

Ellipsoidische Gaußsche Koordinaten und die Meridiankonvergenz für das WGS-84 (Subroutinen)

Eberhard Mittermayer, Berlin

In diesem Beitrag werden die ellipsoidischen Gaußschen Koordinaten zerlegt, nämlich in einen Hauptterm sphärischer Approximation (exakte Formeln) und eine kleine ellipsoidische Korrektur. Funktionentheoretisch geht es darum, diese ellipsoidische Korrektur durch eine komplexe Funktion (Polynom) zu approximieren. Dies wird durch eine Interpolationsformel (Polynom) für die Meridianbogenlänge als Funktion eines isothermen Parameters in den Grenzen [Südpol, Nordpol] erreicht.

Rechenformeln und Subroutinen zur Transformation der ellipsoidischen geographischen Koordinaten in ellipsoidische Gaußsche Koordinaten sowie deren inverse Transformation, einschließlich der Berechnung der ellipsoidischen Gaußschen Meridiankonvergenz, werden entwickelt.

1 Grundlagen

Wir beginnen mit dem Ortsvektor des Rotationsellipsoides im ellipsoidischen isothermen (q, l) -System

$$\vec{X}(q, l) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \cos \phi(q) \cos l \\ N \cos \phi(q) \sin l \\ N(1 - e^2) \sin \phi(q) \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit den Differentialquotienten

$$\frac{d\phi}{dq} = \frac{N \cos \phi}{M}, \quad \frac{d\lambda}{dl} = 1 \quad (2)$$

und den Transformationen

$$q = \operatorname{artanh}(\sin \phi) - e \operatorname{artanh}(e \sin \phi), \quad l = \lambda. \quad (3)$$

Mit den Tangentenvektoren

a) an die q -Linie ($l = \text{const.}$) (Meridian)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial q} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dq} = \begin{pmatrix} -N \sin \phi(q) \cos \phi(q) \cos l \\ -N \sin \phi(q) \cos \phi(q) \sin l \\ N \cos^2 \phi(q) \end{pmatrix} \quad (4)$$

b) an die l -Linie ($q = \text{const.}$) (Parallelkreis)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial l} = \begin{pmatrix} -N \cos \phi(q) \sin l \\ N \cos \phi(q) \cos l \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

folgen die Gaußschen Fundamentalgrößen 1. Art

$$E = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial q}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial q} \right\rangle = N^2 \cos^2 \phi(q) \quad (6)$$

$$F = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial q}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial l} \right\rangle = 0 \quad (7)$$

$$G = \left\langle \frac{\partial \vec{X}}{\partial l}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial l} \right\rangle = N^2 \cos^2 \phi(q) \quad (8)$$

und damit das Linienelement im Quadrat

$$ds^2 = N^2 \cos^2 \phi(q) (dq^2 + dl^2); \quad (9)$$

siehe hierzu in MITTERMAYER (1995).

Für $l = \text{const.}$ ($dl = 0$) folgt das Linienelement der Meridianellipse

$$ds = N \cos \phi(q) dq \quad (10)$$

mit dem Parallelhalbmesser p als Funktion der ellipsoidischen Mercator-Breite q

$$p(q) = N \cos \phi(q), \quad (11)$$

eine Glockenkurve (Abb. 1).

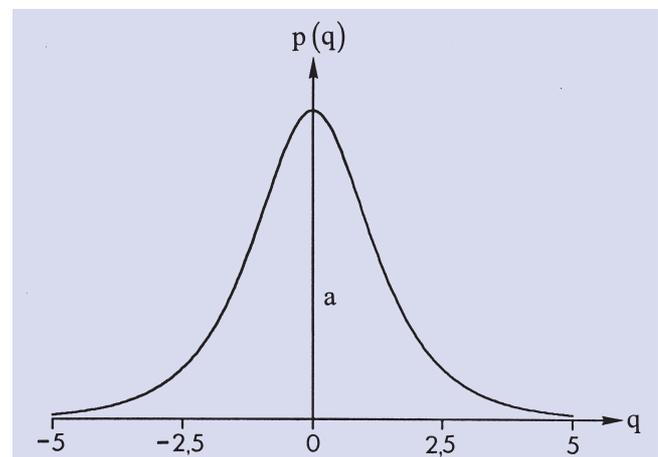


Abb. 1: Der Parallelhalbmesser $p(q)$

Für $q = 0$ gilt

$$p(0) = a, \tag{12}$$

die große Halbachse.

