



# Varianzkomponentenschätzung in ingenieurgeodätischen Netzen

Detlef Sieg und Milo Hirsch,  
Darmstadt

## Teil 1: Theorie

**Der Informationsgehalt geodätischer Beobachtungen wird – insbesondere bei heterogenem Material – häufig durch gewöhnliche Ausgleichungsansätze nicht ausgeschöpft, da im Allgemeinen neben den unbekannt Parametern des funktionalen Modells mit der Varianz der Gewichtseinheit nur eine einzige globale Größe des stochastischen Modells geschätzt wird. Liegen jedoch a priori Kenntnisse der stochastischen Struktur der Beobachtungen vor, so wird die Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten möglich, die häufig zu einer Verbesserung der Ausgleichungsergebnisse führt.**

### 1 Motivation

Der Informationsgehalt geodätischer Beobachtungen wird – insbesondere bei heterogenem Material – häufig durch (gewöhnliche) Ausgleichungsansätze nicht ausgeschöpft, da im Allgemeinen neben den unbekannt Parametern des funktionalen Modells mit der Varianz der Gewichtseinheit nur eine einzige globale Größe des stochastischen Modells geschätzt wird. Liegen jedoch a priori Kenntnisse der stochastischen Struktur der Beobachtungen vor, so wird die Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten möglich, die häufig zu einer Verbesserung der Ausgleichungsergebnisse führt; WELSCH (1984).

Dass diese Erkenntnisse gerade in letzter Zeit wieder das zunehmende Interesse der Geodäten gefunden haben, hat im Wesentlichen zwei Ursachen:

Zum einen entstehen mit dem modernen Instrumentarium der Ingenieurgeodäsie mit geringerem Aufwand

hochredundante Präzisionsnetze, d.h. es liegt ausreichend Information vor, um die zusätzlichen Parameter eines erweiterten stochastischen Modells signifikant zu bestimmen.

Zum anderen versagt in räumlichen Netzen die empirische Abstimmung der Gewichtsverhältnisse von heterogenen Beobachtungen meist, weil insbesondere die Genauigkeit der Zenitwinkel – und in noch viel größerem Maße die von vorausgewerteten GPS-Messungen – durch zahlreiche, nicht quantifizierbare Faktoren beeinflusst wird.

### 2 Einführung

Sind die Genauigkeitsverhältnisse innerhalb eines bestimmten Beobachtungstyps meist gut bekannt, so wird bei der Zusammenfassung verschiedenartiger Beobachtungstypen in einer Ausgleichung das Problem der gegenseitigen Gewichtsabstimmung aufgeworfen.

In einem solchen Fall kann das stochastische Modell bereits durch den **Ansatz von Gruppenvarianzen** optimal angepasst werden. Für jeden Beobachtungstyp wird dazu eine unbekannte Varianzkomponente angesetzt, mit der die den jeweiligen Beobachtungstypen zugeordneten Kovarianzmatrizen zu multiplizieren sind. Die gesamte Kovarianzmatrix setzt sich dann aus den einzelnen Kovarianzmatrizen zusammen und hat Blockdiagonalstruktur.

Ist eine solche Anpassung alleine noch nicht ausreichend, ermöglichen „adaptive“ **Varianzkomponenten** eine problemorientierte Aufspaltung der jeweiligen Kovarianzmatrizen in weitere Untermatrizen, die auf verschiedene Fehleranteile (z.B. konstante und streckenabhängige) zurückzuführen sind.

Für jede angesetzte Varianzkomponente kann auch eine Genauigkeit mitgeschätzt werden. Damit wird auch eine qualitative Beurteilung des stochastischen Modells möglich.

Die Theorie zur Varianz-Kovarianz-Komponentenschätzung wurde größtenteils Anfang der siebziger Jahre entwickelt (EBNER (1972), KUBIK (1967), RAO (1970), TOWNSEND & SEARLE (1971)). Wichtige Beiträge lieferten später auch GRAFAREND und D'HONE (1978), KELM (1978) und GRAFAREND (1978). Als besonders interessant für die Bestimmung von Varianz- und Kovari-

anzkomponenten haben sich die besten (best) invarianten (invariant) quadratischen (quadratic) unverzerrten (unbiased) Schätzer (estimator) (BIQUE) erwiesen. Iterativ angewandt, besitzen sie die gleichen Optimalitätseigenschaften wie der bekannte Schätzer für die Varianz der Gewichtseinheit: Sie sind unverzerrt, unabhängig von den festen Parametern und führen auf minimale Varianz (WELSCH (1984), KOCH (1997)).

Eine ausführliche systematische Zusammenstellung der Gebrauchsformeln für die BIQUE von Varianz- und Kovarianzkomponenten auch bei sequentiellen Ausgleichungstechniken, d.h. bei der Zusammenführung von vorausgeglichenen Teilnetzen mit weiteren Beobachtungen, gibt OSWALD (1992). Zur Reduzierung des numerischen Aufwandes bei der Berechnung der lokalen BIQUE werden unter Aufgabe von statistischen Optimalitätseigenschaften in OSWALD (1992) ferner vereinfachte Schätzfunktionen angegeben. Diese liefern im Konvergenzpunkt identische Ergebnisse, haben jedoch den Nachteil, dass sie keine Aussagen über die Dispersion der geschätzten Varianz- und Kovarianzkomponenten liefern. Sie sind ferner mit dem „Förstner-Schätzer“ (FÖRSTNER (1979a, 1979b)), der starken Eingang in die Praxis gefunden hat, äquivalent.

