,7
$A$	1,6

Nach Einsetzen der Werte ergibt sich Glg. (14) zu:

$$\bar{\gamma}_z = \frac{0,0672 \cdot 49^{0,7}}{0,97} \cdot \frac{\gamma_1^{0,2}}{z^{0,7}} \approx \frac{\gamma_1^{0,2}}{z^{0,7}} \quad (15)$$

### 2.1.3 Prüfung der Methode

In Abb. 3 sind die Änderungen des lokalen Temperaturgradienten  $\gamma_1$  mit der Zeit, die aus Messungen abgeleite-

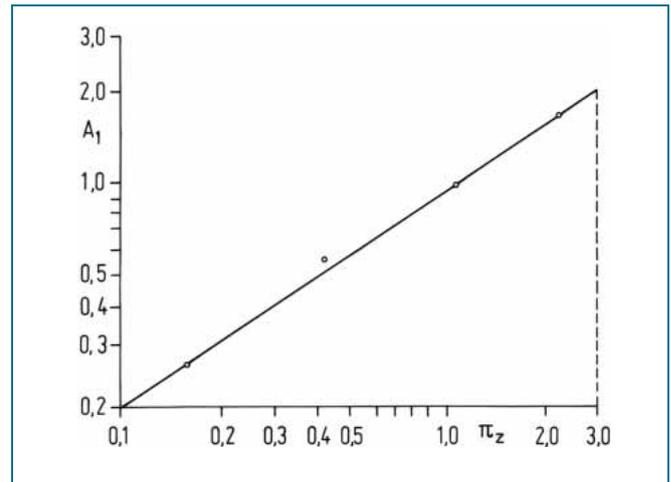


Abb. 2: Beziehung für  $\log(A_1) = f(\log(\pi_z))$

ten Größen  $\rho_0$  und die berechneten Verbesserungen  $\rho$  angegeben. Gemessen wurde auf einer Strecke von 620 m mit einer Zielstrahlhöhe von 2,7 m und einem Höhenunterschied von 1,8 m. Im Verlaufe des Tages wurden 53 Höhenunterschiede gemessen, womit die entsprechenden Werte  $\rho_0$  gefunden werden können. Mit Hilfe der Glg. (15) werden die Größen  $\rho$  berechnet.

Die Mittelwerte aus den Messungen ergeben sich für  $\rho_0$  zu  $-47 \text{ mm} \pm 23 \text{ mm}$  und für  $\rho$  zu  $-50 \text{ mm} \pm 10 \text{ mm}$ . Auf diese Weise gestattet die Einführung von Verbesserungen mit einem hohen Zuverlässigkeitsgrad einen wesentlichen Teil des systematischen Fehlers  $\rho_0$  zu eliminieren. Der Mittelwert von  $\rho_0$  entspricht unter den gegebenen Verhältnissen einem Gradienten  $\gamma_z$  von 0,3014 K/m bei  $\gamma_1 = 0,1$  K/m. Somit kann geschrieben werden:

$$\bar{\gamma}_z = \frac{0,3014 \cdot 2,7}{0,10^{0,2}} \cdot \frac{\gamma_1^{0,2}}{z} \approx 1,29 \frac{\gamma_1^{0,2}}{z} \quad (16)$$

Abb. 4 zeigt analoge Ergebnisse von weiteren Versuchsmessungen. Die Parameter  $\rho$  werden hierbei mit Glg. (15)

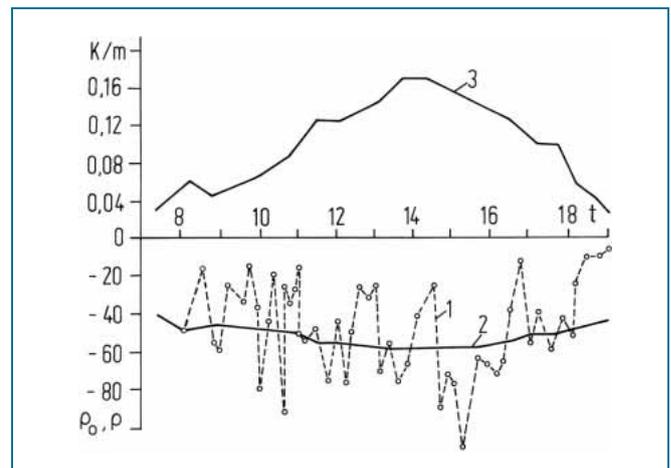


Abb. 3: Änderungen der aus Messungen bestimmten Parameter  $\rho_0$  (1), der berechneten Parameter  $\rho$  (2) sowie des Gradienten  $\gamma_1$  (3)

