



Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells

Lothar Lenzmann und Enno Lenzmann, 27. März 2003

1 Einleitung

Die Auswertung des Allgemeinfalls der Ausgleichsrechnung, des sog. *Gauß-Helmert-Modells*, wird z. B. in der DIN 18 709 dargelegt. Als Bedingungen werden nicht-lineare Gleichungen zugelassen. Eine Beschränkung des Verfahrens hinsichtlich seiner Gültigkeit wird nicht vorgenommen. Bei der Auswertung überbestimmter linearer Transformationen nach diesen Vorschriften haben wir in LENZMANN, LENZMANN (2001a) die Abhängigkeit der Parameter von der Transformationsrichtung festgestellt, sofern mindestens ein Maßstabsfaktor modelliert ist. In seiner Entgegnung zitiert KOCH (2001) die Arbeit zur räumlichen Koordinatentransformation von SCHMID, HEGGLI (1978). Dort wird der Ausgleichsteil genau beschrieben und ist zudem im beigefügten FORTRAN-Programm exakt nachzuvollziehen – z. B. anhand des Flussdiagramms auf S. 21 f. Man findet, dass das Ergebnis der Vorgehensweise von SCHMID und HEGGLI demjenigen gemäß DIN entspricht. Nun weist KOCH (2002) in seinem Beitrag mit einer anderen Auswertemethode des Gauß-Helmert-Modells die Unabhängigkeit der Parameter von der Transformationsrichtung nach. Ziel dieser Arbeit ist es, die Ursache für diesen offensichtlichen Widerspruch zu klären. Dazu werden wir im Nachfolgenden zunächst die Auswertung des Gauß-Helmert-Modells ohne Linearisierung vornehmen und die exakten und im Allgemeinen nicht-linearen Gleichungen herleiten, welche die Minimierer – das sind die Schätzer $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{X}}$ – erfüllen müssen. Anschließend werden die auf unterschiedlichen Linearisierungen basierenden Verfahren dargelegt und daraufhin überprüft, ob ihre Schätzer die exakte Auswertung des Gauß-Helmert-Modells leisten. Zur Ausgleichung bedingter Beobachtungen, die als Sonderfall aus dem Allgemeinfall der Ausgleichung hervorgeht, werden entsprechende Untersuchungen durchgeführt. Zum Schluss wird an einem Zahlenbeispiel zum Gauß-Helmert-Modell gezeigt, in welcher Größenordnung sich die Ergebnisse aufgrund der unterschiedlichen Linearisierungen dort unterscheiden.

2 Auswertung des Gauß-Helmert-Modells

2.1 Exaktes Gleichungssystem zur Lösung der Minimumsaufgabe

Wir bezeichnen den Beobachtungsvektor mit $\mathbf{L}$. Die Verbesserungen $\mathbf{v}$ und die Parameter $\mathbf{X}$ seien über r differenzierbare Bedingungsgleichungen wie folgt verknüpft

$$\psi_i(\mathbf{v}, \mathbf{X}) = h_i(\mathbf{L} + \mathbf{v}, \mathbf{X}) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (1)$$

Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{X}$ die Variablen des Problems sind, werden zur besseren Übersicht alle Konstanten und damit auch $\mathbf{L}$ in die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\psi} = (\psi_i)$ einbezogen. Um $\mathbf{v}$ und $\mathbf{X}$ gemäß der Methode der kleinsten Quadrate unter Einhaltung der Nebenbedingungen (1) zu bestimmen, formulieren wir mittels der Lagrangeschen Multiplikatoren $\mathbf{k} = (k_i)$ mit $i = 1 \dots r$ die zu minimierende Lagrange-Funktion durch

$$\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{X}) := \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{X}). \quad (2)$$

Darin ist $\mathbf{Q}^{-1}$ die symmetrische Gewichtsmatrix zu $\mathbf{L}$. Aus der Minimumsforderung für $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{X})$ ergibt sich notwendig das Verschwinden der ersten Ableitung:

$$\Omega \rightarrow \min \Rightarrow \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Wir nehmen an, dass $\Omega(\mathbf{v}, \mathbf{X})$ ein eindeutiges Minimum besitze sowie keine Maxima oder Sattelpunkte aufweise; damit stellt das Verschwinden der ersten Ableitung eine hinreichende Bedingung für ein Minimum dar. Die Jacobimatrizen von $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{X})$, die sog. Modellmatrizen, welche im Allgemeinen von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{X}$ abhängen, werden wie folgt bezeichnet