Eine Schätzung von Kovarianzkomponenten ist in der Theorie zwar möglich, jedoch ist keine praktische Anwendung bekannt, die sich sinnvoll in ein Netzausgleichungsprogramm integrieren lässt. Das Problem liegt darin, dass auch bei der Kovarianzkomponentenschätzung nicht einzelne Elemente der Kovarianzmatrix geschätzt werden können, sondern die Struktur der Kovarianzen – zumindest in größeren Blöcken – bereits bekannt sein muss. Allgemeingültige Kovarianzen sind für die üblichen Messverfahren jedoch nicht anwendbar, und die Ableitung einer solchen Struktur erfordert umfangreiche Messungen und Untersuchungen und ist in der Praxis nicht gegeben. Aber selbst wenn die Struktur block- oder gruppenweise bekannt ist, benötigt man immer noch sehr viele Messwerte, um neben Varianzkomponenten auch noch Kovarianzkomponenten schätzen zu können; denn wie Beispiele (KOCH, 1981) zeigen, ist schon für die Schätzung einer einzelnen signifikanten Varianzkomponente in den zugehörigen Messungen eine Redundanz notwendig, die deutlich über 10 liegen sollte.

Daher beschränkt sich die Untersuchung im Folgenden auf die Varianzkomponentenschätzung (VKS). Als Schätzer bietet sich die beste invariante quadratische erwartungstreue Schätzung (BIQUE) an, bei der auch Genauigkeitsmaße für die Varianzkomponenten mitgeschätzt werden können. Folgende Punkte sollten bei der Schätzung vorgesehen werden:

- Um heterogene Beobachtungen optimal in einem Gesamtmodell kombinieren zu können, ist es zumindest erforderlich, für jeden Beobachtungstyp (Streckenmessung, Zenitwinkel, Richtungsmessung, Koordinatendifferenz, . . .) eine Varianzkomponente vorzusehen.

- Bei durch elektrooptische Entfernungsmessung ermittelten Strecken ist eine weitere Verfeinerung des stochastischen Modells durch Zerlegung der Varianz in einen konstanten und einen von der Länge der Strecke abhängigen Anteil denkbar.
- Bei Zenitwinkeln sollte eine Zerlegung in einen konstanten und einen mit dem Quadrat der Zielweite anwachsenden Anteil möglich sein. Diese Aufspaltung kann auch durch die Vorstellung motiviert werden, dass sich die Varianz aus einer inneren Genauigkeit der Zenitwinkelmessung und einem Zieleinstellfehler zusammensetzt.
- Analog zur Vorgehensweise bei den Zenitwinkeln erscheint es sinnvoll, auch bei Richtungsbeobachtungen eine Zerlegung der Varianz in einen konstanten und in einen streckenabhängigen Anteil vorzusehen.
- Eine weitere Untergliederung des stochastischen Modells sollte möglich sein durch Bildung verschiedener Gruppen von Messwerten innerhalb eines Beobachtungstyps, z.B. für jeden Standpunkt bei Richtungsmessungen oder für jede Session bei Vermessungen mit Satellitennavigationssystemen.

### 3 Das stochastische Modell der adaptiven Varianzkomponenten

#### 3.1 Herleitung

Das zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten erweiterte Gauß-Markoff-Modell definiert sich nach KOCH (1997, S. 245) wie folgt:

*Es sei  $X$  eine  $n \times u$  Matrix gegebener Koeffizienten,  $\beta$  ein  $u \times 1$  Vektor unbekannter Parameter,  $y$  ein  $n \times 1$  Zufallsvektor von Beobachtungen, dessen Kovarianzmatrix  $D\{y\} = \Sigma$  positiv definit sei, dann bezeichnet man*

$$X \beta = E\{y\} \quad \text{mit}$$

$$D\{y\} = \Sigma = \sigma_1^2 \alpha_1^2 T_1 + \sigma_{12} \alpha_{12} T_2 + \dots + \sigma_k^2 \alpha_k^2 T_k \\ = \sigma_1^2 V_1 + \sigma_{12} V_2 + \dots + \sigma_k^2 V_k$$

*als Gauß-Markoff-Modell mit  $k$  unbekanntem Varianz- und Kovarianzkomponenten  $\sigma_p^2$  und  $\sigma_{pq}$  mit  $p \in (1, \dots, l)$ ,  $p < q \leq l$  und  $l \leq k \leq l(l+1)/2$ . Die Faktoren  $\alpha_p^2$  und  $\alpha_{pp}$  seien bekannt und Näherungswerte für die Produkte  $\alpha_p^2 \sigma_p^2$  und  $\alpha_{pq} \sigma_{pq}$ . Weiter seien die  $n \times n$  Matrizen  $T_i$  und damit  $V_i$  für  $i \in (1, \dots, k)$  bekannt und symmetrisch, und  $\sum_{i=1}^k V_i$  sei positiv definit.*

Spezialisiert auf die in der Einführung formulierten Anforderungen und unter Verzicht auf die Schätzung von Kovarianzkomponenten ergibt sich als Zerlegung für die Kovarianzmatrix

$$D\{y\} = \Sigma = \sum_{i=1}^h \sum_{c=1}^{b_i} \sigma_v^2 \alpha_v^2 T_i^c = \sum_{i=1}^h \sum_{c=1}^{b_i} \sigma_v^2 V_i^c$$

$$\text{mit} \quad v = \sum_{m=1}^{i-1} b_m + c$$

und als Näherung für die Kovarianzmatrix, wenn die ge-

suchten Varianzkomponenten zu Eins gesetzt werden

$$\Sigma_0 = \sum_{i=1}^h \sum_{c=1}^{b_i} V_i \quad (1)$$

Dies heißt, es werden  $i = 1, \dots, h$  verschiedene Gruppenvarianzen angesetzt, wobei wiederum die  $i$ -te Gruppenvarianz in  $c = 1, \dots, b_i$  Einzelkomponenten unterteilt sein kann (**adaptives Modell**). Insgesamt werden also  $k = \sum_{i=1}^h b_i$  Varianzkomponenten eingeführt.

