

Jochen Hettwer und  
Wilhelm Benning, Aachen

# Nachbarschaftstreue Koordinatenberechnung in der Kartenhomogenisierung

**Beim simultanen Ansatz zur Kartenhomogenisierung wurde bisher darauf verzichtet, Punktverschiebungen infolge der Realisierung geometrischer Bedingungen auf die Nachbarschaft zu übertragen. Der Beitrag beschreibt ein Verfahren, das sowohl transformationsbedingte Restklaffungen als auch Punktverschiebungen aufgrund geometrischer Beziehungen nachbarschaftstreu verteilt.**

## 1 Sequentielle und simultane Homogenisierung

Bei der Homogenisierung digitalisierter Karten werden verschiedene digitale Datenbestände zu einem einzigen homogenen Datenbestand zusammengefügt. Nach WIENS (1986) sind dazu folgende Arbeitsschritte nötig:

- Transformation der einzelnen Datenbestände in ein einheitliches Bezugssystem
- Angleichung gemeinsamer Randbereiche
- Nachbarschaftstreue Restklaffenverteilung

Häufig wird auch noch die Realisierung geometrischer Bedingungen mit einbezogen (HAAG und KÖHLER 1986, MORGENSTERN et al. 1988, BENNING und SCHOLZ 1990).

Bei der sequentiellen Homogenisierung werden die genannten Arbeitsschritte nacheinander ausgeführt, wobei die Realisierung der geometrischen Bedingungen erst am Ende

erfolgen darf – ansonsten würden die soeben hergestellten geometrischen Verhältnisse in den folgenden Arbeitsschritten wieder zerstört werden. Für die Einpassung in das Landessystem eignet sich eine überbestimmte Affintransformation (MORGENSTERN et al. 1988), weil die zwei dabei zur Verfügung stehenden Maßstäbe geeignet sind, die in der Digitalisierungsgrundlage vorhandenen Papierverzüge zu erfassen. Zur Beseitigung von Restklaffen erzielte WIENS (1986) die besten Resultate mit der multiquadratischen Restklaffeninterpolation. HAAG und KÖHLER (1986) verwenden stattdessen eine Verteilung der Restklaffen nach Abstandsgewichten. Zur Realisierung der geometrischen Bedingungen bietet sich ein Ausgleichungsansatz an, wobei die Bedingungen als Beobachtungen eingeführt werden und somit neben den Koordinaten ebenfalls Verbesserungen aufnehmen können (HAAG und KÖHLER 1986, MORGENSTERN et al. 1988).

Im Gegensatz zur sequentiellen Homogenisierung werden bei der simultanen Homogenisierung alle beschriebenen Arbeitsschritte gleichzeitig durchgeführt. Als mathematisches Modell kommt daher nur ein Ausgleichungsmodell in Frage, das sowohl die Transformation der Daten als auch die Herstellung geometrischer Bedingungen beinhaltet und Methoden zur nachbarschaftstreuen Koordinatenanpassung enthält (BENNING und SCHOLZ 1990, SCHOLZ 1992). Über die Gewichtung der einzelnen Beobachtungen muss sichergestellt werden, dass die geometrischen Bedingungen die höchste Priorität besitzen und dann erst die Einflüsse der nachbarschaftstreuen Koordinatenanpassung und der Transformation folgen.

Ein Problem bei der sequentiellen Homogenisierung ergibt sich aus der Tatsache, dass die aus der Realisierung der geometrischen Bedingungen resultierenden Punktverschiebungen nicht auf benachbarte Punkte übertragen werden. An dieser Stelle im Homogenisierungsprozess wird das Prinzip der Nachbarschaft verletzt. Eine entsprechende nachbarschaftstreue Koordinatenanpassung kann prinzipiell nur gleichzeitig mit der Realisierung der Bedingungen erfolgen, weil ansonsten die Gefahr besteht, dass die gewünschten geometrischen Bedingungen wieder zerstört werden.

Auch beim simultanen Ansatz zur Homogenisierung wurde bisher darauf verzichtet, Punktverschiebungen infolge der Realisierung geometrischer Bedingungen auf die Nachbarschaft zu übertragen (SCHOLZ 1992). Eine derartige nachbarschaftstreue Koordinatenanpassung sollte aber aus qualitativen und Konsistenzgründen in das verwendete Ausgleichungsmodell integriert werden. Ein Verfahren, das in der Lage ist, sowohl transformationsbedingte Restklaffen als auch Punktverschiebungen aufgrund geometrischer Bedingungen nachbarschaftstreu zu verteilen, wurde im Programmpaket KATHOM implementiert und wird im Folgenden vorgestellt.