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{X}) := \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{v}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{v}, \mathbf{X}) := \frac{\partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}. \quad (4)$$

Aus der ersten Ableitung von (2) und den Nebenbedingungen (1) ergibt sich das exakte Gleichungssystem, welches die Minimierer $\hat{\mathbf{v}}$ und $\hat{\mathbf{X}}$ erfüllen müssen

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^T(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}^T(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\psi}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{X}}) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Dieses System von Gleichungen wird im nichtlinearen Fall selten direkt auflösbar sein, so dass man die Lösung numerisch auf einem iterativem Wege suchen muss, z. B. mit Hilfe des Newton-Algorithmus. Für den späteren Vergleich im Abschnitt 2.3 führen wir den Widerspruchsvektor $\hat{\mathbf{w}}$ im ausgeglichenen Zustand ein durch

$$\hat{\mathbf{w}} := -\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{X}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} \quad (8)$$

und finden vermöge (2), (5) und (7) den Wert des Minimums der Lagrange-Funktion damit bestätigt:

$$\Omega_{\min} = \Omega(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{X}}) = \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{k}^T \hat{\mathbf{w}}. \quad (9)$$

2.2 Lösung über Linearisierung der Nebenbedingungen

Da in der geodätischen Literatur für das Problem bei linearen Funktionen $\psi(v, X)$ das Lösungsschema vorliegt (vgl. z. B. HÖPCKE (1980), KOCH (1987), WOLF (1978)), versucht man durch geeignete Linearisierung und Iteration, den nichtlinearen Fall darauf zurückzuführen.

2.2.1 Linearisierung an der Stelle (v_0, X_0)

Wir linearisieren $\psi(v, X)$ an der Stelle (v_0, X_0) und approximieren die Nebenbedingungen durch die lineare Funktion (vgl. z. B. COURANT (1931), S. 56)

$$l_1(v, X) = B(v - v_0) + A(X - X_0) + \psi(v_0, X_0) = 0. \quad (10)$$

Hierbei sind die Jacobimatrizes **B** und **A** jeweils an der Stelle (v_0, X_0) zu bilden. Aus (10) resultiert der aktuelle Widerspruchsvektor

$$w = -Bv_0 + \psi(v_0, X_0). \quad (11)$$

Somit gewinnt das Gleichungssystem (5), (6) und (7) in dieser linearen Approximation die Gestalt

$$\begin{bmatrix} BQB^T & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \hat{X} - X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (12)$$

Im Falle einer nichtverschwindenden Determinante ist es direkt und eindeutig lösbar. Mit **k** erhalten wir über (5) die gesuchten Verbesserungen zu

$$\hat{v} = QB^T k. \quad (13)$$

Gilt $\|\hat{v} - v_0\| > \epsilon$ oder $\|\hat{X} - X_0\| > \delta$ mit den gewählten Genauigkeitsschranken $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$, so ist die oben durchgeführte Prozedur mit $(v_0, X_0) = (\hat{v}, \hat{X})$ zu wiederholen.

2.2.2 Linearisierung an der Stelle $(0, X_0)$

Wir behandeln nun die Linearisierung der Nebenbedingungen an der Stelle $(0, X_0)$, d. h. das oben angeführte Verfahren wird durch die Festsetzung $v_0 = 0$ modifiziert. Dieses Vorgehen schreibt die DIN 18 709 vor (vgl. auch WOLF (1968), S. 37 und S. 133 f., PELZER (1985), S. 97 ff., NIEMEIER (2002), S. 155 ff. und SCHMID, HEGGLI (1978)). Damit ergibt sich zur Approximation der Nebenbedingungen $\psi(v, X)$ die lineare Funktion

$$l_2(v, X) = Bv + A(X - X_0) + \psi(0, X_0) = 0 \quad (14)$$

mit den beiden Jacobimatrizes **B** und **A**, die nun an der Stelle $(v_0 = 0, X_0)$ zu bilden sind! Als aktuellen Widerspruchsvektor, den wir wiederum mit **w** bezeichnen, erhält man in diesem Schema

$$w = \psi(0, X_0). \quad (15)$$

Mit dieser Approximation gelangen wir zu einem Gleichungssystem derselben Gestalt wie (12) – allerdings mit im Allgemeinen anderen Blockmatrizes und einem anderen Widerspruch –

$$\begin{bmatrix} BQB^T & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ \bar{X} - X_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (16)$$