**Beispiel** zu (1): Für eine Schätzung von fünf Varianzkomponenten ergibt sich als eine Möglichkeit für die genäherte Kovarianzmatrix

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} V_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2^1 + V_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^1 + V_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} V_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2^1 + V_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^1 + V_3^2 \end{bmatrix}$$

Zum einfacheren Umgang mit Blockmatrizen werden einige Konventionen eingeführt: Wie mit (3) beispielhaft für eine Matrix aus  $3 \times 3$  Blöcken gezeigt, werden die Matrixblöcke mit indizierten kursiven Großbuchstaben identifiziert. Bei den Diagonalblöcken kann die Doppelindizierung entfallen. Entsprechend (4) bezeichnen fette, kursive und indizierte Großbuchstaben diejenige Matrix, bei der alle anderen Blöcke durch Nullmatrizen ersetzt sind.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_2 & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

z. B.

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

In der Beispielmatrix (2) gibt es drei verschiedene Gruppenvarianzen, von denen jeweils zwei nach dem adaptiven Modell weiter aufgeteilt sind. Eine solche Aufteilung ist bei einer Netzausgleichung für Streckenmessungen, Zenitwinkel und Richtungsbeobachtungen denkbar, wenn Genauigkeiten für streckenabhängige und konstante Fehleranteile getrennt voneinander bestimmt werden sollen. Jeder Beobachtungstyp bildet eine Gruppe, deren zugehörige stochastische Struktur zur gesamten Kovarianzinformation einen Matrixblock  $V$  beiträgt. Dabei werden die Matrixblöcke entlang der Diagonalen mit einem tiefgestellten Index durchnummeriert. Bei einer weiteren adaptiven Aufspaltung der Kovarianzblöcke für eine Beobachtungsart werden die einzelnen Teilblöcke durch hochgestellte Indexzahlen gekennzeichnet. Es soll im Weiteren vorausgesetzt werden, dass Korrelationen nur innerhalb der jeweiligen Gruppe, jedoch nicht zwischen Messungen, die zu verschiedenen Gruppen gehören, auftreten. Die Struktur der Matrixblöcke ist von der Fehlermodellierung des je-

weiligen Beobachtungstyps abhängig und wird in Abschn. 3 näher diskutiert.

Die Ableitung der Formeln zur Berechnung der besten (best) invarianten (invariant) quadratischen (quadratic) unverzerrten (unbiased) Schätzung (estimation) (**BI-QUE**) ist in KOCH (1997) ausführlich dargestellt, so dass hier nur die für die weiteren Ausführungen benötigten Ergebnisse übernommen werden.

Unter Verwendung des Projektionsoperators

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \Sigma_0^{-1} \quad (5)$$

wird die symmetrische Matrix  $\mathbf{W}$  mit

$$\mathbf{W} = \Sigma_0^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{R}) \quad (6)$$

eingeführt.

Hinzu kommen die Hilfsgrößen  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{S}$ :

$$\mathbf{q} = (q_v) = (\hat{\mathbf{e}}^T \Sigma_0^{-1} \mathbf{V}_i^c \Sigma_0^{-1} \hat{\mathbf{e}}^T) \quad (7)$$

$$\text{für } v \in (1, \dots, k); \quad v = \sum_{m=1}^{i=1} b_m + c$$

$$\text{mit } i \in (1, \dots, h); \quad c \in (1, \dots, b_i)$$

$$\mathbf{S} = (s_{vw}) = sp(\mathbf{W} \mathbf{V}_i^c \mathbf{W} \mathbf{V}_i^d) \quad (8)$$

$$\text{für } v, w \in (1, \dots, k);$$

$$v = \sum_{m=1}^{i=1} b_m + c; \quad w = \sum_{m=1}^{j=1} b_m + d$$

$$\text{mit } i, j \in (1, \dots, h);$$

$$c \in (1, \dots, b_i); \quad d \in (1, \dots, b_j)$$

Dabei ist  $\hat{\mathbf{e}}$  der Vektor der Residuen. Bezeichnet man mit dem  $n \times 1$  Vektor  $\hat{\mathbf{y}}$  die Schätzwerte der Erwartungswerte  $E\{\mathbf{y}\}$  der Beobachtungen, so erhält man den  $n \times 1$  Vektor  $\hat{\mathbf{e}}$  der Schätzwerte des Zufallsvektors  $\mathbf{e}$  der Fehler von  $\mathbf{y}$  zu

$$\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \quad \text{mit } \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}},$$

wobei  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  Schätzwerte für Parameter  $\boldsymbol{\beta}$  sind.

Für das Beispiel (2) sehen die Hilfsgrößen (7) und (8) wie folgt aus:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_1) \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2^1 \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2^2 \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{V}_3^1 \mathbf{P}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{V}_3^2 \mathbf{P}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{\mathbf{e}}_1^T \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{e}}_1) \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2^1 \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ (\hat{\mathbf{e}}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{V}_2^2 \mathbf{P}_2 \hat{\mathbf{e}}_2) \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{V}_3^1 \mathbf{P}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\ (\hat{\mathbf{e}}_3^T \mathbf{P}_3 \mathbf{V}_3^2 \mathbf{P}_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\text{wobei } \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$\Sigma_0^{-1} = \mathbf{P}$$

$$= \begin{bmatrix} V_1^1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2^1 + V_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^1 + V_3^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}$$

und

$$S = \begin{bmatrix} sp(WV_1WV_1) & & & & \\ sp(WV_1WV_2) & sp(WV_2WV_2) & & & \\ sp(WV_1WV_3) & sp(WV_2WV_3) & sp(WV_3WV_3) & & \\ sp(WV_1WV_3) & sp(WV_2WV_3) & sp(WV_3WV_3) & sp(WV_3WV_3) & \\ sp(WV_1WV_3) & sp(WV_2WV_3) & sp(WV_3WV_3) & sp(WV_3WV_3) & sp(WV_3WV_3) \end{bmatrix} \quad \text{symmetrisch}$$

Am Aufbau der Matrix  $S$  wird deutlich, dass die durch die Matrizen  $V$  repräsentierte stochastische Information der einzelnen Beobachtungstypen und gegebenenfalls deren adaptiven Teilkomponenten in allen Kombinationen miteinander verflochten werden und so in die Schätzung der Varianzkomponenten mit eingehen.

