Homogenisierung dreidimensionaler Szenarien nach der Methode der kleinsten Quadrate

Jörg Müller und
Wilhelm Benning, Aachen

Die aus vermessungstechnischen Aufnahmen resultierenden Geometrien der Aufnahmeobjekte sind mit zufallsbedingten Abweichungen behaftet. Zur gewünschten Wiederherstellung der konstruktiv beabsichtigten Geometrien wird ein theoretisch strenger Lösungsansatz vorgestellt, der auf der Basis strenger Ausgleichungstechniken beruht.

1 Einleitung

Die vermessungstechnische Aufnahme von Szenarien zur Erstellung oder Aktualisierung von Plangrundlagen erfolgt zunehmend mit Hilfe der Nahbereichsphotogrammetrie sowie gestützt von CAD-Techniken. Die praktische Weiterverarbeitung der akquirierten Information erfordert deren Homogenisierung, da jede Vermessung mit zufallsbedingten Abweichungen behaftet ist und die aufzunehmenden Artefakte keine idealgeometrische Form aufweisen. Dennoch sollten die konstruktiv beabsichtigten Geometrien aus den realen Messungen reproduzierbar, zumindest näherungsweise im Ergebnis eingehalten sein. So wird z. B. statt einer Freiformfläche, welche die Meßpunkte einer Kugeloberfläche enthält, eine idealisierte Darstellung als Kugel gewünscht.

Es gilt daher, einen theoretisch strengen Lösungsansatz zur Homogenisierung komplexer Szenarien auf Basis strenger Ausgleichungstechniken bereitzustellen.

2 Ausgleichungsprimitive

Routinen zur Bestimmung geometrischer Grundkörper (Primitive) durch Ausgleichungsalgorithmen sind seit einiger Zeit fester Bestandteil der Softwarekomponenten von Nahbereichsmeßsystemen. Als Beispiel sei das 3D-Online-Meßsystem DOM [Shen 96] genannt. Aus einer Punktwolke wird mittels Parameterschätzung ein idealgeometrischer Ersatzkörper gemäß Gauß (L2-Norm) bestimmt. Neben den charakteristischen Parametern des Primitivs werden Genauigkeitsmaße sowie die Zuschläge für die Koordinaten der Meßpunkte ermittelt.

Gehört ein Meßpunkt mehreren Grundkörpern an, so führt sequentielles, das heißt isoliertes Ausgleichen zu widersprüchlichen Ergebnissen in den Unbekannten. Da bisherige Ansätze nur sequentielles Ausgleichen unterstützen, bleibt es dem Anwender überlassen, wie mit Grundkörpern zu verfahren ist, die über gemeinsame Punkte, Kanten oder Seiten untereinander verbunden sind. Ein Konzept zur Homogenisierung von 3D-Szenarien soll diese Lücke abdecken.

3 Geometrische Bedingungen

Komplexe Szenarien lassen sich unter Einbeziehung geometrischer Bedingungen homogenisieren. Deren Auflistung gibt im folgenden auch Begründungen, warum geometrische Bedingungen das zweite Standbein der Homogenisierung von Szenarien darstellen.

Dimensionierungsbedingungen integrieren Aussagen hinsichtlich der Parametrisierung von Elementen bezogen auf Winkel oder Strecken. Ist beispielsweise der Öffnungswinkel eines Kegels vorgegeben, so kann dieses Wissen in Form einer Dimensionierungsbedingung eingebracht werden. In ähnlicher Weise könnte die Information, daß zwei Zylinder den gleichen Durchmesser haben, in die Rekonstruktion integriert werden.

Unter den Begriff **Orientierungsbedingungen** sollen sämtliche Bedingungen, die sich auf die Ausrichtung von Elementen beziehen, zusammengefaßt werden. Die wichtigsten Vertreter dieser Klasse sind die Orthogonalitäts- und die Parallelitätsbedingungen.

Positionierungsbedingungen wie Konzentritäts- und Abstandsbedingung beziehen sich auf die relative oder absolute Lage von Elementen.

Verfügen Objekte über gemeinsame Elemente, so wird dies durch **Schnittbedingungen** formuliert. Die Schnittmenge besteht i. d. R. aus Punkten, Linien oder Flächen. Im allgemeinen handelt es sich um eine Kombination von Positionierungs- und Orientierungsbedingungen.