Die ellipsoidische geographische Breite $\phi(q)$ folgt entweder aus der bekannten allgemeinen Iteration

$$\sin \phi_{i+1} = \tanh \left[q + e \operatorname{artanh} (e \sin \phi_i) \right] \tag{13}$$

mit linearer Konvergenz oder durch Newton-Iteration mit quadratischer Konvergenz:

$$\phi_{i+1} = \phi_i - F(\phi_i) (1 - e^2 \sin^2 \phi_i) \cos \phi_i / (1 - e^2) \tag{14}$$

mit

$$F(\phi_i) = \operatorname{artanh}(\sin \phi_i) - e \operatorname{artanh}(e \sin \phi_i) - q \tag{15}$$

und dem Startwert

$$\phi_0 = \arcsin(\tanh q) = \arctan(\sinh q). \tag{16}$$

Ausgehend von dem Linienelement (10) erhalten wir durch Integration die Meridianbogenlänge s als Funktion der ellipsoidischen Mercator-Breite q

$$s(q) = \int_{t=0}^{t=q} N \cos \phi(t) dt \tag{17}$$

siehe Abb. 2 und Abb. 3.

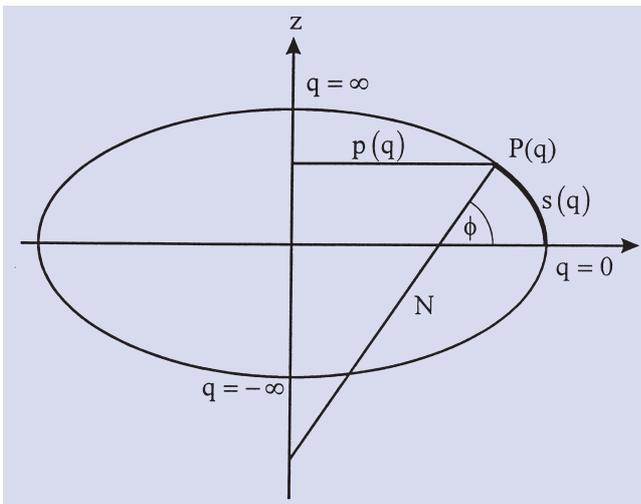


Abb. 2: Die Meridianellipse

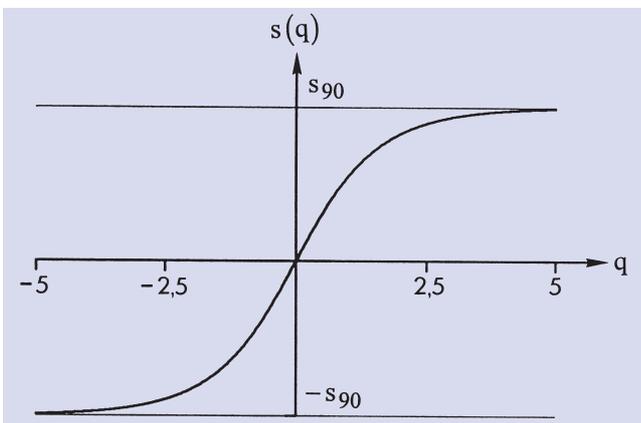


Abb. 3: Die Meridianbogenlänge $s(q)$

Die Berechnung diskreter Funktionswerte

$$s_j = s(q_j) \tag{18}$$

erfolgt aus (17) durch numerische Integration nach Romberg. Zur Integrationsmethode siehe z. B. in STIEFEL (1965).

Für den Meridianbogen s_{90} folgt

$$s_{90} = \int_0^{\infty} p(q) dq. \tag{19}$$

Zunächst gilt es, diese Funktion $s(q)$ (17) der Meridianbogenlänge durch eine Approximationsformel (Interpolation) darzustellen.