## 2 Nachbarschaftstreue Koordinatenanpassung in der simultanen Homogenisierung

Die Erhaltung der Nachbarschaft wird im Programm KATHOM über fingierte Beobachtungsgleichungen im Ausgleichungsmodell erreicht. Derartige Gleichungen werden für jeweils zwei benachbarte Punkte aufgestellt. Diese Punktpaare wer-

den vor Beginn der Ausgleichung durch eine DELAUNAY-Triangulation (AURENHAMMER 1991) festgelegt: Jedes örtliche System, d.h. jede Punktmenge, die gemeinsam digitalisiert wurde und daher mit demselben Satz von Transformationsparametern behandelt wird, wird mit einer DELAUNAY-Triangulation vermascht (Abb. 1). Für jede Kante der Triangulation werden zwei Beobachtungsgleichungen aufgestellt, die sich auf die Endpunkte der Kante beziehen.

Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass ein einmaliges Durchlaufen des Ausgleichungsalgorithmus eine befriedigende Lösung ergibt, wird die Lösung iterativ durch Anwendung des GAUSS-NEWTON-Verfahrens (BRONSTEIN et al. 1999) ermittelt, wobei die geschätzten Parameter des letzten Iterationsschrittes als Näherungswerte für den nächsten Schritt verwendet werden. Die ersten Iterationsschritte werden ohne Berücksichtigung der fingierten Beobachtungsgleichungen durchgeführt, um verlässliche Werte für die Transformationsparameter der einzelnen örtlichen Systeme zu ermitteln. Wenn diese genau genug bestimmt sind, folgt die automatisierte Berechnung der Restklaffen für die Neupunkte

aller örtlichen Systeme nach der multiquadratischen Interpolation (HARDY 1972), abgeleitet aus den Restklaffen, die sich aus den Transformationsparametern an den Sollpunkten ergeben. Aus den interpolierten Restklaffen werden nun Beobachtungsgleichungen nach folgendem Verfahren erzeugt: Die Positionen zweier Punkte  $P_i$  und  $P_j$  eines örtlichen Systems nach der Transformation mit den berechneten Transformationsparametern seien  $\mathbf{P}_i' = (y_i', x_i')$  und  $\mathbf{P}_j' = (y_j', x_j')$ . Ihre endgültigen Koordinaten, die im Ausgleichungsmodell als Unbekannte behandelt werden, seien  $\hat{\mathbf{P}}_i = (\hat{y}_i, \hat{x}_i)$  und  $\hat{\mathbf{P}}_j = (\hat{y}_j, \hat{x}_j)$ . Die Restklaffen in den beiden Punkten (ob originär als Ergebnis der Transformation oder interpoliert, spielt keine Rolle) seien  $\mathbf{r}_i = (r_{yi}, r_{xi})$  und  $\mathbf{r}_j = (r_{yj}, r_{xj})$ . Mit diesen Definitionen ergeben sich für jeden Punkt Differenzen zwischen den transformierten und den endgültigen Koordinaten, vgl. Abb. 2:

$$\Delta y_i = \hat{y}_i - y_i' \quad (1)$$

$$\Delta x_i = \hat{x}_i - x_i' \quad (2)$$

bzw.

$$\Delta y_j = \hat{y}_j - y_j' \quad (3)$$

$$\Delta x_j = \hat{x}_j - x_j' \quad (4)$$

Da die Positionen  $\mathbf{P}_i'$  bzw.  $\mathbf{P}_j'$  bereits transformierte Koordinaten darstel-

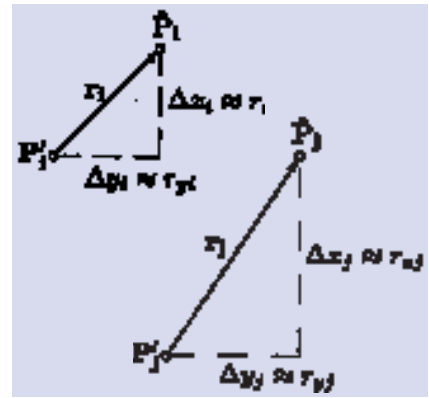


Abb. 2: Koordinatendifferenzen zwischen transformierten und endgültigen Koordinaten

len, führt die Anbringung der interpolierten Restklaffen zu den endgültigen Koordinaten. Dieser Zusammenhang wird in Abb. 2 dargestellt.