Koinzidenzbedingungen ähneln den Schnittbedingungen. Im Gegensatz zu diesen muß hierbei ein Element vollständig in dem anderen enthalten sein oder beide Elemente müssen die gleiche Form, Lage und Position besitzen. Als Beispiele für Koinzidenzbedingungen seien die Forderungen angeführt, daß ein Punkt auf einer Geraden, eine Linie in einer Ebene oder eine Fläche in einer Ebene liegen sollen. Endpunkte oder Berandungen spielen im Kontext von Koinzidenzbedingungen eine untergeordnete Rolle. Somit sind zwei Linien oder Achsen, die auf einer Gerade liegen, unabhängig von den Anfangs- und Endpunkten koinzident. Analoges gilt für Flächen.

Eine exakte Abgrenzung der verschiedenen Bedingungen ist nicht immer gewährleistet. Die Forderung, daß zwei Punkte durch identische Koordinaten beschrieben werden, kann sowohl als relative Positionierungs- als auch als Koinzidenzbedingung formuliert werden.

Die Berücksichtigung geometrischer Bedingungen erfolgte bislang durch manuelle Rekonstruktion. Aufgrund der vorliegenden und meßbaren Überbestimmungen sollte die Integration geometrischer Bedingungen auf Basis von Ausgleichungstechniken erfolgen.

4 Simultane Homogenisierung

Zwei Strategien zur ausgleichungstechnischen Homogenisierung sind denkbar. Beim sequentiellen Vorgehen werden einzelne Primitive und geometrische Bedingungen schrittweise bearbeitet. Da als Ergebnisse der einzelnen Schritte typischerweise nur die charakteristischen Parameter der Primitive und die ausgeglichenen Punkte weiterverarbeitet werden, kommt es zu einem Informationsverlust. Beim simultanen Vorgehen werden alle Bedingungen sowie sämtliche Informationen zur Modellierung von Körpern in einer einzigen Ausgleichung zusammengeführt. Die Lösung ist streng und erwartungstreu. Strenge sequentielle Ansätze sind denkbar, doch sie erfordern komplexere Programmstrukturen und höhere Rechenzeiten. Der simultane Ansatz ist wegen seiner eindeutigen widersprungsfreien Lösung vorzuziehen.

5 Methodischer Ansatz

Zur funktionalstochastischen Modellierung der Homogenisierung erweist sich das Gauß-Markoff-Modell als besonders vorteilhaft. Zum einem können bei Überführung der geometrischen und topologischen Bedingungen in gewichtete Beobachtungen Singularitäten, die z. B. aus geometrischen Bedingungen in Verbindung mit Linearisierungsfehlern herrühren, verhindert werden. Grobe Fehler sowie Widersprüche in den Restriktionen können sicher und bequem mittels Regewichtungstechniken aufgedeckt werden.

Die Überführung der Bedingungen in gewichtete Beobachtungen führt zu vier Klassen von Beobachtungsgleichungen.

5.1 Beobachtungsgleichungen für Punktkoordinaten

Die Beobachtungsgleichungen für Punktkoordinaten beschreiben die Differenz zwischen gemessenen und homogenisierten Koordinaten.

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Die Gewichtung der einzelnen Koordinaten wird aus der individuell vorgebbaren Meßgenauigkeit abgeleitet.

5.2 Beobachtungsgleichungen für analytische Primitive

Beobachtungsgleichungen für Primitive beschreiben den Abstand zwischen Modellierungspunkten

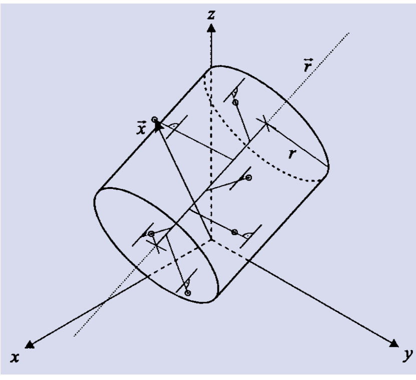

Abb. 1: Ausgleichszylinder

und Ausgleichsprimitiven. Der Grad der Homogenität kann über die Gewichtung beeinflußt werden.

Anhand eines einfachen Beispiels läßt sich die prinzipielle Vorgehensweise der Formulierung von Beobachtungsgleichungen für analytische Primitive erläutern.

Der Abstand eines Neupunktes zum Zylindermantel (siehe Abbildung 1) läßt sich mittels Ortsvektor $\vec{x}$, dem Lotfußpunkt auf der Achse sowie dem Radius r ermitteln.