Für die Inverse der genäherten Kovarianzmatrix wurde dabei die Notation

$$\Sigma_0^{-1} = P = \text{diag}(P_1, P_2, \dots, P_h)$$

eingeführt.

Die geschätzten Varianzkomponenten errechnen sich nun zu

$$\hat{\sigma} = S^{-1}q, \quad \text{wobei } \sigma = [\sigma_1^2 \quad \sigma_2^2 \quad \dots \quad \sigma_k^2]^T \quad (10)$$

mit ihren zugehörigen Varianzen, die sich aus den Diagonalelementen der invertierten Matrix  $S$  (8) ergeben

$$V\{\hat{\sigma}_v^2\} = s_{vv} \quad S^{-1} = (s_{vw})$$

Diese Schätzwerte sind jedoch nur eine lokal beste Schätzung, weil in die Aufstellung von  $W$  (6) und  $q$  (7) die genäherte Kovarianzmatrix (1) eingeht.

Um die Schätzungen und ihre Varianzen unabhängig von den gewählten Näherungswerten  $\alpha_v^2$  zu erhalten, sind mit der ersten Schätzung  $(\hat{\sigma}_v^2)_1 = \sigma_v^2$  und mit  $(\alpha_v^2)_1 = \alpha_v^2$  die Produkte  $(\hat{\sigma}_v^2)_1(\alpha_v^2)_1$  als neue Näherungswerte  $(\alpha_v^2)_2 = (\hat{\sigma}_v^2)_1(\alpha_v^2)_1$  in eine zweite Schätzung der Varianzkomponenten mit dem Ergebnis  $(\hat{\sigma}_v^2)_2$  einzuführen. Es ist dann so lange zu iterieren, bis nach  $n$  Iterationen  $(\hat{\sigma}_v^2)_n = 1$  für alle  $k$  Komponenten erhalten wird.

Im Punkt der Konvergenz reproduzieren sich die Schätzungen, da die Schätzwerte gleich den Näherungswerten werden. Die Produkte  $(\hat{\sigma}_v^2)_n(\alpha_v^2)_n$  liefern im Konvergenzpunkt unabhängig von den gewählten Näherungswerten die **Varianzkomponenten der iterierten Schätzung**

$$(\alpha_v^2)_n = \alpha_v^2 \prod_{m=1}^{n-1} (\hat{\sigma}_v^2)_m \quad \text{für } (\hat{\sigma}_v^2)_n = 1. \quad (11)$$

Für die ursprünglichen Näherungswerte  $\alpha_v^2 = (\alpha_v^2)_1$  und somit auch für die durch  $V_i^c$  gegebenen stochastischen Teilinformationen ergeben sich als Korrekturfaktoren  $f_v^2$  für das jeweilige Varianzniveau

$$f_v^2 = \prod_{m=1}^{n-1} (\hat{\sigma}_v^2)_m. \quad (12)$$

Die Genauigkeit für die  $l$ -te Beobachtung ist bekanntermaßen durch die Wurzel aus dem zugehörigen Diago-

nalelement  $\Sigma_{ll}$  der Kovarianzmatrix definiert. Nach der Varianzkomponentenschätzung erhält man für die Standardabweichung  $s$  der  $l$ -ten Beobachtung, die sich o.B.d.A. in Gruppe  $i$  befinden soll

$$s_l = \sqrt{\Sigma_{ll}} = \sqrt{\sum_{c=1}^{b_i} f_v^2 (V_i^c)_{ll}} = \sum_{c=1}^{b_i} f_v \sqrt{(V_i^c)_{ll}} \quad (13)$$

$$\text{mit } v = \sum_{m=1}^{i-1} b_m + c$$

Ist die stochastische Information der Gruppe  $i$  nicht weiter unterteilt, sondern analog zu Gruppe 1 in Beispiel (2) durch  $V_i$  vollständig beschrieben, so vereinfacht sich (13) zu

$$s_l = f_v \sqrt{(V_i)_{ll}} \quad \text{mit } f_v = \prod_{m=1}^{n-1} (\hat{\sigma}_v^2)_m \quad (14)$$

und der Faktor  $f_v$  gibt unmittelbar die Korrektur für die Standardabweichungen der zu Gruppe  $i$  gehörenden Beobachtungen an.

### 3.2 Aspekte einer effektiven numerischen Berechnung

Für die effiziente Berechnung der Varianzkomponenten wird die Aufstellung der Matrix  $S$  (8) entsprechend OSWALD (1992) auf anteilige Normalgleichungsmatrizen zurückgeführt. Diese Ableitung gilt jedoch nur für Gruppenvarianzen und geht somit davon aus, dass wie bei Gruppe 1 des Beispiels (2) für alle Gruppen der Zusammenhang  $V_i P_i = I$  gilt.