Die Beobachtungsgleichungen beinhalten, dass die Differenzen  $\Delta y_j - \Delta y_i$  und  $\Delta x_j - \Delta x_i$  bis auf kleine Verbesserungen  $v_x$  bzw.  $v_y$  den Differenzen der Restklaffenkomponenten ( $r_{yj} - r_{yi}$ ) bzw. ( $r_{xj} - r_{xi}$ ) entsprechen:

$$l_y + v_y = \Delta y_j - \Delta y_i - (r_{yj} - r_{yi}) \quad (5)$$

$$l_x + v_x = \Delta x_j - \Delta x_i - (r_{xj} - r_{xi}) \quad (6)$$

Die fingierten Beobachtungsreste  $l_x$  und  $l_y$  haben immer den Wert Null. Mit diesen Beobachtungsgleichungen wird erreicht, dass die Punkte nach der Anwendung der Transformation so weit verschoben werden, bis sie die durch die interpolierten Restklaffen vorgegebene Relativlage zueinander eingenommen haben.

Die weiteren Iterationsschritte werden unter Einbeziehung der zusätzlichen Verbesserungsgleichungen gerechnet, bis die maximale Änderung einer Koordinate in einem Iterationsschritt eine vorgegebene Schranke unterschreitet.

Das Verfahren an sich ist nicht neu. Im Ausgleichungsprogramm KAFKA wird es schon seit einigen Jahren zur nachbarschaftstreuen Verteilung transformationsbedingter Restklaffen eingesetzt (BENNING 1995). Neu ist jedoch die Anwendung auf den Fall der Homogenisierung, wo zusätzlich geometrische Bedingungen realisiert werden sollen. Hierbei ist von Vorteil, dass sich

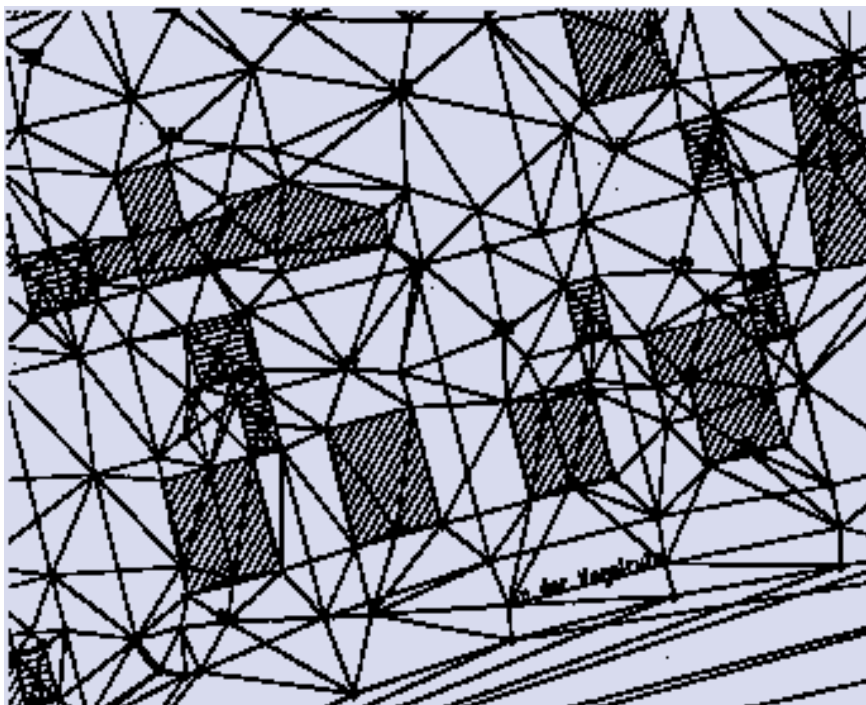


Abb. 1: DELAUNAY-Triangulation eines örtlichen Systems

die Verschiebung eines beliebigen Punktes über die Beobachtungsgleichungen (5) und (6) auf die benachbarten Punkte überträgt. Dies gilt nicht nur für restklaffenbedingte, sondern allgemein für beliebig verursachte Verschiebungen, also auch für solche, die aus geometrischen Zwangsbedingungen resultieren. Die Abbildungen 3 und 4 verdeutlichen, dass das Verfahren auch im Fall geometrischer Zwangsbedingungen für die Einhaltung des Prin-

zips der Nachbarschaft sorgt. Beide Abbildungen beschreiben dieselbe Situation, in der für die nördliche Begrenzung der Straße „An der Vogelrute“ eine Geradheitsbedingung aufgestellt worden ist. Für jeden Punkt ist ein aus der Homogenisierung abgeleiteter Verschiebungsvektor dargestellt. Während Abb. 3 das Ergebnis der bisherigen Vorgehensweise zeigt, bei dem nur die transformationsbedingten Restklaffen auf die umliegenden Punkte ver-