Die originäre Beobachtungsgleichung lautet:

$$0 + v = \frac{\left\| \vec{r} \times (x - \vec{x}_p) \right\|}{\left\| \vec{r} \right\|} - \mathrm{r} \quad , \qquad (2)$$

welche durch Taylorreihenansatz zu linearisieren ist.

Ein im Dreidimensionalen häufig auftauchendes Problem besteht darin, daß redundanzfreie Repräsentationsformen zumeist Fallunterscheidungen erfordern. Redundante Formalisierungen können zwar universell angewendet werden, jedoch ist der Überparametrisierung Rechnung zu tragen. Im konkreten Fall sind zwei der sieben unbekannten Parameter zu fixieren.

Die Herleitung weiterer Flächen zweiter Ordnung erfolgt analog zum vorgestellten Ansatz für Zylinder, vgl. MÜLLER (1999).

Kurven zweiten Grades sind für Ebenen definiert. Die Modellierungspunkte werden auf die zu bestimmende Ausgleichsebene projiziert. Dies führt zu zwei Beobachtungsgleichungen pro Punkt, eine für die Normal-, die andere für die Planarkomponente. Die Zerlegung in zwei orthogonale Komponenten erhält die numerische Stabilität des Systems.

5.3 Beobachtungsgleichungen für Vertexbasierte Primitive

Sollwerte für Eckpunkte Vertexbasierter Primitive lassen sich als das Produkt der Objektmodellmatrix mit der Parametrisierungsmatrix ausdrücken. Mittels Rotations- und Translationsoperationen sind diese auf das globale Koordinatensystem zu übertragen. Für den n-ten Punkt des i-ten Objekts lautet der Ortsvektor des Sollpunkts:

$$\vec{x}_{i,n,soll} = [M \cdot P]_{3n-2,3n} \cdot R_i + \vec{t}_i \quad (3)$$

Die Differenz zwischen den Soll- und Istwerten liefert die gesuchten Beobachtungsgleichungen.

Modellierungspunkten, die auf Kanten oder Seiten liegen, kann im Gegensatz zu Eckpunkten kein konkreter Sollpunkt zugeordnet werden. Sollen sie berücksichtigt werden, so ist der Bezug zu der Kante – typischerweise eine Gerade – bzw. zu der Seite – in der Regel eine Ebene – zu formulieren.

Bei der Modellierung mit Hilfe von Vertexbasierten Primitiven werden geometrische Zwänge durch die interne Struktur impliziert. Es müssen folglich weniger geometrische Bedingungen explizit formuliert werden, auf die nun eingegangen werden soll.

5.4 Beobachtungsgleichungen für geometrische Bedingungen

Beobachtungsgleichungen für geometrische Bedingungen beschreiben die Abweichung der Ist- von der Sollgeometrie. Ähnlich den Gleichungen für Primitive kann der Grad der Homogenität über die Gewichtung beeinflußt werden.

Die Grundstruktur der Gleichungen für geometrische Bedingungen soll an einem Beispiel zur relativen Orientierung erläutert werden. Abbildung 2 zeigt zwei Ebenen, die rechtwinklig zueinander stehen sollen. Lauten die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$, so läßt sich die Abweichung

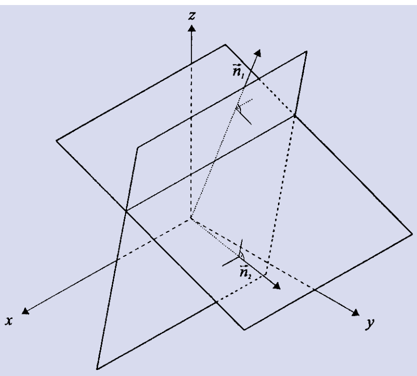

Abb. 2: Orthogonale Ebenen

für $\varphi_{soll} = \pm 100\ gon$ anhand

$$\varphi_{Soll} + v = \arccos \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \quad (4)$$

beschreiben.

Wegen der Unstetigkeitsstelle der Arcussinusfunktion bei $\varphi_{soll} = 0\ gon$ bzw. $200\ gon$ sollte für die Parallelitätsbedingung

$$\varphi_{Soll} + v = \arcsin \frac{\|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2\|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|} \quad (5)$$

angewendet werden. Das Aufsplitten der Parallelitätsbedingung in zwei Bedingungen sichert die numerische Stabilität im allgemeinen ab. Parallelität kann der Forderung nach gleicher Länge und Breite der Richtungsvektoren auf der Einheitskugel gleichgesetzt werden.