Nichtsingularität vorausgesetzt, ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar. Findet man $\|\bar{X} - X_0\| > \delta$ mit einer Genauigkeitsschranke $\delta > 0$, so hat man das Verfahren mit der Linearisierungsstelle $(0, X_0) = (0, \bar{X})$ erneut durchzuführen (vgl. SCHMID, HEGGLI (1978), S. 16). Schließlich gewinnt man die Verbesserungen mit

$$\bar{v} = QB^T k. \quad (17)$$

Man beachte, dass dieses Iterationsverfahren bei nichtlinearen Nebenbedingungen $\psi(v, X)$ im Allgemeinen die exakten Minimierer der Lagrange-Funktion nicht liefert, d. h. nur eine Näherungslösung bereitstellt:

$$\bar{X} \approx \hat{X}, \quad \bar{v} \approx \hat{v}. \quad (18)$$

In praktischen Anwendungen sind die numerischen Abweichungen in der Regel klein. Allerdings gehen bei der Auswertung des Gauß-Helmert-Modells mit diesem Linearisierungsschema qualitative Eigenschaften verloren, wie z. B. die Eindeutigkeit von Transformationsparametern (LENZMANN, LENZMANN 2001a).

2.3 Vergleich

Die Tabelle 1 dient als Übersicht für den oben dargelegten Sachverhalt. Die Einträge unter 2.1 sind als Referenz zu betrachten, denn sie ergeben sich aus der Lösung des exakten, nicht linearisierten Problems (vgl. (5), (6), (7) und (8)). Wie man sieht, gelangt man über das geläufige Verfahren 2.2.2 im Konvergenzfall in der Regel nicht zu dem korrekten Gleichungssystem der Minimumsaufgabe. Die Abweichungen treten nicht nur hinsichtlich der Matrizes **A** und **B**, sondern auch hinsichtlich des Widerspruchs **w** auf! Im Allgemeinen werden deshalb, wie bereits oben angemerkt, die exakten Minimierer $\hat{v}$ und $\hat{X}$ nicht gefunden.

Tab. 1: Vergleich der Verfahren

Verfahren	2.1	2.2.1 $v_0 \rightarrow \hat{v}, X_0 \rightarrow \hat{X}$	2.2.2 $v_0 = 0, X_0 \rightarrow \bar{X}$
Modellmatrix A	$A(\hat{v}, \hat{X})$	$A(\hat{v}, \hat{X})$	$A(0, \hat{X})$
Modellmatrix B	$B(\hat{v}, \hat{X})$	$B(\hat{v}, \hat{X})$	$B(0, X)$
Widerspruch w	$-B(\hat{v}, \hat{X}) \cdot \hat{v}$	$-B(\hat{v}, \hat{X}) \cdot \hat{v} + \underbrace{\psi(\hat{v}, \hat{X})}_0$	$\psi(0, \bar{X})$

3 Ausgleichung bedingter Beobachtungen

3.1 Exaktes Gleichungssystem zur Lösung der Minimumsaufgabe

Wenn in (1) die Parameter $\mathbf{X}$ nicht auftreten, resultiert aus dem Gauß-Helmert-Modell die bekannte Ausgleichung bedingter Beobachtungen; d. h. aus den Bedingungsgleichungen (1) wird

$$\psi_i(\mathbf{v}) = h_i(\mathbf{L} + \mathbf{v}) = 0, \quad i = 1 \dots r. \quad (19)$$

Die Ausführungen des Abschnittes 2 können sinngemäß auf dieses Problem übertragen werden. Wie man leicht nachvollziehen kann, ergibt sich mit der Jacobimatrix

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}) := \frac{\partial \psi(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v}} \quad (20)$$

für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen zur Bestimmung des Minimierers $\hat{\mathbf{v}}$ folgendes Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{QB}^T(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{k} \quad \text{und} \quad (21)$$

$$\psi(\hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Als Widerspruch im ausgeglichenen Zustand bestätigt sich wiederum

$$\hat{\mathbf{w}} := -\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}}. \quad (23)$$