2 Die Approximationsformel

Mit der eindeutigen Variablen-Transformation

$$\bar{q} = \bar{q}(q) = \frac{2}{\pi} \arctan(\sinh q) \tag{20}$$

und der zugehörigen inversen Transformation

$$q = q(\bar{q}) = \operatorname{arsinh} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} \bar{q} \right) \right] \tag{21}$$

wird die Funktion $s(q)$ in $q = [-\infty, \infty]$ auf das Einheitsintervall $\bar{q} = [-1, 1]$ transformiert.

Mit dem Differentialquotienten

$$\frac{dq}{d\bar{q}} = \frac{\pi}{2} \frac{d\bar{q}}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \bar{q} \right)} \tag{22}$$

folgt das transformierte Linienelement aus (10)

$$ds = \frac{\pi}{2} \frac{N \cos \phi[q(\bar{q})]}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \bar{q} \right)} d\bar{q}. \tag{23}$$

Damit erhalten wir die Bogenlänge s der Meridianellipse als Funktion von \bar{q}

$$s(\bar{q}) = \frac{\pi}{2} \int_{t=0}^{t=\bar{q}} \frac{N \cos \phi[q(t)]}{\cos \left(\frac{\pi}{2} t \right)} dt \tag{24}$$

mit dem Querkrümmungshalbmesser

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi[q(t)]}} \tag{25}$$

und

$$q(t) = \operatorname{arsinh} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} t \right) \right]. \tag{26}$$

Die Abb. 4 zeigt die transformierte Funktion $s(\bar{q})$ in $|\bar{q}| \leq 1$, eine fast lineare Funktion.

Die Berechnung diskreter Funktionswerte der Meridianbogenlänge

$$s_j = s(\bar{q}_j) \tag{27}$$

folgt aus (24) durch Romberg-Integration.

Die lineare Funktion

$$s = s_{90} \cdot \bar{q} \tag{28}$$

An den nicht-äquidistanten Stützstellen \bar{q}_j (41) hat die zugehörige Fehlerfunktion

$$E_n(\bar{q}) = f(\bar{q}) - f_n(\bar{q}) \quad (45)$$

alternierende Fehlerwerte, nämlich

$$E_n(\bar{q}_j) = (-1)^j B_N \quad (46)$$

die Interpolationseigenschaft.

2.1 Das WGS-84

Das World Geodetic System 1984 (WGS-84) ist definiert durch 4 Parameter, nämlich der großen Halbachse a , der Gravitationskonstante GM , dem Kugelfunktionskoeffizienten $\bar{C}_{2,0}$ und der Erdrotationsgeschwindigkeit ω

$$a = 6\,378\,137 \text{ m}$$

$$GM = 3\,986\,005 \cdot 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$\bar{C}_{2,0} = -484.166\,85 \cdot 10^{-6}$$

$$\omega = 7\,292\,115 \cdot 10^{-11} \text{ rad s}^{-1}$$

Mit der dynamischen Abplattung

$$J_2 = -\sqrt{5} \bar{C}_{2,0} \quad (47)$$

als abgeleitete Größe erhält man im Weiteren die 1. numerische Exzentrizität e^2 durch Iteration aus der Beziehung

$$e^2 = 3J_2 + \frac{4 \omega^2 a^3 e^3}{15 GM 2q_0} \quad (48)$$

mit

$$2q_0 = \left(1 + \frac{3}{e'^2}\right) \arctan e' - \frac{3}{e'} \quad (49)$$

und

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad (50)$$

zur Theorie siehe in HEISKANEN und MORITZ (1967).

Als Ergebnisse erhalten wir e^2 , die kleine Halbachse b

$$b = a\sqrt{1 - e^2}, \quad (51)$$

und durch numerische Integration den Meridianbogen s_{90}

$$e^2 = 0.00669\,43799\,90132\,22044$$

$$b = 6\,356\,752.314\,245\,208\,605 \text{ m}$$

$$s_{90} = 10\,001\,965.729\,312\,745\,653 \text{ m}$$

Die Berechnung der Entwicklungs-Koeffizienten B_k (38) und im Weiteren der Polynomkoeffizienten b_k (44) erfolgte an einer hp-Workstation mit 4facher Wortlänge. Für den Polynomgrad