Weitere Beobachtungsgleichungen sowie Techniken zur Formulierung von Schnitt-, Koinzidenz- und Tangentialbedingungen unter Zuhilfenahme von Hilfspunkten können MÜLLER (1999) entnommen werden.

6 CAD-Applikation 3D-HOM

Im folgenden wird die praktische Umsetzung in eine CAD-Applikation zur Homogenisierung dreidimensionaler Szenarien, kurz *3D-HOM,* vorgestellt.

CAD-Systeme beinhalten Funktionen wie die Manipulation von Elementen, die Visualisierung der Ergebnisse und das Im- bzw. Exportieren von Information. Der Vorteil speziell von MicroStation als Basisprogramm liegt insbesondere in der Offenheit und der Verfügbarkeit für alle relevanten Plattformen.

Im folgenden werden die Bestandteile der Applikation näher erläutert.

6.1 Sekundärrepräsentation

Eine für die Homogenisierung wichtige Ergänzung stellt die Einführung einer Sekundärrepräsentation dar, weil CAD-Systeme Objekte primär über ihre Geometrie beschreiben und auf eine Speicherung topologischer Information nahezu vollständig verzichten. Eine Auflistung der Kanten, die mit einem Eckpunkt verknüpft sind, muß daher zum Beispiel aufwendig bestimmt werden. Aus Rechenzeitgründen werden außerdem bei CAD-Systemen Objekte unter Umständen mehrfach repräsentiert. Zwei in einem Punkt miteinander verbundene Geraden werden über vier Koordinatentripel unabhängig dargestellt. Bei einer Homogenisierung unmittelbar auf Basis der CAD-Daten führt dies zu unterschiedlichen Verbesserungen für einen identischen Punkt.

Um diese Probleme zu umgehen, führt *3D-HOM* die Sekundärrepräsentation ein, in der die Daten entsprechend aufbereitet werden.

Die Sekundärrepräsentation wird zu Beginn aus der MicroStation-Datei entwickelt. Die Topologie wird dabei rekonstruiert und explizit dargestellt. Die Redundanzfreiheit der Sekundärrepräsentation wird durch das gewählte Repräsentationsschema der Randdarstellung gewährleistet. Objekte werden hierbei über Referenzen auf die sie begrenzenden Elemente dargestellt. Seiten verweisen auf ihre Kanten, diese auf ihre Eckpunkte.

Die Aktualisierung der Sekundärrepräsentation erfolgt im Hintergrund über als *hook* registrierte Routinen. *Hooks* werden automatisch aufgerufen, sobald eine bei der Registrierung spezifizierte Aktion ausgeführt werden soll bzw. ausgeführt wurde.

6.2 Bedingungseditor

Ein zentraler Bestandteil der CAD-Applikation *3D-HOM* ist der sogenannte Bedingungseditor *(constraint editor).* Neben der Verwaltung und Manipulation ist der Constraint-Editor für die Visualisierung ausgewählter Datensätze zuständig. Da MicroStation wie die meisten anderen CAD-Systeme nur hierarchisch abgestuftes Gruppieren von Objekten unterstützt, wurden eigene Gruppierungsfunktionen realisiert. Sie ermöglichen die Zuordnung eines Objekts zu mehreren Gruppen.

6.3 Schnüffelmodul

Um den Anwender bei der Erfassung geometrischer Bedingungen wie Planarität oder Orthogonalität zu unterstützen, wurde eine semiautomatische Erkennung von Bedingungen in *3D-HOM* integriert.

In einem vorhandenen Datensatz erkennt das Schnüffelmodul geometrische Merkmale und liefert dem Anwender einen Bedingungssatz. *3D-HOM* erkennt sowohl direkte Primitive wie Ebenen und rechte Winkel als auch übergeordnete Elemente, zwischen denen kein Verbund bestehen muß. Liegen Fenster einer Fassade in einer Ebene, so wird die Glasebene als übergeordnetes Element erkannt und formalisiert. Die Abweichungen von der Idealgeometrie werden in Form von Qualitätsmaßen angegeben. Für Ebenen wird beispielsweise die maximale und mittlere Klaffung angegeben. Die Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Vorschläge trifft der Anwender.