Hier soll jedoch neben der gruppenweisen Varianzkomponentenschätzung auch die Berechnung von **adaptiven Varianzkomponenten** ermöglicht werden. Diese gehören zu einer Gruppe  $i$ , deren stochastische Information nach dem adaptiven Modell in mehrere Anteile aufgespalten ist (Gruppen 2 und 3 in Beispiel (2)).

Die Ableitung ist daher unter Beachtung von

$$V_i^c P_i \neq I$$

zu erweitern.

Dazu wird zunächst auch die Koeffizientenmatrix entsprechend der  $h$  Gruppenvarianzen in Blöcke aufgeteilt

$$X = \begin{bmatrix} X_{1l} \\ X_{2l} \\ \vdots \\ X_{hl} \end{bmatrix};$$

$$X^T = \begin{bmatrix} (X_{1l})^T & (X_{2l})^T & \dots & (X_{hl})^T \\ X_{1l}^T & X_{2l}^T & \dots & X_{hl}^T \end{bmatrix}$$

Für die Aufstellung der Matrix  $S$  benötigt man die Matrizenprodukte  $WV_i^c$  und  $WV_j^d$  die sich nach (5) und (6) zu

$$WV_i^c = PV_i^c - PXN^{-1}X^T PV_i^c \quad (15)$$

$$WV_j^d = PV_j^d - PXN^{-1}X^T PV_j^d$$

ergeben.

Bei der Berechnung dieser Matrizenprodukte können viele Rechenoperationen eingespart werden, wenn die Blockstrukturen der beteiligten Matrizen beachtet werden. Für das Matrizenprodukt  $X^T PV_i^c$  erhält man zunächst eine  $u \times n$  Matrix. Dabei sind  $u$  die Anzahl der Unbekannten und  $n$  die Anzahl der Beobachtungen. Das # steht für einen Matrixblock mit beliebigen Zahlen. Die übrigen  $h - 1$  Matrixblöcke  $O$  enthalten nur Nullen.

$$X^T PV_i^c = [O \quad \dots \quad O \quad \#_{li} \quad O \quad \dots \quad O] \quad (16)$$

Daraus folgt für die  $u \times n$  Matrix  $N^{-1}X^T PV_i^c$

$$N^{-1}X^T PV_i^c = [O \quad \dots \quad O \quad \#_{li} \quad O \quad \dots \quad O]$$

und für die aus  $h \times h$  Blöcken bestehende  $n \times n$  Matrix  $XN^{-1}X^T PV_i^c$

$$XN^{-1}X^T PV_i^c = \begin{bmatrix} O & \dots & O & \#_{li} & O & \dots & O \\ O & \dots & O & \#_{2i} & O & \dots & O \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ O & \dots & O & \#_{hi} & O & \dots & O \end{bmatrix}.$$

Man erhält schließlich die Besetzungsstrukturen

$$WV_i^c = \begin{bmatrix} O & \dots & (WV_i^c)_{li} & \dots & O & O \\ O & \dots & (WV_i^c)_{2i} & \dots & O & O \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ O & \dots & (WV_i^c)_{hi} & \dots & O & O \end{bmatrix};$$

$$WV_j^d = \begin{bmatrix} O & O & \dots & (WV_j^d)_{lj} & \dots & O \\ O & O & \dots & (WV_j^d)_{2j} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & O & \dots & (WV_j^d)_{hj} & \dots & O \end{bmatrix}$$

und die nur in jeder Spalte  $j$  besetzte Matrix

$$WV_i^c WV_j^d = \begin{bmatrix} O & O \dots (WV_i^c)_{li} (WV_j^d)_{lj} \dots O \\ O & O \dots (WV_i^c)_{2i} (WV_j^d)_{2j} \dots O \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ O & O \dots (WV_i^c)_{hi} (WV_j^d)_{hj} \dots O \end{bmatrix},$$

so dass

$$sp(WV_i^c WV_j^d) = sp((WV_i^c)_{ji} (WV_j^d)_{ij}).$$

Aufgrund von (16) ist (15) äquivalent zu

$$WV_i^c = P_i V_i^c - PXN^{-1}(X^T)_{li} P_i V_i^c$$

$$WV_j^d = P_j V_j^d - PXN^{-1}(X^T)_{lj} P_j V_j^d$$

und weiter

$$(WV_i^c)_{ji} = P_j X_{jl} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c$$

$$= \begin{bmatrix} O \dots O & \dots O & O \\ \vdots & & \vdots \\ O \dots (WV_i^c)_{ji} & \dots O & O \\ \vdots & & \vdots \\ O \dots O & \dots O & O \end{bmatrix} \quad \text{für } i \neq j$$

$$(WV_j^d)_{ij} = P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{lj} P_j V_j^d \quad \text{für } i \neq j$$

$$(WV_i^c)_{ii} = (WV_i^c)_{ii} = P_i V_i^c - P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c$$

$$sp(WV_i^c WV_j^d) =$$

$$= sp((WV_i^c)_{ji} (WV_j^d)_{ij}) = sp((WV_i^c)_{ji} (WV_j^d)_{ij})$$

$$= sp((P_j X_{jl} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c) (P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{lj} P_j V_j^d))$$

für  $i \neq j$

$$sp(WV_i^c WV_i^d) =$$

$$= sp \left( \begin{array}{l} (P_i V_i^c - P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c) \cdot \\ \cdot (P_i V_i^d - P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^d) \end{array} \right)$$