$$n = N - 2 = 19 \quad (52)$$

ergeben sich folgende Koeffizienten

Tab. 1: Koeffizienten für das WGS-84

k	B_k	b_k
1	0.00030 33747 21466 483	0.00167 85142 57669 278
3	-0.00035 57058 34257 836	-0.00277 61589 56325 202
5	0.00005 59764 71545 366	0.00140 00488 37162 363
7	-0.00000 38012 70877 361	-0.00035 77658 18293 036
9	0.00000 01619 30763 818	0.00006 54437 66370 321
11	-0.00000 00063 00250 254	-0.00001 22704 48245 007
13	0.00000 00002 96353 230	0.00000 26807 36087 258
15	-0.00000 00000 15514 446	-0.00000 05881 41286 135
17	0.00000 00000 00811 915	0.00000 01071 15446 740
19	-0.00000 00000 00043 291	-0.00000 00113 48588 957
21	0.00000 00000 00002 375	

Als Kontrolle gilt

$$\sum_{k=1(2)}^{n=19} B_k = \sum_{k=1(2)}^{n=19} b_k = -B_{21} \quad (53)$$

Die Abb. 6 zeigt die Fehlerfunktion für $n = 19$

$$E_{19}(\bar{q}) = f(\bar{q}) - f_{19}(\bar{q}) \quad (54)$$

mit den Fehlerwerten an den Stützstellen \bar{q}_j (41), der Interpolationseigenschaft

$$|E_{19}(\bar{q}_j)| = |B_{21}| = 2.4 \cdot 10^{-15}, \quad (55)$$

PC-Genauigkeit (doppelte Wortlänge).

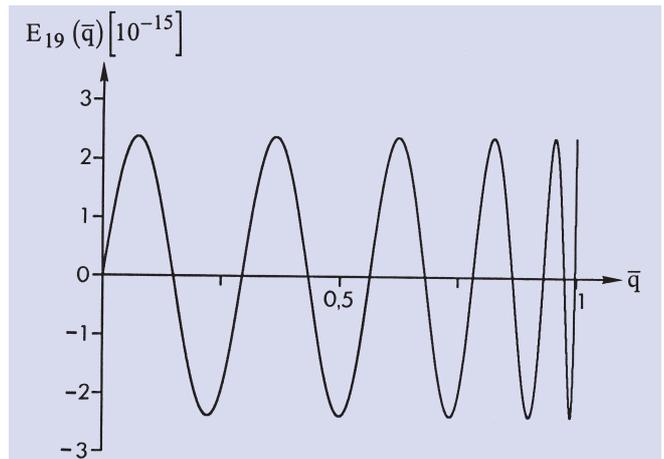


Abb. 6: Die Fehlerfunktion $E_{19}(\bar{q})$

Für die Praxis soll die Approximationsformel der ellipsoidischen Korrektur (44) vereinfacht werden. Mit der Umformung

$$f_n(\bar{q}) = \bar{q} \sum_{k=0}^{\bar{n}} b_k \bar{q}^{2k} \quad (56)$$

und

$$\bar{n} = (n - 1)/2 \quad (57)$$

erhalten wir als Ergebnis die Rechenformel für die Meridianbogenlänge s als Funktion von \bar{q} (reelle Achse)

$$s(\bar{q}) = s_{90} [\bar{q} + f_n(\bar{q})]$$

$$f_n(\bar{q}) = \bar{q} \sum_{k=0}^{\bar{n}} b_k \bar{q}^{2k}$$

für $n = 19$ bzw. $\bar{n} = 9$.

3 Ellipsoidische Gaußsche Koordinaten \bar{x}, \bar{y}

Bezeichnen wir die Meridianbogenlänge $s(\bar{q})$ (58) mit \bar{x}

$$\bar{x} = s(\bar{q}), \tag{59}$$

so erhalten wir die Gaußschen Koordinaten \bar{x}, \bar{y} über den Ansatz einer komplexen Funktion

$$\bar{x} + i\bar{y} = s(\bar{q} + i\bar{l}) \tag{60}$$

und deren Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\bar{x} = \operatorname{Re} [s(\bar{q} + i\bar{l})]$$

$$\bar{y} = \operatorname{Im} [s(\bar{q} + i\bar{l})] \tag{61}$$

Hierbei sind die isothermen Parameter \bar{q}, \bar{l} Funktionen der ellipsoidischen Mercator-Breite q und der ellipsoidischen Mercator-Länge l .