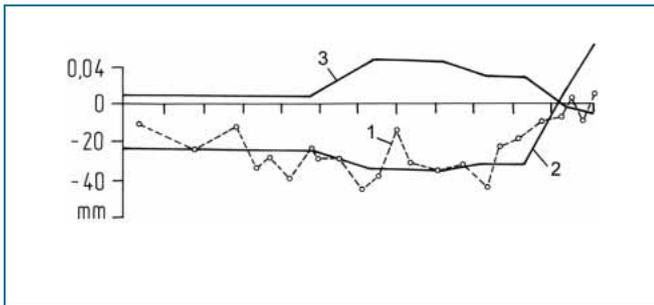


Abb. 4: Variationen der Werte für  $\rho_0$  (1),  $\rho$  (2) und  $\gamma_1$  (3) aus einer weiteren Versuchsmessung

berechnet. Der Mittelwert  $\rho_0$  beträgt  $-26$  mm und der für  $\rho$  in der gleichen Zeit  $-27$  mm.

## 2.2 Berechnung von Parametern zur Bestimmung des integralen Temperaturgradienten aus Messungen bei Bonn

Hierfür wurden neun Zielpunkte und ein Instrumentenstandpunkt ausgewählt. Die Zielpunkte weisen auf einem Gesamthöhenunterschied von 40 m gleichmäßige Höhendifferenzen zwischen allen Punkten von 5 m auf. Die Zielweiten liegen in einem Bereich zwischen 360 m und 620 m (Laumen, Seegers [2002]).

### 2.2.1 Bestimmung der Parameter

Auf Grund der empirisch gefundenen Abhängigkeit  $\log(\pi) = f(\log(\gamma_1))$  folgt mit Glg. (5) die Geradengleichung:

$$\log \pi = n \cdot \log \gamma_1 + \log A_1 \quad (17)$$

Der Parameter  $n$  entspricht der Steigung der ausgleichenden Geraden für die jeweiligen Punkte mit den Koordinaten  $\pi$  und  $\gamma_1$ . Dieses Problem wurde für die einzelnen Punkte in einem gemischten Modell (Gauß-Helmert Modell) nach Koch (Koch [1997]) gelöst.

Mit dem Wert für  $n$  sind jetzt die Werte für  $A_1$  zu ermitteln. Hierzu wird Glg. (5) wie folgt nach  $A_1$  aufgelöst:

$$A_1 = \frac{\pi}{\gamma_1^n} = \frac{\gamma_1^{1-n}}{\gamma_z} = \frac{\gamma_1 \cdot \gamma_1^{-n}}{\gamma_z} \quad (18)$$

Aus der logarithmischen Abhängigkeit des Parameters  $A_1$  von der mittleren Zielstrahlhöhe  $z$  erhält man unter Verwendung von Glg. (6) die Geradengleichung

$$\log A_1 = m \cdot \log z + \log A \quad (19)$$

Hierbei leitet sich der Parameter  $m$  über die Steigung der ausgleichenden Geraden der logarithmierten Werte  $A_1$  und der mittleren Zielstrahlhöhe  $z$  her. Die Parameter der ausgleichenden Geraden werden wiederum im gemischten Modell geschätzt. Abschließend kann der Parameter  $A$  berechnet werden, wobei gilt:

$$A = \frac{A_1}{z^m} \quad (20)$$

Zusammenfassend werden folgende Werte für die Ähnlichkeitsparameter zur Berechnung des integralen Temperaturgradienten aus den durchgeführten Messungen erhalten:

Tab. 2: Darstellung der Bonner-Parameter

Parameter	bestimmter Wert
$n$	0,4
$m$	2,8
$A$	0,02

Mit Hilfe dieser Parameter, dem lokalen Temperaturgradienten und der mittleren Zielstrahlhöhe ist es nun möglich, für eine Messung den integralen Temperaturgradienten entlang des Zielstrahls zu berechnen, um damit den beim trigonometrisch gemessenen Höhenunterschied auftretenden refraktiven Einfluss zu reduzieren. Für die Parameter  $n$ ,  $m$  und  $A$  sind die abgeleiteten Werte in Glg. (11) einzusetzen, um den integralen Temperaturgradienten der entsprechenden Messung zu berechnen. Ausgeschrieben folgt daraus

$$\rho = 39,5 \cdot p \cdot T^{-2} \cdot s^2 \cdot (0,0342 - 0,02 \cdot \gamma^{1-0,4} \cdot z^{-2,8}) \cdot 10^{-6} \quad (21)$$

Die offensichtliche numerische Differenz zwischen den in Russland und den in der Nähe von Bonn gewonnenen Parametern  $n$ ,  $m$  und  $A$  wirkt sich nicht in dem Maße gravierend aus wie dies ein erster Blick vermuten lässt. Die folgenden Untersuchungen zeigen Ergebnisse der Anwendung sowohl der in der Nähe von Bonn als auch der in Russland bestimmten Parameter (Abb. 5, 6 und 7).

### 2.2.2 Ergebnisse mittels der Bonner-Parameter

Zur Veranschaulichung der Größenordnung der berechneten Verbesserungen soll die folgende Abbildung dienen. Der „unkorrigierte“ Graph zeigt den von Ausreißern befreiten ursprünglichen Vergleich zwischen der trigonometrischen und der geometrischen Höhenbestimmung sämtlicher Punkte. Die Differenzen wurden in der Reihenfolge

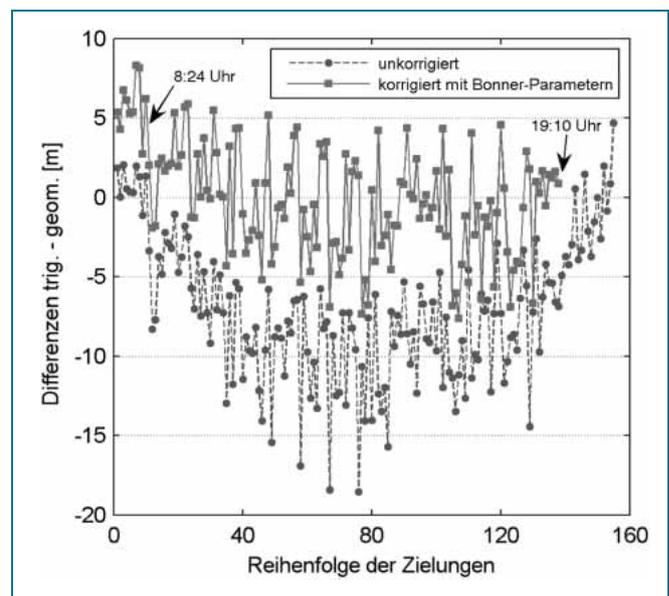


Abb. 5: Differenzen zwischen trigonometrischer Höhenübertragung und geometrischem Nivellement (Korr. mit Bonner-Parametern)

der Zielungen zu den einzelnen Punkten aufgetragen (von morgens 7:35 h bis abends 20:10 h). Beim „korrigierten“ Graph wurde dagegen das Ergebnis der nach Kapitel 2 verbesserten trigonometrisch gemessenen Höhenunterschiede bei der Differenzbildung berücksichtigt (von morgens 8:24 h bis abends 19:10 h). Man erkennt deutlich einen weniger ausgeprägten Tagesgang gegenüber dem ursprünglichen Vergleich. In dem Korrektionsbetrag spiegeln sich genau die Verbesserungen der trigonometrischen Höhenbestimmung wider, die mittels integralen Temperaturgradienten bestimmt worden sind.