Unter Beachtung folgender Matrixregeln

$$sp(A + B) = sp(A) + sp(B)$$

$$sp(AB) = sp(BA)$$

lässt sich weiter umformen

$$sp(WV_i^c WV_j^d) = sp \left( \begin{array}{l} ((X^T)_{li} P_i V_i^c P_i X_{il}) N^{-1} \cdot \\ \cdot ((X^T)_{lj} P_j V_j^d P_j X_{jl}) N^{-1} \end{array} \right) \quad \text{für } i \neq j$$

$$sp(WV_i^c WV_i^d) = sp \left( \begin{array}{l} (P_i V_i^c - P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c) \cdot \\ \cdot (P_i V_i^d - P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^d) \end{array} \right)$$

$$= sp(P_i V_i^c P_i V_i^d) -$$

$$sp(P_i V_i^c P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^d) -$$

$$sp(P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c P_i V_i^d) +$$

$$sp \left( \begin{array}{l} P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^c \cdot \\ \cdot P_i X_{il} N^{-1} (X^T)_{li} P_i V_i^d \end{array} \right)$$

$$= sp(P_i V_i^c P_i V_i^d) -$$

$$sp(((X^T)_{li} P_i V_i^d P_i V_i^c P_i X_{il}) N^{-1}) -$$

$$sp(((X^T)_{li} P_i V_i^c P_i V_i^d P_i X_{il}) N^{-1}) -$$

$$sp \left( \begin{array}{l} ((X^T)_{li} P_i V_i^c P_i X_{il}) N^{-1} \cdot \\ \cdot ((X^T)_{li} P_i V_i^d P_i X_{il}) N^{-1} \end{array} \right)$$

Unter Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \tilde{M}_i^{cd} &= (X^T)_{ii} P_i V_i^c P_i V_i^d P_i X_{ii} \\ M_i^c &= (X^T)_{ii} P_i V_i^c P_i X_{ii} \end{aligned} \quad (17)$$

erhält man schließlich

$$\begin{aligned} & sp(WV_i^c WV_j^d) \\ &= sp(M_i^c N^- M_j^d N^-) \quad \text{für } i \neq j \\ & sp(WV_i^c WV_i^d) \\ &= sp(P_i V_i^c P_i V_i^d) - sp(\tilde{M}_i^{dc} N^-) - \\ & \quad - sp(\tilde{M}_i^{cd} N^-) + sp(M_i^c N^- M_i^d N^-). \end{aligned} \quad (18)$$

Erfolgt bei einer bestimmten Gruppe keine weitere Aufspaltung der stochastischen Information, so kann man folgende Vereinfachungen vornehmen:

$$\begin{aligned} M_i &= (X^T)_{ii} P_i V_i P_i X_{ii} = (X^T)_{ii} P_i X_{ii} \\ \tilde{M}_i &= (X^T)_{ii} P_i V_i P_i V_i P_i X_{ii} \\ &= (X^T)_{ii} P_i X_{ii} = M_i \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} sp(WV_i WV_j) &= sp(M_i N^- M_j N^-) \\ sp(WV_i WV_i) &= rg(V_i) - 2sp(M_i N^-) + sp(M_i N^- M_i N^-) \end{aligned} \quad (20)$$

Damit sind in Ergänzung zu OSWALD (1992) die Beziehungen für eine effektive Berechnung im kombinierten Modell (adaptive Varianzen und Gruppenvarianzen) abgeleitet.

### 3.3 Empfehlungen zur programmtechnischen Umsetzung

Die Aufstellung der Matrix  $S$  (8) und die Berechnung der Varianzkomponenten können in einem separaten Programmteil, der mit VKS-Modul (bei Realisierung mit FORTRAN90) bezeichnet werden soll, erfolgen.

Dem VKS-Modul muss der Aufbau der stochastischen Information für die einzelnen Beobachtungstypen nicht bekannt sein, wenn die Aufstellung der Matrizen  $M$  nach (17) bzw. (19) von Unterprogrammen anderer Module erledigt wird.

Es bietet sich an, für jede Beobachtungsart ein eigenes Modul anzulegen. Ein solches Modul übernimmt die Verwaltung der jeweiligen Messdaten, kennt die jeweiligen Beobachtungsgleichungen mit dem zugehörigen stochastischen Modell und kann so neben den eigentlichen Normalgleichungsanteilen auch die jeweiligen Matrizen, die vom VKS-Modul angefordert werden, zur Verfügung stellen.

## 4 Stochastische Modelle

### 4.1 Beobachtungstyp Strecke

Für Streckenmessungen ermöglicht der Ansatz für die Standardabweichung in der Form

$$\sigma_s = \sqrt{\alpha_v^2 + \alpha_{v+1}^2 \cdot s} \quad (21)$$

die Modellierung eines konstanten und eines linear von der Strecke  $s$  abhängigen Fehleranteils. Die benötigten Matrizen für die Schätzung von adaptiven Varianzkomponenten in einer Beobachtungsgruppe  $i$  bestehend aus  $n_i$  gemessenen Strecken werden aufgestellt zu

$$\begin{aligned} V_i^1 &= \alpha_v^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ V_i^2 &= \alpha_{v+1}^2 \begin{bmatrix} s_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{n_i}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Aus der bekannten Genauigkeitsangabe für ein EDM-Gerät von  $3 \text{ mm} + 2 \text{ ppm}$  ergeben sich als Näherungswerte  $\alpha_v = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  und  $\alpha_{v+1} = 2 \cdot 10^{-6}$ .