6.4 Ausgleichungsmodul

Das Ausgleichungsmodul stellt den numerischen Kern der Applikation dar. Aufgrund der zahlreichen Primitive und verschiedenen geometrischen Bedingungen wurde dieses objektorientiert realisiert.

Die C++-Klassenbibliothek *<adjust>* stellt eine generische Umsetzung der Ausgleichung im Gauß-Markoff-Modell dar, während die 3D-Klassenbibliothek *<constraints>* die objektspezifischen Klassendefinitionen für Punktkoordinaten, Primitive und geometrische Bedingungen liefert. Wird zum Beispiel von *adjust* die polymorphe Routine *constraint::FillMatrix* aufgerufen, so übernimmt die Laufzeitumgebung die Entscheidung, welche objektspezifische Methode zur Belegung der Normalgleichungsmatrix zur Anwendung kommt. Durch die Trennung der Kernbibliotheken kann das System bequem durch Anpassung der Bibliothek *constraints* erweitert werden. Änderungen des generischen Teils sind nicht notwendig.

6.5 Sparse-Techniken

Um maximale numerische Effizienz zu gewährleisten, kommen Sparse-Techniken zum Einsatz. Neben den bewährten Routinen zur Faktorisierung nach Cholesky und der Profilinversion nach Hanson (1978) kommt die Profiloptimierung nach Snay (1976) zum Einsatz. Die in Fortran kodierten Routinen entstammen dem System *KAFKA* (Benning 1986) und sind zusätzlich mit einem C++-Interface ausgestattet, wodurch ein bequemes Aufrufen seitens der objektorientiert kodierten Bibliothek *adjust* gewährleistet ist.

7 Beispiele

Die zwei folgenden Beispiele geben Einblick in die Arbeit mit *3D-HOM*. Das erste Beispiel behandelt die isolierte Ausgleichung eines Primitivs, das zweite Beispiel demonstriert die simultane Homogenisierung eines dreidimensionalen Szenarios.

7.1 Primitv

Das Datenmaterial zur Ebenenausgleichung, welches auch Drixler (1997) zur Verifikation eines Eigenwert-basierten Ansatzes für Ausgleichsquadriken heranzieht, entstammt Bopp & Krauss (1978). Die hier ermittelten Ergebnisse für die unbekannten Parameter entsprechen trotz grundverschiedenen Vorgehens denen von Bopp & Krauss und Drixler. Während Bopp & Krauss das Problem iterativ im Gauß-Helmert-Modell angehen, überführt Drixler es in ein äquivalentes Gauß-Markoff-Modell. Der hier vorgestellte Ansatz formuliert das Problem unmittelbar im Gauß-Markoff-Modell.

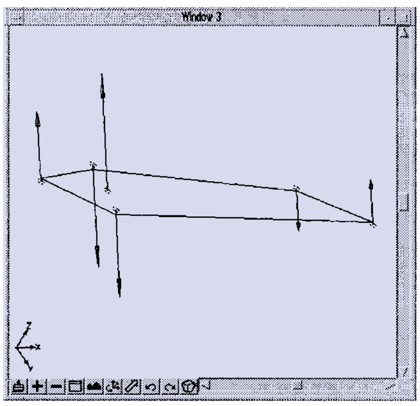

Abb. 3: Ebenenausgleichung (ü = 20)

Abbildung 3 zeigt das Ergebnis der Ebenenausgleichung mit 20fach überhöhten Koordinatenzuschlägen.

7.2 Simultane Homogenisierung eines 3D-Szenarios

Das CAD-Modell der simulierten Bauaufnahme entstammt der LAVA-Bibliothek[1]. Abbildung 4 zeigt den Ausgangszustand als Rendering. Der Datensatz besteht aus 183 Punkten, 274 Linien und 98 Ebenen.

Die Koordinaten der Eckpunkte werden simulativ normalverteilt verrauscht ($\mu = 0$; $\sigma^2 = 225\,\mathrm{cm}^2$). Mit Hilfe des Schnüffelmoduls werden die geometrischen Bedingungen erfaßt. Die Anzahl der erkannten Bedingungen hängt sowohl von der Parametrisierung der Suchalgorithmen als auch von der Intensität des Rauschens ab. Von den etwa 600 erschnüffelten Bedingungen entfällt ein Fünftel auf Rechtwinkligkeit, der Rest auf Planarität. Die Mehrheit der Ebenen kann auf dreizehn übergeordneten Ebenen zurückgeführt werden.