3.2 Lösung über Linearisierung der Nebenbedingungen

3.2.1 Linearisierung an der Stelle ($\mathbf{v}_0$)

Wir linearisieren $\psi(\mathbf{v})$ an der Stelle ($\mathbf{v}_0$) und approximieren die Nebenbedingungen durch die lineare Funktion

$$l_1(\mathbf{v}) = \mathbf{B}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \psi(\mathbf{v}_0) = \mathbf{0}. \quad (24)$$

Hierbei ist $\mathbf{B}$ an der Stelle ($\mathbf{v}_0$) zu bilden. Aus (24) resultiert der aktuelle Widerspruchsvektor

$$\mathbf{w} = -\mathbf{B}\mathbf{v}_0 + \psi(\mathbf{v}_0). \quad (25)$$

Damit gewinnt das Gleichungssystem (21) und (22) in dieser linearen Approximation die Gestalt

$$\mathbf{BQB}^T\mathbf{k} + \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (26)$$

Sofern es direkt und eindeutig lösbar ist, erhält man mit $\mathbf{k}$ über (21) die gesuchten Verbesserungen

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{QB}^T\mathbf{k}. \quad (27)$$

Gilt $\|\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}_0\| > \epsilon$ mit der gewählten Genauigkeitsschranke $\epsilon > 0$, so ist die oben durchgeführte Prozedur mit $\mathbf{v}_0 = \hat{\mathbf{v}}$ zu wiederholen.

3.2.2 Linearisierung an der Stelle ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$)

Das oben angeführte Verfahren wird nun durch die Festsetzung $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ modifiziert. In den Lehrbüchern der Ausgleichungsrechnung geht man in dieser Weise vor. Zur Approximation der Nebenbedingungen $\psi(\mathbf{v})$ resultiert daraus die lineare Funktion

$$l_2(\mathbf{v}) = \mathbf{B}\mathbf{v} + \psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (28)$$

mit der Jacobimatrix $\mathbf{B}$, die an der Stelle ($\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$) zu bilden ist! Der Widerspruchsvektor ergibt sich hier zu

$$\mathbf{w} = \psi(\mathbf{0}). \quad (29)$$

Mit dieser Approximation gelangen wir zu einem Gleichungssystem wie (26) – allerdings mit einer im Allgemeinen anderen Matrix $\mathbf{B}$ und einem anderen Widerspruch $\mathbf{w}$ –

$$\mathbf{BQB}^T\mathbf{k} + \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (30)$$

Wenn dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, gewinnt man die Verbesserungen über

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{QB}^T\mathbf{k}. \quad (31)$$

Man beachte, dass dieses Verfahren bei nichtlinearen Nebenbedingungen $\psi(\mathbf{v})$ keine Iteration ermöglicht; es liefert im Allgemeinen nicht den exakten Minimierer der Lagrange-Funktion, sondern wiederum nur eine Näherungslösung:

$$\bar{\mathbf{v}} \approx \hat{\mathbf{v}}. \quad (32)$$

Bei praktischen Problemen sind die numerischen Abweichungen in der Regel klein.

3.3 Vergleich

Die Tabelle 2 gibt eine Übersicht für den oben dargelegten Sachverhalt. Die Einträge unter 3.1 sind als Referenz zu betrachten, denn sie repräsentieren die Lösung des exakten, nicht linearisierten Problems (vgl. (21), (22) und (23)). Wie man sieht, treten beim geläufigen Verfahren 3.2.2 wiederum Abweichungen nicht nur hinsichtlich der Jacobimatrix $\mathbf{B}$, sondern auch hinsichtlich des Widerspruchs $\mathbf{w}$ auf! Im Allgemeinen wird daher der exakte Minimierer $\hat{\mathbf{v}}$ nicht gefunden.