Alternativ dazu kann man die Verhältnisse der Genauigkeiten zwischen den einzelnen Strecken durch Angabe einer Standardabweichung  $m_n$  für jede einzelne Strecke fest vorgeben, und nur das Genauigkeitsniveau der gesamten Gruppe durch den Ansatz einer (Gruppen-)Varianzkomponente

$$V_i^1 = \alpha_v^2 \begin{bmatrix} m_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{n_i}^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

schätzen. Dies wird z. B. erforderlich, wenn keine ausreichende Anzahl unterschiedlich langer Strecken zur Verfügung steht, oder die Strecken nicht mit einem EDM-Gerät gemessen sind und einem anderen stochastischen Modell folgen. Die Messungen werden dabei jeweils als unkorreliert betrachtet. Weiter ist es möglich, die Messungen in mehrere Gruppen aufzuteilen, für jede Gruppe wiederum Matrizen nach (22) oder (23) anzusetzen, um so mehrere Varianzniveaus zu schätzen. Dies ist in jedem Falle sinnvoll, wenn verschiedene Instrumente zur Streckenmessung eingesetzt wurden, oder Ansätze der Form (21) zu verifizieren sind.

### 4.2 Beobachtungstyp Richtung und Zenitwinkel

Für eine beobachtete Richtung oder Zenitwinkel kann man sich vorstellen, dass sich der Fehlerhaushalt aus einer konstanten Messgenauigkeit des Instrumentes und einer Anzielgenauigkeit je nach Beobachter und ver-

wendeter Signalisierung zusammensetzt. Die Auswirkung ist dabei umso stärker, je kürzer die Beobachtungstrecke ist. So hat ein Anzielfehler von  $0,1\text{ mm}$  bei einer Zielung über  $10\text{ m}$  bereits einen Einfluss von  $0,6\text{ mgon}$  auf die Zenitwinkel und wirkt umgekehrt proportional zur Zielweite. Die gesamte Standardabweichung errechnet sich dann nach

$$\alpha_{r,z} = \sqrt{\alpha_v^2 + \frac{\alpha_{v+1}^2}{s^2} \cdot \rho^2} \quad (24)$$

Die benötigten Matrizen für die Varianzkomponentenschätzung einer Beobachtungsgruppe  $i$  bestehend aus  $n_i$  gemessenen Richtungen oder Zenitwinkeln ergeben sich hier dann zu

$$V_i^1 = \alpha_v^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und}$$

$$V_i^2 = \alpha_{v+1}^2 \begin{bmatrix} s_1^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^{-2} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{n_i}^{-2} \end{bmatrix}$$

Ein Ansatz wie bei den Streckenbeobachtungen nach (23) ist hier ebenso möglich. Die dortigen Ausführungen gelten entsprechend.

### 4.3 Beobachtungstyp Koordinatendifferenz

Bei dem Beobachtungstyp Koordinatendifferenz handelt es sich um die Weiterverarbeitung einer vorausgegangenen Größe. Bei GPS-Beobachtungen mit zwei Empfängern, von denen einer als Referenzstation dient, ergeben sich mit der GPS-Auswertesoftware einzelne Basislinien. Zu jeder Basislinie erhält man eine vollbesetzte  $3 \times 3$  Kovarianzmatrix mit der stochastischen Information aus der Vorausgleichung der originären Phasenmessungen. Da in die Vorausgleichung sehr viele Phasen eingehen, deren Korrelationen von der Auswertesoftware nicht vollständig berücksichtigt werden können, sind die angegebenen Qualitätsmaße viel zu optimistisch.

Bei der Weiterverarbeitung muss jedoch davon ausgegangen werden, dass die Genauigkeitsverhältnisse zwischen verschiedenen Basislinien, deren Beobachtungszeiten sich nicht allzu sehr voneinander unterscheiden, und das Genauigkeitsverhältnis der verschiedenen Basislinienkomponenten untereinander einschließlich ihrer gegenseitigen Korrelationen von der Auswertesoftware ausreichend genau modelliert sind.

Somit können mehrere oder alle beobachteten Basislinien zu einer Gruppe von Beobachtungen zusammenge-

fasst werden, deren tatsächliches äußeres Genauigkeitsniveau sich dann durch den Ansatz von nur einer Varianzkomponente schätzen lässt.

Die Matrix für die Varianzkomponentenschätzung hat dann Blockdiagonalstruktur (25). Wenn mit  $e$  Empfängern gleichzeitig gemessen wurde, und ein Programm für Sessionauswertungen zur Verfügung steht, erhält man für jede Session  $3(e-1)$  Koordinatendifferenzen und eine vollbesetzte Kovarianzmatrix der Größe  $3(e-1) \times 3(e-1)$ .

Falls sich aus der Sessionauswertung nicht  $3(e-1)$  Koordinatendifferenzen, sondern  $3e$  Koordinaten mit einer  $3e \times 3e$  Kovarianzmatrix ergeben, können diese für die Weiterverarbeitung einfach in Koordinatendifferenzen umgerechnet werden. Wurde bei der zugehörigen Auswertung ein Punkt koordinatenmäßig festgehalten, so sind die Koordinatendifferenzen bezüglich dieses Punktes zu bilden, und die Kovarianzinformation für die sich ergebenden Koordinatendifferenzen ist identisch mit der Kovarianzinformation für den nicht festgehaltenen Punkt.

Ansonsten muss noch eine Kovarianzfortpflanzung berechnet werden. Die zugehörige Varianzfortpflanzungsmatrix enthält jedoch außer Nullen in jeder Zeile nur zwei Einsen, davon eine mit negativem Vorzeichen. Die Matrix (25) für die VKS hat dann weiterhin Blockdiagonalstruktur, allerdings vergrößern sich die Blöcke von  $3 \times 3$  auf  $3(e-1) \times 3(e-1)$ .

$$V_i = \alpha_v^2 \begin{bmatrix} m_{\Delta x_1}^2 & m_{\Delta x_1 \Delta y_1} & m_{\Delta x_1 \Delta z_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m_{\Delta x_1 \Delta y_1} & m_{\Delta y_1}^2 & m_{\Delta y_1 \Delta z_1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ m_{\Delta x_1 \Delta z_1} & m_{\Delta y_1 \Delta z_1} & m_{\Delta z_1}^2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_{\Delta x_2}^2 & m_{\Delta x_2 \Delta y_2} & m_{\Delta x_2 \Delta z_2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_{\Delta x_2 \Delta y_2} & m_{\Delta y_2}^2 & m_{\Delta y_2 \Delta z_2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & m_{\Delta x_2 \Delta z_2} & m_{\Delta y_2 \Delta z_2} & m_{\Delta z_2}^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (25)$$

### Fazit

Für eine sinnvolle Anwendung des kombinierten Varianzkomponentenmodells (Gruppenvarianzen und adaptive Varianzen) wurden effektiv auswertbare Beziehungen abgeleitet.