Mit der Transformation (20) als komplexe Funktion

$$\bar{q} + i\bar{l} = \frac{2}{\pi} \arctan [\sinh(q + il)] \tag{62}$$

und deren Zerlegung in Real- und Imaginärteil folgen die Transformationen

$$\bar{q} = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\sinh q}{\cos l}$$

$$\bar{l} = \frac{2}{\pi} \operatorname{artanh} \frac{\sin l}{\cosh q} \tag{63}$$

die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial q} = \frac{\partial \bar{l}}{\partial l} = \frac{2}{\pi} \frac{\cos l \cosh q}{\cosh^2 q - \sin^2 l}$$

$$\frac{\partial \bar{l}}{\partial q} = -\frac{\partial \bar{q}}{\partial l} = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin l \sinh q}{\cosh^2 q - \sin^2 l} \tag{64}$$

siehe hierzu in MITTERMAYER (1999).

Als geometrische Deutung der Transformationen (62) erkennen wir ein weiteres ellipsoidisches isothermes Koordinatensystem. Das zugehörige Linienelement im Quadrat siehe in MITTERMAYER (1995).

Mit der Approximationsformel für die Meridianbogenlänge (58), nunmehr als komplexe Funktion

$$\bar{x} + i\bar{y} = s_{90} [\bar{q} + i\bar{l} + f_n(\bar{q} + i\bar{l})] \tag{65}$$

und der Zerlegung der ellipsoidischen Korrektur

$$f_n(\bar{q} + i\bar{l}) = A + iB \tag{66}$$

erhalten wir als Ergebnis die Rechenformeln für die ellipsoidischen Gaußschen Koordinaten

$$\bar{x} = s_{90} [\bar{q} + A]$$

$$\bar{y} = s_{90} [\bar{l} + B] \tag{67}$$

Betrachten wir nunmehr die Zerlegung A und B . Ausgehend von der Vereinfachung (56) erhalten wir die komplexe Funktion

$$f_n(\bar{q} + i\bar{l}) = (\bar{q} + i\bar{l}) \cdot P_{\bar{n}} [(\bar{q} + i\bar{l})^2] \tag{68}$$

Mit der Zerlegung

$$(\bar{q} + i\bar{l})^2 = (\bar{q}^2 - \bar{l}^2) + i2\bar{q}\bar{l} = \alpha + i\beta \tag{69}$$

also

$$\alpha = \bar{q}^2 - \bar{l}^2$$

$$\beta = 2\bar{q}\bar{l} \tag{70}$$

und im Weiteren der Zerlegung des Polynoms vom Grade \bar{n} in (68)

$$P_{\bar{n}}(\alpha + i\beta) = C + iD \tag{71}$$

folgt der einfache Zusammenhang

$$A + iB = (\bar{q} + i\bar{l})(C + iD) \tag{72}$$

Damit erhalten wir die Zerlegung der komplexen Funktion zur ellipsoidischen Korrektur (66)

$$A = \bar{q}C - \bar{l}D$$

$$B = \bar{l}C + \bar{q}D \tag{73}$$

Die Berechnung der Größen C und D erfolgt mit dem bekannten doppelzeiligen Horner-Schema; siehe z. B. in ZURMÜHL (1965, S. 66 ff.).

In sphärischer Approximation

$$A = 0, \quad B = 0 \tag{74}$$

erhalten wir mit (67) und (29)

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2} R_M \bar{q}(q, l)$$

$$\bar{y} = \frac{\pi}{2} R_M \bar{l}(q, l) \tag{75}$$

mit den Transformationen (63).