Den wohl entscheidenden Einfluss, sowohl auf die Größe der Verbesserungen als auch auf deren Verlauf innerhalb eines Messtages, hat das Verhältnis der Parameter untereinander. Hierdurch kann es innerhalb der Formel zur Berechnung des integralen Temperaturgradienten aus dem lokalen Temperaturgradienten und der mittleren Zielstrahlhöhe zu einer nicht exakten Gewichtung im Sinne einer zu großen Gewichtung dieser beiden genannten Eingangswerte und einer daraus resultierenden geringeren Gewichtung der Entfernung kommen.

Betrachtet man die gesamte Messung wird man feststellen, dass der größte Teil der maximalen Abweichungen im Bereich von  $-5$  mm bis  $-15$  mm durch die Verbesserungen mittels Ähnlichkeitstheorie in ein Band von  $\pm 5$  mm um den Nullpunkt verschoben worden sind. Allerdings betrifft dies hauptsächlich die Messungen zwischen 8.24 h und 19.10 h. In der Zeit von Beginn der Messung bis um 8:24 h werden positive Verbesserungen berechnet. Die Verbesserungen von 19.10 h bis 20.10 h konnten nicht bestimmt werden, da aufgrund der Inversion keine Berechnung des integralen Temperaturgradienten möglich war.

### 2.3 Ergebnisse mit den in Russland bestimmten Parametern – angewendet auf die bei Bonn durchgeführten Messungen

Nachfolgend wird anhand von zwei weiteren in der Nähe von Bonn durchgeführten Messungen gezeigt, dass sich mit Hilfe der Anwendung der in Russland bestimmten Parameter ähnlich gute Ergebnisse wie mit den „Bonner Parametern“ erzielen lassen.

#### 2.3.1 Erste Messung über ca. 12 Stunden

Abb. 6 zeigt analog zu Abb. 5 den direkten Vergleich zwischen den unkorrigierten Differenzen und den Differenzen nach Anbringen der Verbesserungen mit den in Kapitel 2 bestimmten Parametern.

Auf den ersten Blick sind keine signifikanten Unterschiede zur Darstellung der Differenzen mit den Bonner-Parametern in Abb. 5 erkennbar. Die unwesentlichen Unterschiede lassen sich auf die Unsicherheit der bestimmten Parameter und die kurzperiodischen Variationen zurückführen.

#### 2.3.2 Bewertung der Parameter anhand einer zweiten Messung über einen Zeitraum von ca. 30 Minuten

Die Durchführung einer zusätzlichen Messreihe soll die Anwendbarkeit der bestimmten Parameter bestätigen.

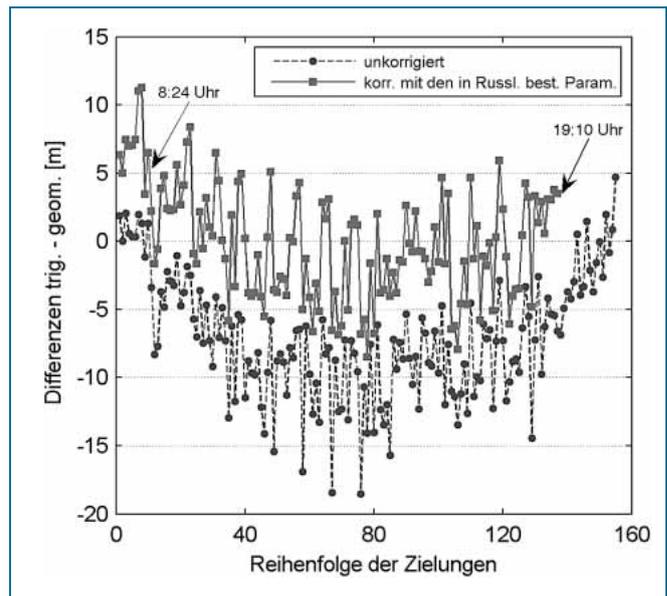


Abb. 6: Differenzen zwischen trigonometrischer Höhenübertragung und geometrischem Nivellement (Korr. mit in Russland best. Parametern)