Die Rechenzeit für die simultane Homogenisierung beträgt weniger als eine Sekunde auf einem PC mit Pentium-II-Prozessor (450 MHz). Die Profiloptimierung des Normalgleichungssystems mit 833 Unbekannten erfordert eine Zehntelsekunde, die Cholesky-Faktorisierung einschließlich Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen 0,03 Sekunden pro Iteration; die Profilinversion schlägt mit 0,05 Sekunden zu Buche. Die Anzahl der notwendigen Iterationen variiert mit dem Rauschpegel. Bei einer Standardabweichung von 15 Zentimetern muß zum Beispiel die Linearisierungsschleife sechs Mal durchlaufen werden.

Das Beispiel „Barcelona-Pavillon“ geht von einem homogenen Daten-

[1] http://lava.ds.arch.tue.nl/modelshop

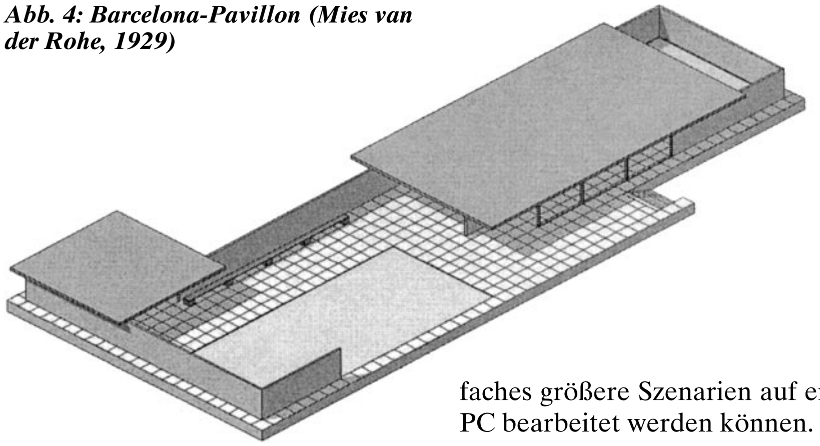

Abb. 4: Barcelona-Pavillon (Mies van der Rohe, 1929)

satz aus. Die Ausgleichung der verrauschten Punkte bewirkt neben der geometrischen Idealisierung eine Erhöhung der relativen Lagegenauigkeit.

Da bei diesem Beispiel die wahren Werte bekannt sind, kann die mittlere Klaffung zwischen Sollage zum Ausgleichungsergebnis gemäß

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_p}{n} \quad \text{mit} \qquad (6)$$
$$v_p = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

bestimmt werden. Sie beträgt ca. 7 cm. Dies entspricht dem halben Rauschpegel.

Die Variation des Rauschpegels führt zu ähnlichen Ergebnissen. In unterschiedlichen Simulationen schwankt der Quotient aus mittlerer aposteriori und mittlerer apriori Genauigkeit bei diesem Beispiel zwischen 0,45 und 0,53. Die mittlere Punktlagegenauigkeit wird folglich ungefähr verdoppelt.

Weitere simulierte Bauaufnahmen führten zu ähnlichen Zahlenwerten (MÜLLER 1999). Für die Rechenzeit kann in grober Näherung ein quadratischer Zusammenhang zwischen Laufzeit und Anzahl der Elemente genannt werden. Von Bedeutung ist der Grad der Verknüpfung der Elemente. Insbesondere übergeordnete Ebenen und Geraden steigern die Homogenität, wirken sich jedoch negativ auf die Performance aus. Der Einsatz von Sparse-Techniken stellt die quasi-optimale Nutzung der Ressourcen (Speicher, Prozessor) sicher, so daß auch um ein Vielfaches größere Szenarien auf einem PC bearbeitet werden können.