4 Die Gaußsche Meridiankonvergenz $c(q, l)$

Die Gaußsche Meridiankonvergenz c ist definiert als Winkel zwischen dem ellipsoidischen Meridian $l = const.$ und der Parameterlinie (Koordinatenlinie) $\bar{y} = const.$ im betrachteten Punkt P des Rotationsellipsoides. Wir beginnen mit der Grundformel der Gaußschen Meridiankonvergenz

$$\tan c = \frac{\partial \bar{x} / \partial l}{\partial \bar{y} / \partial l}, \quad (76)$$

siehe in HECK (1987, S. 156). Ausgehend von den Transformationen

$$\bar{x} = \bar{x}[\bar{q}(q, l), \bar{l}(q, l)] \quad (77)$$

$$\bar{y} = \bar{y}[\bar{q}(q, l), \bar{l}(q, l)] \quad (78)$$

bilden wir die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial l} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial l} \quad (79)$$

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial l} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial l} \quad (80)$$

mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (64).

Aus den Rechenformeln (67) folgen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{q}} &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{l}} = s_{90} \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) = s_{90} \left(1 + \frac{\partial B}{\partial \bar{l}} \right) \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{q}} &= -\frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{l}} = -s_{90} \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} = -s_{90} \frac{\partial A}{\partial \bar{l}} \end{aligned} \quad (81)$$

Damit erhalten wir die partiellen Ableitungen (79), (80)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial l} &= s_{90} \left[\left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} - \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial l} \right] \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial l} &= s_{90} \left[\frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} + \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) \frac{\partial \bar{l}}{\partial l} \right] \end{aligned} \quad (82)$$

Als Quotient der partiellen Ableitungen (82) folgt die Gaußsche Meridiankonvergenz (76)

$$\tan c = \frac{\left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} - \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial l}}{\frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial l} + \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) \frac{\partial \bar{l}}{\partial l}} \quad (83)$$

Einsetzen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (64) in (83) ergibt die Rechenformel für die ellipsoidische Gaußsche Meridiankonvergenz

$$\tan c = \frac{\left(1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} \right) \tan l \tanh q - \frac{\partial B}{\partial \bar{q}}}{1 + \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} + \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \tan l \tanh q} \quad (84)$$

Die partiellen Ableitungen in der Formel (84) folgen als Zerlegung der Ableitung der komplexen Funktion (66)

$$f'_n(\bar{q} + i\bar{l}) = \frac{\partial A}{\partial \bar{q}} + i \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \quad (85)$$

Ausgehend von der Ableitung der ellipsoidischen Korrektur (56) längs der reellen \bar{q} -Achse

$$f'_n(\bar{q}) = \sum_{k=0}^{\bar{n}} \bar{b}_k \bar{q}^{2k} \quad (86)$$

mit

$$\bar{b}_k = (2k + 1) b_k \quad (87)$$

folgt die Ableitung der komplexen Funktion (66) mit (70)

$$f'_n(\bar{q} + i\bar{l}) = \sum_{k=0}^{\bar{n}} \bar{b}_k (\alpha + i\beta)^k = \bar{C} + i\bar{D} \quad (88)$$

Mit dem doppelzeiligen Horner-Schema erhalten wir die Zerlegung der Ableitung der komplexen Funktion (88)

$$\bar{C} = \frac{\partial A}{\partial \bar{q}}, \quad \bar{D} = \frac{\partial B}{\partial \bar{q}} \quad (89)$$

In sphärischer Approximation

$$A = B = 0 \quad (90)$$

folgt aus (84) die Formel

$$\tan c = \tan l \tanh q \quad (91)$$

siehe im VL-Skript „Die Kugel“, MITTERMAYER (1998, S. 98ff.).

5 Die Subroutine

In der SUBROUTINE TR1 in Fortran 77 werden für das WGS-84 ellipsoidische Gaußsche Koordinaten \bar{x}, \bar{y} gemäß der Transformationskette

$$(\phi, \lambda) \rightarrow (q, l) \rightarrow (\bar{q}, \bar{l}) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$$

sowie die ellipsoidische Gaußsche Meridiankonvergenz c berechnet.