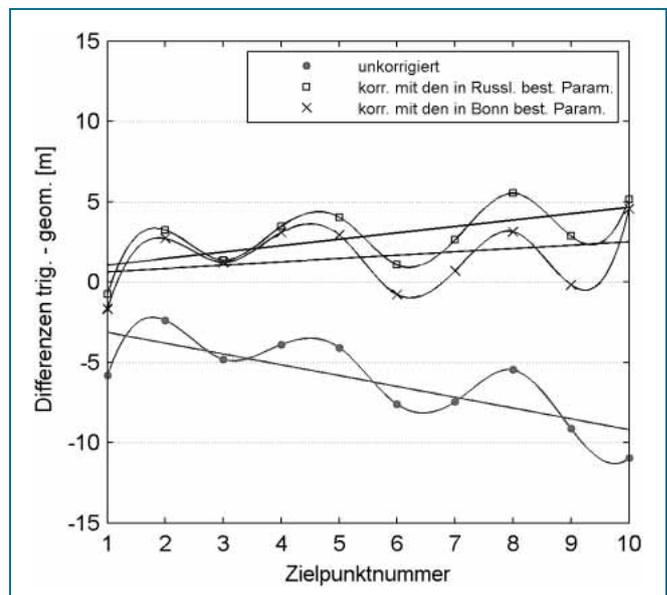


Abb. 7: Ergebnisse der Messung im Juni 2002

Die trigonometrische Höhenübertragung wurde im Juni 2002 wiederum auf der gleichen Teststrecke bei Merzbach durchgeführt. Als Instrument wurde der Theodolit T 2000 der Firma Leica mit einer Richtungsmessgenauigkeit von 0,15 mgon in Kombination mit einem entsprechenden Zielzeichen eingesetzt. Um die zur Berechnung des gesuchten Höhenunterschieds notwendige Strecke zu erhalten, wurde anschließend der Theodolit durch das Tachymeter TC 1600 ersetzt. Die Messdauer für die verwendeten zehn Zielpunkte betrug eine halbe Stunde zwischen 12.27 h und 12.56 h. Innerhalb dieser Zeitspanne wurden parallel zur trigonometrischen Höhenbestimmung sowohl am Standpunkt als auch an den Zielpunkten die Eingangsdaten zur Berechnung des lokalen Temperaturgradienten

mittels Psychrometer und Barometer erfasst. Nach dessen Bestimmung und der bereits aus der vorangegangenen Messung bekannten mittleren Zielstrahlhöhe sind die Eingangswerte zur Berechnung des integralen Temperaturgradienten gegeben.

In Abb. 7 sind neben den unkorrigierten Differenzen zwischen trigonometrisch und geometrisch bestimmtem Höhenunterschied und den korrigierten Differenzen mittels der Bonner-Parameter zusätzlich die mit den in Russland bestimmten Parametern berechneten Verbesserungen graphisch dargestellt.

Aus Abb. 7 geht hervor, dass der gemessene Höhenunterschied um ungefähr 70 % verbessert wird, wobei die Korrekturen mit den in Russland ermittelten Parametern nur minimal zu groß bestimmt worden sind. Auffällig sind die während der halbstündigen Messung aufgetretenen Schwingungen mit Amplituden bis zu 3 mm, die auf einen langperiodischen refraktiven Anteil schließen lassen.

### 3 Schlussfolgerung

Die Untersuchungen zeigen, dass es möglich ist, mit Hilfe des ähnlichkeitstheoretischen Ansatzes nach Mozzuchin, den bei der trigonometrischen Höhenübertragung auftretenden refraktiven Einfluss um einen signifikanten Anteil zu minimieren. Dabei bildet die Bestimmung des integralen Temperaturgradienten mit