Tab. 2: Vergleich der Verfahren

Verfahren	3.1	3.2.1 $\mathbf{v}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{v}}$	3.2.2 $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$
Modellmatrix $\mathbf{B}$	$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}})$	$\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}})$	$\mathbf{B}(\mathbf{0})$
Widerspruch $\mathbf{w}$	$-\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}}$	$-\mathbf{B}(\hat{\mathbf{v}}) \cdot \hat{\mathbf{v}} + \underbrace{\psi(\hat{\mathbf{v}})}_{\mathbf{0}}$	$\psi(\mathbf{0})$

4 Beispiel

Als Demonstrationsbeispiel zum Gauß-Helmert-Modell wählen wir eine Parabel durch den Nullpunkt. Das entsprechende funktionale Modell und seine algebraische Umkehrung seien mit Modell I bzw. II bezeichnet und lauten

$$\text{Modell I : } y_i = ax_i^2, \quad (33)$$

$$\text{Modell II : } x_i = b\sqrt{y_i}, \quad (34)$$

mit der unmittelbar folgenden Beziehung

$$b = \frac{1}{\sqrt{a}}. \quad (35)$$

In beiden Modellen müssen die Verbesserungen und die Summe $[vv]$ durch die Methode der kleinsten Quadrate identisch bestimmt werden. Ebenso muss die Beziehung (35) zwischen a und b bzgl. der ausgeglichenen Parameter erfüllt sein.

Die Ausgleichung beider Modelle wird einmal über die Linearisierungsvorschrift nach 2.2.1 und darauf über die nach 2.2.2 durchgeführte. Die gleichgenauen, unabhängigen Messwerte seien

$$x_1 = 2.5, \quad y_1 = 4.8,$$

$$x_2 = 4.0, \quad y_2 = 5.0.$$

Die vektorwertige Funktion $\psi_I(v, X)$ der Bedingungsgleichungen des Modells I gewinnt mit den hier gewählten Bezeichnungen folgende nichtlineare Gestalt

$$\psi_I(v, X) = \psi_I(v, a) = \begin{bmatrix} a(x_1 + v_{x_1})^2 - y_1 - v_{y_1} \\ a(x_2 + v_{x_2})^2 - y_2 - v_{y_2} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Die vektorwertige Funktion $\psi_{II}(v, X)$ der Bedingungsgleichungen des Modells II lautet

$$\psi_{II}(v, X) = \psi_{II}(v, b) = \begin{bmatrix} b\sqrt{y_1 - v_{y_1}} - x_1 - v_{x_1} \\ b\sqrt{y_2 - v_{y_2}} - x_2 - v_{x_2} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

4.1 Auswertung nach 2.2.1

Nach der Linearisierungsvorschrift gemäß 2.2.1 ergeben sich folgende Jacobimatrices im Modell I (auf die Indizierung der jeweiligen Näherungsstelle mit 0 wird verzichtet)

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2a(x_1 + v_{x_1}) & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2a(x_2 + v_{x_2}) & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (x_1 + v_{x_1})^2 \\ (x_2 + v_{x_2})^2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

und gemäß (11) der Widerspruch

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2a(x_1 + v_{x_1})v_{x_1} + v_{y_1} + a(x_1 + v_{x_1})^2 - y_1 - v_{y_1} \\ -2a(x_2 + v_{x_2})v_{x_2} + v_{y_2} + a(x_2 + v_{x_2})^2 - y_2 - v_{y_2} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Die Zahlenergebnisse nach einer ausreichenden Anzahl von Iterationen lauten:

$$\hat{a} = 0.4562, \quad [\hat{v}\hat{v}] = 0.9244, \quad \psi_I(\hat{v}, \hat{a}) = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_{x_1} = 0.6649, \quad \hat{v}_{x_2} = -0.6232,$$

$$\hat{v}_{y_1} = -0.2303, \quad \hat{v}_{y_2} = 0.2023.$$

Für das Modell II ergeben sich nach der Linearisierungsvorschrift gemäß 2.2.1 folgende Modellmatrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & b/(2\sqrt{y_1 + v_{y_1}}) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b/(2\sqrt{y_2 + v_{y_2}}) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{y_1 + v_{y_1}} \\ \sqrt{y_2 + v_{y_2}} \end{bmatrix} \quad (42)$$

und gemäß (11) der Widerspruch

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_{x_1} - b/\sqrt{y_1 + v_{y_1}} \cdot v_{y_1} + b\sqrt{y_1 + v_{y_1}} - x_1 - v_{x_1} \\ v_{x_2} - b/\sqrt{y_2 + v_{y_2}} \cdot v_{y_2} + b\sqrt{y_2 + v_{y_2}} - x_2 - v_{x_2} \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Die Zahlenergebnisse lauten:

$$\hat{b} = 1.4805, \quad [\hat{v}\hat{v}] = 0.9244, \quad \psi_{II}(\hat{v}, \hat{b}) = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_{x_1} = 0.6649, \quad \hat{v}_{x_2} = -0.6232,$$

$$\hat{v}_{y_1} = -0.2303, \quad \hat{v}_{y_2} = 0.2023.$$

4.2 Auswertung nach 2.2.2

Im Modell I ergeben sich nach der Linearisierungsvorschrift gemäß 2.2.2 nunmehr an der Stelle $v = \mathbf{0}$ folgende Jacobimatrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2ax_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2ax_2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

und gemäß (15) der Widerspruch

$$= \begin{bmatrix} ax_1^2 - y_1 \\ ax_2^2 - y_2 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Die Ergebnisse nach einer ausreichenden Anzahl von Iterationen lauten:

$$\bar{a} = 0.4302, \quad [\bar{v}\bar{v}] = 1.0684, \quad \psi_I(\bar{v}, \bar{a}) = \begin{bmatrix} 0.2803 \\ 0.1095 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v}_{x_1} = 0.8072, \quad \bar{v}_{x_2} = -0.5045,$$

$$\bar{v}_{y_1} = -0.3753, \quad \bar{v}_{y_2} = 0.1466.$$

Im Modell II erhält man hier folgende Jacobimatrices

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & b/(2\sqrt{y_1}) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b/(2\sqrt{y_2}) \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{y_1} \\ \sqrt{y_2} \end{bmatrix} \quad (48)$$

und gemäß (15) den Widerspruch

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b\sqrt{y_1} - x_1 \\ b\sqrt{y_2} - x_2 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Die Zahlenergebnisse lauten

$$\bar{b} = 1.4722, \quad [\bar{v}\bar{v}] = 0.9252, \quad \psi_{II}(\bar{v}, \bar{b}) = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ -0.0007 \end{bmatrix},$$

$$\bar{v}_{x_1} = 0.6519, \quad \bar{v}_{x_2} = -0.6387,$$

$$\bar{v}_{y_1} = -0.2190, \quad \bar{v}_{y_2} = 0.2103.$$

4.3 Resümee des Beispiels

Aufgrund der Linearisierung nach 2.2.1 erhält man für die Verbesserungen und die Summe $[vv]$ in beiden Modellen erwartungsgemäß dieselben Zahlenwerte. Die Beziehung (35) zwischen den ausgeglichenen Parametern $\hat{a}$ und $\hat{b}$ wird eingehalten, die nichtlinearen Bedingungsgleichungen werden mit den errechneten Verbesserungen erfüllt. Die Linearisierung gemäß 2.2.2 hingegen liefert in beiden Modellen unterschiedliche Verbesserungen und unterschiedliche Werte für die Summe $[vv]$. Wie man leicht nachrechnen kann, wird auch die Beziehung (35) zwischen den Parametern $\bar{a}$ und $\bar{b}$ nicht eingehalten; zudem werden die nichtlinearen Bedingungsgleichungen mit den errechneten Verbesserungen nicht erfüllt.

Bei der *Siebenparametertransformation* findet das Ausgleichungsverfahren über den Linearisierungsansatz nach 2.2.2 zwar nicht das korrekte Minimum, erfüllt aber immerhin noch die nichtlinearen Bedingungsgleichungen. Mit dem obigen Beispiel jedoch zeigt sich, dass dieses Auswerteverfahren auch die Bedingungsgleichungen nicht mehr widerspruchsfrei erfüllen kann.

5 Schlussbemerkung

Das Iterationsverfahren im Abschnitt 2.2.1, basierend auf der Linearisierung an der Stelle (v_0, X_0) , erfüllt im Konvergenzfall $v_0 \rightarrow \hat{v}$ und $X_0 \rightarrow \hat{X}$ mit seinen Modellmatrices **A** und **B** sowie mit den Minimierern $\hat{v}$ und $\hat{X}$ das Gleichungssystem der exakten Lösung (vgl. (5), (6) und (7) sowie Tabelle 1). Im Falle der *Siebenparametertransformation* weisen die so ermittelten Parameter die Eigenschaften der M.d.kl.Q. und damit auch die Unabhängigkeit von der Transformationsrichtung auf (vgl. KOCH (2002)).