Formelle Parameter sind:

Eingabe:

phi ... ellipsoidische geographische Breite ϕ (Bogenmaß)

rl ... ellipsoidische geographische Länge λ (Bogenmaß)

Ausgabe:

xs ... Gaußsche Koordinate \bar{x} , [m]

ys ... Gaußsche Koordinate \bar{y} [m]

cwi ... Meridiankonvergenz c (Bogenmaß)

```

subroutine tr1(phi,rl,xs,ys,cwi)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension bb(0:9),bbb(0:9)
pi2=dasin(1.d0)
* W G S - 8 4
a=6378137.d0
b=6356752.314245209d0
s90=10001965.72931275d0
e=dsqrt((a*a-b*b)/(a*a))
f1=datanh(dsin(phi))
f2=e*datanh(e*dsin(phi))
q=f1-f2
g1=datan2(dsinh(q),dcos(rl))
qs=g1/pi2
h1=dsin(rl)/dcosh(q)
rls=datanh(h1)/pi2
bb(0)=.1678514257669278d-2
bb(1)=-.2776158956325202d-2
bb(2)=.1400048837162363d-2
bb(3)=-.357765818293036d-3
bb(4)=-.65443766370321d-4
bb(5)=-.12270448245007d-4
bb(6)=.2680736087258d-5
bb(7)=-.588141286135d-6
bb(8)=.107115446740d-6
bb(9)=-.11348588957d-7
alpha=qs*qs-rls*rls
beta=2.d0*qs*rls
call chorner(bb,9,alpha,beta,c,d)
a1=qs*c-rls*d
b1=rls*c+qs*d
* G a u ß s c h e K o o r d i n a t e n
xs=s90*(qs+a1)
ys=s90*(rls+b1)
* M e r i d i a n k o n v e r g e n z
do 1 k=0,9
1 bbb(k)=(2.d0*k+1.d0)*bb(k)
call chorner(bbb,9,alpha,beta,c,d)
f=dtan(rl)*dtanh(q)
u1=(1.d0+c)*f-d
u2=1.d0+c+d*f
cwi=datan2(u1,u2)
return
end

```

Die Zerlegung eines Polynoms n -ten Grades mit reellen Koeffizienten in Real- und Imaginärteil (Funktionswert)

$$P_n(z) = b + ic, \quad z = u + iv$$

erfolgt mit dem doppelzeiligen Horner-Schema in der SUBROUTINE CHORNER (a,n,u,v,b,c).

Formelle Parameter sind:

$a \dots$ Koeffizienten $a(0), a(1), \dots, a(n)$

$n \dots$ Grad des Polynoms

$u \dots$ Realteil von z

$v \dots$ Imaginärteil von z

$b \dots$ Realteil des Polynoms

$c \dots$ Imaginärteil des Polynoms.

```

subroutine chorner(a,n,u,v,b,c)
* Doppelzeiliges H o r n e r - S c h e m a
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension a(0:n)
p=2.d0*u
q=- (u*u+v*v)
b1=a(n)
b0=a(n-1)+p*b1
do 1 i=n-2,1,-1
s=a(i)+p*b0+q*b1
b1=b0
1 b0=s
s=a(0)+q*b1
b1=b0
b0=s
b=b1*u+b0
c=b1*v
return
end

```

6 Die inverse Transformation

6.1 Grundlagen

Ausgehend von der komplexen Funktion (60)

$$\bar{x} + i\bar{y} = s(\bar{q} + i\bar{l}) \quad (92)$$

betrachten wir die zugehörige inverse Funktion

$$\bar{q} + i\bar{l} = g(\bar{x} + i\bar{y}) \quad (93)$$

Für $\bar{y} = 0$ (Bezugsmeridian) folgt auf der reellen \bar{x} -Achse die Funktion

$$\bar{q} = \bar{q}(\bar{x}) ; \quad (94)$$

\bar{x} ist die Meridianbogenlänge s . Es gilt der Definitionsbereich

$$\bar{x} = [-s_{90}, s_{90}] \quad , \quad \bar{q} = [-1, +1] \quad .$$

Durch Einführung einer normierten Meridianbogenlänge

$$\hat{x} = \frac{\bar{x}}{s_{90}} \quad (95)$$

wird die Funktion (94) auf das Einheitsintervall

$$\hat{x} = [-1, +1]$$

transformiert

$$\bar{q} = \bar{q}(\hat{x}) \quad , \quad (96)$$

eine fast lineare Funktion; siehe Abb. 7.