8 Physikalische Interpretation

Mit Hilfe eines physikalischen Modells kann die Homogenisierung nach der Methode der kleinsten Quadrate veranschaulicht werden. Seien zwei Geraden über drei Punkte beschrieben und senkrecht auszurichten. Eine Formschablone wird über Federn mit den Meßpunkten verbunden, wobei die Verbindung der beiden Endpunkte über eine verschiebbare Feder erfolgt (siehe Abbildung 6, oben). Die ungefähre Lage der Schablone kann mit dem Näherungswert iterativen Lösens verglichen werden. Durch Relaxation stellt sich der energetisch günstigste Zustand ein (Abbildung 6, unten). Summation der potentiellen Energie der einzelnen Federn führt zu der Gesamtenergie:

$$\sum_{i=1}^{3} E_{pot_i} = \sum_{i=1}^{3} \tfrac{1}{2} \cdot D_i \cdot s_i^2 = \min. \qquad (7)$$

Dabei steht D_i für die Federstärke und s_i für die Auslenkung der i-ten Feder. Die Äquivalenz zur Gaußschen Zielfunktion

$$\mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{P}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} P_i v_i v_i = \min \qquad (8)$$

ist offensichtlich. Der stabile Zustand des Federmodells entspricht der Lösung der Ausgleichungsrechnung.

Weitere Analogien sind ableitbar. Im stabilen Zustand gelten die Gesetze der Statik, also befinden sich die äußeren Kräfte und Momente im Gleichgewicht:

$$\sum_{i=1}^{3} F_{x_i} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{3} F_{y_i} = 0 \qquad (9a, b)$$

$$\sum_{i=1}^{3} M = 0 \qquad (10)$$

Die Kräfte entsprechen dem Produkt aus Federkonstante und Auslenkung, so daß im Falle einheitlicher Federkonstanten (Meßgenauigkeit) die Summe der Auslenkungen (Verschiebungen) null ist. Das sich einstellende Gleichgewicht der Momente erklärt, daß sich die Verschiebungen umgekehrt proportional zu den Längen der Schenkel verhalten, da das Moment als Produkt aus Kraft mal Hebelarm definiert ist. Damit das Kräftegleichgewicht gilt, entspricht die auf den gemeinsamen Punkt (Schnittpunkt der Geraden) wirkende Kraft der negativen Summe der beiden anderen. Dies erklärt anschaulich, warum dieser Punkt die größte Verschiebung erfährt.

Die Anwendung der Analogie auf komplexe Szenarien erklärt, warum übergeordnete geometrische Strukturen eine stabilisierende Wirkung besitzen. Mit ihrer räumlichen Ausdehnung verfügen sie über entsprechende Hebel und vermögen daher