Beim Iterationsverfahren aus dem Abschnitt 2.2.2, bei dem eine Linearisierung an der Stelle $(0, X_0)$ vorgenommen wird, ist eine Konvergenz gegen die exakte Lösung im Allgemeinen nicht zu erwarten. Die dort auftretenden Modellmatrices **A** und **B** sowie der Widerspruchsvektor **w** erfüllen nur in Sonderfällen das Gleichungssystem (5), (6) und (7). Dies ist insbesondere der Fall bei Bedingungen $\psi(v, X)$, in denen die Verbesserungen **v** von Haus aus nur linear auftreten, d. h. bei solchen Problemen, für die

$$\mathbf{B}(v, X) = \frac{\partial \psi(v, X)}{\partial v} = \text{const.} \quad (50)$$

gilt. Bei der *Siebenparametertransformation* stellen die auf diesem Wege berechneten Parameter keine strenge Lösung im Sinne der M.d.kl.Q. dar und sind somit abhängig von der Transformationsrichtung.

Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen ist der Sonderfall des Gauß-Helmert-Modells, in dem die Parameter **X** nicht auftreten. Dort gelten die o.a. Erkenntnisse entsprechend; d. h. nichtlineare Bedingungsgleichungen werden nur mittels der Linearisierung gemäß 3.2.1 korrekt behandelt. Früher war es wegen der beschränkten Rechenhilfsmittel gerechtfertigt, sich mit numerischen Resultaten zufrieden zu geben, die man in einem Rechengang erzielen konnte. Das leistete die geläufige Linearisierung. Heute jedoch gibt es keinen praktischen Grund mehr, auf das theoretisch korrekte und numerisch exakte Ergebnis zu verzichten. Es ist daher wünschenswert, in der Fachliteratur künftig auf die Beschränkung der üblichen Lösung hinzuweisen und zur strengen Auswertung die Linearisierung gemäß 2.2.1 bzw. 3.2.1 vorzusehen.

Literatur

- COURANT, R.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Zweiter Band, Funktionen mehrerer Veränderlicher. Zweite Auflage. Julius Springer, Berlin 1931.
- DIN 18 709 Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen, Teil 4, 1984.
- GRAFAREND, E. W., AWANGE, J. L.: Nonlinear analysis of the threedimension datum transformation (conformal group C7), Journal of Geodesy, 2003, in print.
- HÖPCKE, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York 1980.
- KOCH, K.-R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn 1987.
- KOCH, K.-R.: Bemerkung zur Veröffentlichung „Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter“. zfv 126, S. 297, 2001.
- KOCH, K.-R.: Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und Gauß-Markoff-Modell. zfv 127, S. 147–152, 2002.
- LENZMANN, E., LENZMANN, L.: Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter, zfv 126, S. 138–142, 2001a.
- LENZMANN, E., LENZMANN, L.: Erwiderung auf die Anmerkung von Jörg Reinking und die Bemerkung von Karl-Rudolf Koch zu unserem Beitrag „Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter“. zfv 126, S. 298–299, 2001b.
- LENZMANN, L.: Zur Bestimmung der Transformationsparameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. zfv 126, S. 361–365, 2001.
- NIEMEIER, W.: Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York 2002.
- PELZER, H.: Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II. Konrad Wittwer, Stuttgart 1985.
- REINKING, J.: Anmerkung zu „Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter“. zfv 126, S. 295–296, 2001.
- SCHMID, H. H., HEGGLI, S.: Räumliche Koordinatentransformation. Eine pseudolineare Formulierung als Annäherungslösung und eine strenge Ausgleichung mit entsprechendem FORTRAN-Programm. Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH Zürich, Mitteilungen Nr. 23, Juli 1978.
- WOLF, H.: Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Dümmler, Bonn 1968.
- WOLF, H.: Das geodätische Gauß-Helmert-Modell und seine Eigenschaften. zfv 103, S. 41–43, 1978.

Zusammenfassung

In KOCH (2001) und REINKING (2001) einerseits sowie LENZMANN, LENZMANN (2001b) andererseits kommt es zu kontroversen Ansichten über die Eigenschaften der Ergebnisse des Gauß-Helmert-Modells bei der Bestimmung von Transformationsparametern. Hier wird die Ursache für diese gegensätzlichen Auffassungen geklärt und dabei festgestellt, dass die geläufige Auswertung des Allgemeinfalls der Ausgleichsrechnung z. B. nach DIN 18 709, WOLF (1968), PELZER (1985) und NIEMEIER (2002) nur solche Bedingungsgleichungen korrekt behandelt, die in den Verbesserungen linear sind. Ansonsten sind die Resultate lediglich Näherungslösungen. Dieselbe Einschränkung gilt für die Ausgleichung bedingter Beobachtungen, die einen Sonderfall des Gauß-Helmert-Modells darstellt.