teilt werden, bewirken in Abb. 4 auch die Punktverschiebungen infolge der Geradheitsbedingung Punktverschiebungen in ihrer Nachbarschaft. Es ist unschwer zu erkennen, dass das Prinzip der Nachbarschaft nur im Ergebnis der Abb. 4 eingehalten wird, nicht aber in Abb. 3. Beide Ergebnisse wurden mit dem Programm KATHOM erzeugt, welches sowohl den Ansatz zur Restklaffenbeseitigung über Abstandsgewichte und ohne Dreiecksvermaschung enthält (wie im System FLASH, vgl. SCHOLZ 1990) als auch den neuen o.a. nachbarschaftstreuen Ansatz.

### 3 Nachbarschaftstreue Koordinatenanpassung in der sequentiellen Homogenisierung

Bei der sequentiellen Homogenisierung lässt sich das Problem der nachbarschaftstreuen Koordinatenanpassung in zwei Teilprobleme aufspalten: Einerseits müssen die aus der Transformation herrührenden Restklaffen nachbarschaftstreu verteilt werden, andererseits soll auch die Realisierung der geometrischen Bedingungen nachbarschaftstreu erfolgen. Das erste Teilproblem ist durch den Einsatz der multiquadratischen Restklaffeninterpolation befriedigend gelöst (WIENS 1986). Für das zweite Teilproblem kann der im letzten Abschnitt vorgestellte Ansatz in modifizierter Form verwendet werden. Dazu müssen fingierte Beobachtungsgleichungen in das Ausgleichungsmodell zur Herstellung der geometrischen Bedingungen integriert werden.

Da der gesamte Komplex der Transformation und der damit zusammenhängenden Restklaffenverteilung nun nicht mehr Bestandteil des Ausgleichungsmodells ist, vereinfachen sich die Gleichungen (5) und (6) folgendermaßen:  $\mathbf{P}_i' = (y_i', x_i')$  und  $\mathbf{P}_j' = (y_j', x_j')$  bezeichnen nun die Koordinatenbeobachtungen, mit denen man in das Modell eingeht. Da die Restklaffen  $\mathbf{r}_i = (r_{yi}, r_{xi})$  und  $\mathbf{r}_j = (r_{yj}, r_{xj})$  schon verteilt worden sind, sind sie nicht mehr Bestandteil der Beobachtungsgleichungen.  $\hat{\mathbf{P}}_i =$



Abb. 3: Verschiebungsvektoren bei der klassischen Homogenisierung (fünffach überhöht)



Abb. 4: Verschiebungsvektoren beim hier beschriebenen Ansatz (fünffach überhöht)

$(\hat{y}_i, \hat{x}_i)$  und  $\hat{\mathbf{P}}_j = (\hat{y}_j, \hat{x}_j)$  bezeichnen weiterhin die ausgeglichenen Koordinaten, die im Modell den Status von Unbekannten besitzen. Mit den Differenzen  $\Delta y_i$ ,  $\Delta x_i$ ,  $\Delta y_j$  und  $\Delta x_j$  aus den Gleichungen (1) bis (4) erhält man folgende Verbesserungsgleichungen:

$$l_y + v_y = \Delta y_j - \Delta y_i \quad (7)$$

$$l_x + v_x = \Delta x_j - \Delta x_i \quad (8)$$

Die fingierten Beobachtungsreste  $l_y$  und  $l_x$  sind wieder Null. Durch Umsortieren der einzelnen Größen erhält man aus den Gleichungen (7) und (8):

$$l_y + v_y = (\hat{y}_j - \hat{y}_i) - (y_j' - y_i') \quad (9)$$

$$l_x + v_x = (\hat{x}_j - \hat{x}_i) - (x_j' - x_i') \quad (10)$$

Diese Form lässt sich direkt interpretieren: Die Differenzen der ausgeglichenen Koordinatenunbekannten sollen gleich denen der Koordinatenbeobachtungen sein. Mit diesem Mechanismus lässt sich die Koordinatenänderung eines beliebigen Punktes auch auf die über DELAUNAY-Seiten mit ihm verbundenen Punkte übertragen. Die Herstellung der Nachbarschaftstreue bei Punktverschiebungen, die durch geometrische Bedingungen verursacht werden, erfolgt auf diese Weise gleichzeitig mit der Realisierung dieser Bedingungen, wie es in Abschnitt 1 gefordert worden ist.