Um den numerischen Aufwand und die erforderliche Speicherkapazität zu begrenzen, sind weitere Überlegungen hinsichtlich des Programmdesigns notwendig. Hier bieten objektorientierte Ansätze wie die Datenkapselung in FORTRAN90-Modulen weitreichende Möglichkeiten.

Schließlich wurden die stochastischen Modelle für verschiedene Beobachtungstypen vorgestellt.

(Literatur und Zusammenfassung siehe Seite 90) (wird fortgesetzt)



## Literatur

- EBNER, H. (1972): A posteriori Varianzschätzungen für die Koordinaten unabhängiger Modelle. Zeitschrift für Vermessungswesen, 97:166–172, Stuttgart.
- FÖRSTNER, W. (1979a): Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 86:446–453, Karlsruhe.
- FÖRSTNER, W. (1979b): Konvergenzbeschleunigung bei der a posteriori Varianzschätzung. Zeitschrift für Vermessungswesen, 104:149–156, Stuttgart.
- GRAFAREND, E. (1978): Schätzung von Varianz und Kovarianz der Beobachtungen in geodätischen Ausgleichungsmodellen. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 85:41–49, Karlsruhe.
- GRAFAREND, E. und D'HONE, A. (1978): Gewichtsschätzung in geodätischen Netzen. Deutsche Geodätische Kommission Reihe A, Heft 88, München.
- KELM, R. (1978): Ist die Varianzschätzung nach Helmert MINQUE? Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 85:49–54, Karlsruhe.
- KOCH, K. R. (1981): Varianz- und Kovarianzkomponentenschätzung für Streckenmessungen auf Eichlinien. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 88:125–132, Karlsruhe.
- KOCH, K. R. (1997): Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn.
- KUBIK, K. (1967): Schätzung der Gewichte der Fehlergleichungen beim Ausgleichungsproblem nach vermittelnden Beobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 92:173–178, Stuttgart.
- RAO, C. R. (1970): Estimation of Heteroscedastic Variances in Linear Models. Journal of the American Statistical Association. 65:161–172, New York.
- OSWALD, W. (1992): Zur kombinierten Ausgleichung heterogener Beobachtungen in hybriden Netzen. Schriftenreihe Studiengang Vermessungswesen, Universität der Bundeswehr München, Heft 44, Neubiberg.
- SIEG, D. (1999): Varianzkomponentenschätzung in ingenieurgeodätischen Netzen. Diplomarbeit (unveröffentlicht), Geodätisches Institut, TU Darmstadt.
- TOWNSEND, E. C. & SEARLE, S. R. (1971): Best Quadratic Unbiased Estimation of Variance Components from Unbalanced Data in the 1-way Classification. Biometrics, 27:643–657, Raleigh, N. C. (u. a.).
- WELSCH, W. (1984): Grundlagen, Gebrauchsformeln und Anwendungsbeispiele der Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 82:296–301, Baden-Dättwil (CH).

Anschrift der Verfasser:

DETLEF SIEG, An der Schleifmühle 29, 64289 Darmstadt  
MILO HIRSCH, Geodätisches Institut, TU Darmstadt, Petersenstraße 13, 64287 Darmstadt

## Zusammenfassung

**In diesem zweiteiligen Beitrag soll gezeigt werden, wie sich mit der Schätzung von Varianzkomponenten die tatsächliche Genauigkeit der verwendeten Messgeräte realistischer beurteilt lässt, und wie sich die Varianzkomponentenschätzung (VKS) in ingenieurgeodätischen Netzen auf die berechneten Koordinaten und deren Qualitätsmaße auswirkt.**

**Ferner werden Aspekte der optimalen Integration von GPS-Messungen in terrestrische Netze diskutiert.**

**Besonderes Augenmerk wird auf die Signifikanz der geschätzten stochastischen Parameter gelegt. Anhand mehrerer Beispiele wird aufgezeigt, welche Voraussetzungen erfüllt sein müssen, damit signifikante Varianzkomponenten erhalten werden.**

## Abstract

**In this two-part contribution, we aim to show how estimating the variance components allows the actual accuracy of the measuring instruments used to be assessed more realistically, and how the variance component estimation in engineer geodetic networks affects the computed coordinates and their variances.**

**In addition, aspects of the optimal integration of GPS-measurements into terrestrial networks are discussed.**

**Particular attention is paid to the significance of the estimated stochastic parameters. By means of several examples, we demonstrate which prerequisites have to be satisfied in order that significant variance components are obtained.**

# ABONNIEREN STATT KOPIEREN

Zeitschriften-Beiträge sind mit Sachverstand und Sorgfalt aus dem großen Berg von Informationen ausgewählt, geschrieben, zusammengestellt . . .

. . . ergeben zielgerechte Informationen: Erfahrungen, die man kaufen kann. Denn uns liegt daran, daß Sie als Leser mit erweitertem Wissen und vermehrten

Einsichten gut gerüstet sind.

Dies ist in Gefahr, wenn Zeitschriftenaufsätze kopiert werden!