Abstract

The articles by KOCH (2001) and REINKING (2001) on the one hand and LENZMANN, LENZMANN (2001b) on the other hand contain contrary statements about properties of transformation parameters obtained by the Gauß-Helmert-Model. In this text, the cause for this disputation is clarified and it turns out that the common implementation of the general case of adjustment (Gauß-Helmert-Model), e.g. according to DIN 18 709, WOLF (1968), PELZER (1985), NIEMEIER (2002), only treats such constraints correctly that linearly depend on the residuals. Otherwise the results merely provide approximate solutions.

Anschriften der Autoren:

Prof. Dr.-Ing. LOTHAR LENZMANN

FH Bochum, FB Vermessungswesen und Geoformatik
Lennershofstr. 140, D-44801 Bochum

E-mail: llenzmann@t-online.de

Dipl. Phys. ENNO LENZMANN

ETH Zürich-Zentrum, Departement Mathematik
Rämistr. 101, CH-8092 Zürich

E-mail: enno.lenzmann@math.ethz.ch



Neue Bücher für Architektur und Planung Ausgabe 2003

Die Arbeitsgemeinschaft Baufachverlage ABV präsentiert im Jubiläumsjahr ihre 40. Ausgabe des Jahreskatalogs „Neue Bücher für Architektur und Planung 2003“ im neuen Outfit. Über 180 Neuerscheinungen aus 25 Baufachverlagen werden kurz und übersichtlich dargestellt. Der Katalog ist in folgende Fachgebiete untergliedert: Architekturgeschichte, Architektur der Gegenwart, Biographien und Werkmonographien, Stadtplanung, Garten- und Land-

schaftsarchitektur, Planen und Entwerfen, Wohnhäuser: Planen, Bauen, Ausbauen, Baukonstruktion, Gebäudetechnik, Bauphysik, Baustoffe, Baubetrieb, Baukosten, Baurecht und Fachzeitschriften.

Der Katalog ist in fast allen Fachbuchhandlungen kostenlos zu erhalten oder direkt von der ABV, PF 11 04, 65219 Taunusstein, Tel.: 0 61 28/2 36 00.

Arbeitsgemeinschaft
Baufachverlage ABV

Sallet, Ellen

Fachwörterbuch Fernerkundung und Geoinformation – Englisch-Deutsch

2002, Heidelberg, Wichmann-Verlag,
ISBN 3-87907-378-3, EUR 56,-

In einer zusammenwachsenden Welt kommt dem Austausch von Informationen eine immer größere Bedeutung zu. Dabei hat sich Englisch als universale Weltsprache in Wissenschaft und Forschung durchgesetzt. Für Studierende und Facheinsteiger stellen aber spezielle Fachbegriffe eine Hürde dar, wenn sie sich mit englischsprachiger Literatur beschäftigen. Mit dem neu erschienenen Fachwörterbuch steht nun ein Hilfsmittel zur Verfügung, das 12.500 Stichworte in 105 Sachgruppen unterteilt. Innerhalb dieser Sachgruppen sind die Begriffe alphabetisch unterteilt und gegebenenfalls mit Hinweisen auf sachverwandte Fachwörter oder Sach-

gebiete versehen. Durch die Sachgruppen eignet sich das Wörterbuch auch für eine Übersetzung von deutschen Begriffen in das Englische. Mit dem Nachschlagewerk steht ein umfangreiches Fachwörterbuch zur Verfügung, das zur Beschäftigung mit der englischsprachigen Literatur zu Fernerkundung und Geoinformation anregt und das Lesen dieser Texte sicherlich erleichtert. Wünschenswert wäre aber, dass in diesem Buch zusätzlich eine CD mit enthalten wäre, die das direkte Nachschlagen am Computer beim Lesen von Internetartikeln oder Pdf-Dokumenten erlaubt.

R. SEUSS, Darmstadt