Die Stärke des Effekts kann über die im Rahmen der Ausgleichung verwendeten Gewichte gesteuert werden, die den Koordinatenbeobachtungen einerseits und den Gleichungen (9) und (10) andererseits zugeordnet werden. Je höher die Gewichte der Koordinatenbeobachtungen gewählt werden, umso stärker ist die Tendenz der Punkte, ihre ursprüngliche Position beizubehalten. Je höher die Gewichte der fingierten Beobachtungen aus den Gleichungen (9) und (10) angesetzt werden, umso stärker werden Punkte im Rahmen der nachbarschaftstreuen Koordinatenanpassung mitgezogen. Damit die geometrischen Bedingungen mit angemessener Genauigkeit realisiert werden, ist es allerdings nötig, die Bedingungsbeobachtungen höher

zu gewichten als die Koordinatenbeobachtungen und die fingierten Beobachtungen zur Koordinatenanpassung.

## 4 Schlussbetrachtung

Das vorgestellte Verfahren der nachbarschaftstreuen Koordinatenanpassung ermöglicht in der simultanen und der sequentiellen Homogenisierung die strenge Einhaltung des Prinzips der Nachbarschaft. In der simultanen Homogenisierung werden Punktverschiebungen beliebigen Ursprungs auf die Nachbarschaft verteilt. In der sequentiellen Homogenisierung kann der zur Realisierung der geometrischen Bedingungen verwendete Ausgleichungsansatz derart erweitert werden, dass dabei auftretende Punktverschiebungen nachbarschaftstreu behandelt werden. Die Fähigkeit, auch die durch die Einhaltung geometrischer Bedingungen erzeugten Punktbebewegungen nachbarschaftstreu zu verteilen, unterscheidet das vorgestellte Verfahren von den bisher verwendeten Ansätzen (HAAG und KÖHLER 1986, MORGENSTERN et al. 1988, ROSE 1988, SCHOLZ 1992), in denen dies nicht vorgesehen ist.

## Literatur

- AURENHAMMER, F.: Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys* 23(3):345–405, 1991.
- BENNING, W.: Nachbarschaftstreue Restklaffenverteilung für Koordinatentransformationen. *Z. f. Verm.wesen* 120:16–25, 1995.
- BENNING, W. und SCHOLZ, T.: Modell und Realisierung der Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungstechniken. *Z. f. Verm.wesen* 115:45–55, 1990.
- BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. und MÜHLIG, H.: Taschenbuch der Mathematik. 4. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main – Thun, 1999.
- HAAG, K. und KÖHLER, G.: Realisierung geometrischer Bedingungen bei der Digitalisierung von Katasterkarten. *Allg. Verm. Nachr.* 93:190–202, 1986.
- HARDY, R. L.: Geodetic applications of multiquadric analysis. *Allg. Verm. Nachr.* 79:398–406, 1972.

MORGENSTERN, D., PRELL, K.-M. und RIEMER, H.-G.: Digitalisierung, Aufbereitung und Verbesserung inhomogener Katasterkarten. *Allg. Verm. Nachr.* 95:314–324, 1988.

ROSE, A.: Geraden- und Rechtwinkelausgleichung bei der Digitalisierung von Katasterkarten. *Z. f. Verm.wesen* 113:581–587, 1988.

SCHOLZ, T.: Zur Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungsmethoden. Veröffentlichung des Geodätischen Instituts der RWTH Aachen Nr. 47, Aachen, 1992.

WIENS, H.: Flurkartenerneuerung mittels Digitalisierung und numerischer Bearbeitung unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenschlusses von Inselkarten zu einem homogenen Rahmenkartenwerk. Kirschbaum-Verlag, Bonn, 1986.

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. JOCHEN HETTWER und Univ.-Prof. Dr.-Ing. WILHELM BENNING, Geodätisches Institut der RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen

## Zusammenfassung

**Der Aufsatz diskutiert den sequentiellen und den simultanen Ansatz zur Kartenhomogenisierung und stellt ein Verfahren vor, mit dem bei beiden Ansätzen eine nachbarschaftstreue Anpassung der Daten erreicht werden kann. Das beschriebene Verfahren zeichnet sich dadurch aus, dass auch Punktverschiebungen infolge geometrischer Bedingungen nachbarschaftstreu verteilt werden.**

## Summary

**The paper discusses the sequential and the simultaneous approach of the conflation of maps and describes a method of processing the data considering geometrical neighbourhood within both approaches. The method given is capable of adapting the surrounding area of points moved due to geometrical constraints.**