$$\overline{\gamma}_z = A^{-1} \cdot \gamma_1^{1-n} \cdot z^{-m} \quad (22)$$

einen wichtigen Ansatz. Die Auswertungen belegen, dass die Übertragbarkeit der in Russland bestimmten Parameter in hiesige geographische Breiten möglich ist. Dies gilt auch bei Messungen unter verschiedenen meteorologischen Bedingungen. Zusätzlich konnten Messaufbau und Herleitungsschritte übertragen werden, so dass sich eigene Bonner-Parameter ermitteln ließen. Deren Anwendung führt teilweise zu besseren Ergebnissen. Eine ähnliche Aussage hinsichtlich der Übertragbarkeit der Bonner-Parameter kann hier nicht gemacht werden, da sich die durchgeführten Messungen auf eine einzige Teststrecke beschränken. Die mit der Ähnlichkeitsmethode erhaltenen Formeln können leicht wiedergegeben, ergänzt und präzisiert werden. Bei ihrer Anwendung ist es wichtig zu beachten, dass die gesetzmäßige Verallgemeinerung der Versuchsergebnisse nur innerhalb der Änderung der im Modell vorhandenen Argumente  $\gamma_1$  und  $z$  möglich ist. Unter den Bedingungen der Inversion kann die Verwendung der erhaltenen Abhängigkeiten zu fehlerhaften Ergebnissen führen. Außerdem ist zu berücksichtigen, dass das Modell eine unvollkommene Kopie des natürlichen Objekts ist. Die völlige Übereinstimmung der Bedingungen im System Modell-Natur ist nur in seltenen Fällen zu erwarten, so dass eine Reihe von Einschränkungen zu beachten sind, die mit dem Wesen der Ähnlichkeitsmethode verbunden sind. Nichtsdestoweniger ist das Anwendungsgebiet der Methode hinreichend umfangreich. Hierdurch können für die Praxis nützliche Ergebnisse mit relativ einfachen Hilfsmitteln erhalten werden, wie sie auf anderen

Wegen nicht erreicht werden können. Die angegebenen Formeln können zur Berechnung der Refraktion bei der trigonometrischen Höhenübertragung verwendet werden. Es ist durchaus möglich, ebenso Parameter für die Bestimmung des Refraktionseinflusses beim geometrischen Nivellement zu ermitteln. Hier scheint aber der von Casott [1999] aufgezeigte Weg zu besseren Ergebnissen zu führen, weil in dem dort vorgestellten Verfahren Korrekturen für die systematischen Fehleranteile der Refraktion unmittelbar aus dem turbulenten Verhalten der Messungen selbst abgeleitet werden können.

### 4 Danksagung

Die Autoren danken Herrn Prof. Dr. Dr.h.c. F. Deumlich für die Übersetzung der Kapitel 1 bis 2.13 sowie von Teilen der Schlussfolgerung aus dem Russischen ganz herzlich.

### 5 Literatur

- Casott, N. [1999]: Erfassung des Einflusses der turbulenten Refraktion auf optische Richtungsmessungen mit CCD Sensoren. Dissertation, Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich Wilhelms Universität Bonn, Nr. 86
- Koch, K. R. [1997]: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Dümmler Verlag Bonn
- Laumen, C., Seegers, G. [2002]: Untersuchungen zur Übertragbarkeit, Praktikabilität und Genauigkeit der aus der Ähnlichkeitstheorie resultierenden Korrektionsformel des Refraktionseinflusses für das trigonometrische und geometrische Nivellement nach Mozzuchin. Diplomarbeit am Geodätischen Institut der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (unveröffentlicht)
- Mozzuchin, O. A. [2001]: Die Refraktion beim geometrischen Nivellement – Theorie und Praxis. AVN, 3/2001, S.78-84
- Witte, B. [1990]: Möglichkeiten und Grenzen des trigonometrischen Nivellement, VR(52), S. 86 – 96

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. B. Witte, Dipl.-Ing. B. Binnenbruck,  
Dipl.-Ing. Gernot Seegers, Dipl.-Ing. Claudius Laumen  
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn  
Geodätisches Institut  
Nußallee 17  
53115 Bonn  
Prof. Dr. O.A. Mozzuchin, ul. Il'inskaja 65,  
Rossija, 603600 Niznij-Novgorod, NGASA

#### Summary

**After a short introduction into the similarity theory the influence of refraction on the results of trigonometric heighting using practical examples is calculated. The limitations for the application of this method are pointed out.**