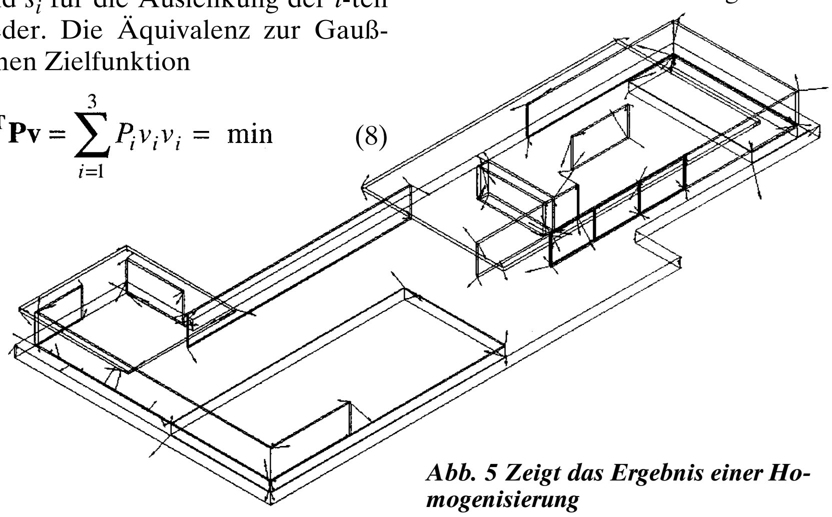

Abb. 5 Zeigt das Ergebnis einer Homogenisierung

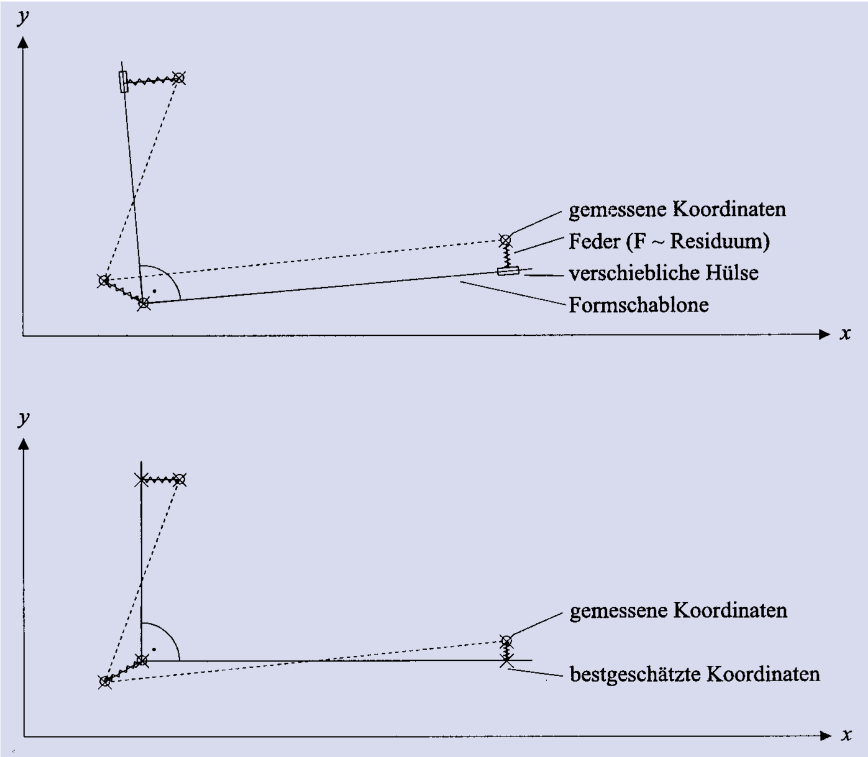

Bild 6 Physikalische Interpretation

lokale Störungen effektiv aufzufangen und einzubetten.

Literatur

BENNING, W., 1986: Analyse hybrider Lageaufnahmen in Sparse-Technik. ZfV, 111 (4): 506-513.
BENNING, W.; SCHWERMANN, R., 1997: PHIDIAS-MS – Eine digitale Photogrammetrieapplikation unter Micro Station für Nahbereichsanwendungen. AVN, 104 (1): 16–25.
BOPP, H.-P.; KRAUSS, H., 1978: Strenge oder herkömmliche bedingte Ausgleichung mit Unbekannten bei nichtlinearen Bedingungsgleichungen? AVN, 85 (1): 27–31.
DRIXLER, E., 1993: Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. DGK Reihe C, Heft-Nr. 409.
HANSON, R. L., 1978: A Posteriori Error propagation. In: Proceedings of the Second International Symposium on Problems Related to the Redefinition of North American Geodetic Networks, Arlington,VA, USA.
MÜLLER, J., 1999: Homogenisierung dreidimensionaler Szenarien nach der Methode der kleinsten Quadrate. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen, Nr. 56.
SHEN, J., 1996: Entwicklung eines dreidimensionalen Online-Meßsystems. Schriftreihe Fachrichtung Vermessungswesen der TH Darmstadt, Nr. 1.
SNAY, R. A., 1976: Reducing the Profile of Sparse Symmetric Matrices. In: Bulletin Geódésique, 50 (1): 341–352.

Anschrift der Verfasser:
Prof. Dr.-Ing. WILHELM BENNING,
Dr.-Ing. JÖRG MÜLLER
Geodätisches Institut der RWTH Aachen, Templergraben 55,
52056 Aachen,
Tel.: +49 (2 41) 80 53 00,
Fax: +49 (2 41) 8 88 81 42
E-Mail:
{benning, mueller}@gia.rwth-aachen.de

Zusammenfassung

Jedwede Digitalisierung dreidimensionaler Szenarien erfordert die Homogenisierung der Daten, wofür die Methode der kleinsten Quadrate die strenge Lösung liefert. Komplexe dreidimensionale Szenarien erfordern eine kombinierte Modellierung geometrischen und topologischen Wissens. Zur Ermittlung einer strengen Lösung ist die simultane Ausgleichung aller Informationen der sequentiellen Vorgehensweise überlegen. Für das beschriebene Problem werden das funktionale Modell und dessen Umsetzung in eine Prototypapplikation vorgestellt. Die Ergebnisse werden physikalisch interpretiert.

Summary

Every digitalization of three-dimensional scenes requires the homogenization of these data. The method of least squares gives the exact solution to this problem. Complex three-dimensional scenes demand a combined modeling of geometrical and topological knowledge. In order to obtain an exact solution, the simultaneous adjustment of the complete information is superior to the sequential method. The functional model and it's realization into a prototype application are presented for the above mentioned problem. The results are interpreted physically.