Berechnung diskreter Funktionswerte

$$\bar{q}_j = \bar{q}(\hat{x}_j) \quad (97)$$

mit beliebiger Genauigkeit: Ausgehend von dem Linienelement (23)

$$ds = \frac{\pi}{2} a F(\bar{q}) d\bar{q} \quad (98)$$

mit der Funktion

$$F(\bar{q}) = \frac{\cos \phi[q(\bar{q})]}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi[q(\bar{q})]} \cos\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right)} \quad (99)$$

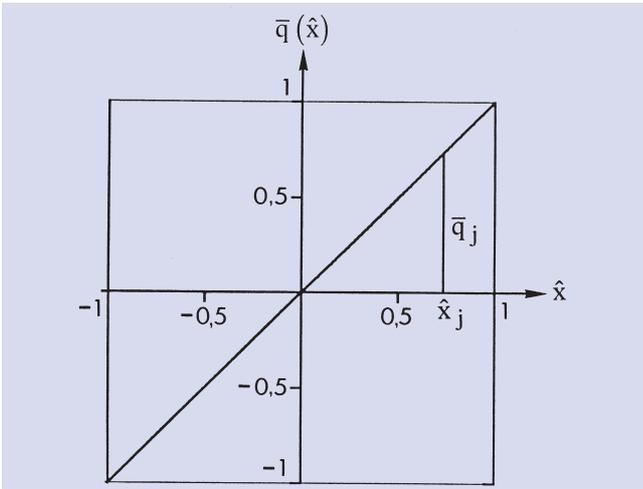


Abb. 7: Die Funktion $\bar{q}(\hat{x})$

und

$$q(\bar{q}) = \operatorname{arsinh} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} \bar{q} \right) \right] \quad (100)$$

erhalten wir als inverses Problem eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d\bar{q}}{ds} = \frac{2}{\pi a} F^{-1}(\bar{q}) \quad (101)$$

Mit

$$s = \bar{x}, \quad \bar{x} = s_{90} \hat{x}, \quad d\bar{x} = s_{90} d\hat{x}$$

folgt die transformierte Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{d\bar{q}}{d\hat{x}} = \frac{2 s_{90}}{\pi a} F^{-1}(\bar{q}) \quad (102)$$

und durch Trennung der Variablen in (102)

$$\int_0^{\bar{q}} F(\bar{q}) d\bar{q} = \frac{2 s_{90}}{\pi a} \hat{x} \quad (103)$$

mit der Anfangsbedingung

$$\bar{q} = 0 \quad \text{für} \quad \hat{x} = 0.$$

Wir erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung 1. Ordnung (102) eine implizite Darstellung der gesuchten Funktion (96)

$$\Phi(\hat{x}, \bar{q}) = \int_{t=0}^{t=\bar{q}} F(t) dt - \frac{2 s_{90}}{\pi a} \hat{x} = 0 \quad (104)$$

Diskrete Funktionswerte (97)

$$\bar{q}_j = \bar{q}(\hat{x}_j)$$

erhalten wir als Nullstellen der Gleichung (104), bestimmbar durch Newton-Iteration mit quadratischer Konvergenz

$$\bar{q}_j^{i+1} := \bar{q}_j^i - \frac{\Phi(\hat{x}_j, \bar{q}_j^i)}{\Phi'(\hat{x}_j, \bar{q}_j^i)} \quad (105)$$

mit

$$\Phi'(\hat{x}_j, \bar{q}_j^i) = F(\bar{q}_j^i) \quad (106)$$

(99) und dem Startwert

$$\bar{q}_j^0 = \hat{x}_j; \quad (107)$$

zur Integrationsmethode der Differentialgleichung 1. Ordnung siehe MITTERMAYER (1966).

6.2 Die Approximationsformel

Mit dem Ansatz für die Funktion $\bar{q}(\hat{x})$ (96)

$$\bar{q}(\hat{x}) = \hat{x} + \Delta\bar{q}(\hat{x}) \quad (108)$$

betrachten wir im Weiteren die ellipsoidische Korrektur

$$\Delta\bar{q}(\hat{x}) = \bar{q}(\hat{x}) - \hat{x}; \quad (109)$$

siehe Abb. 8.

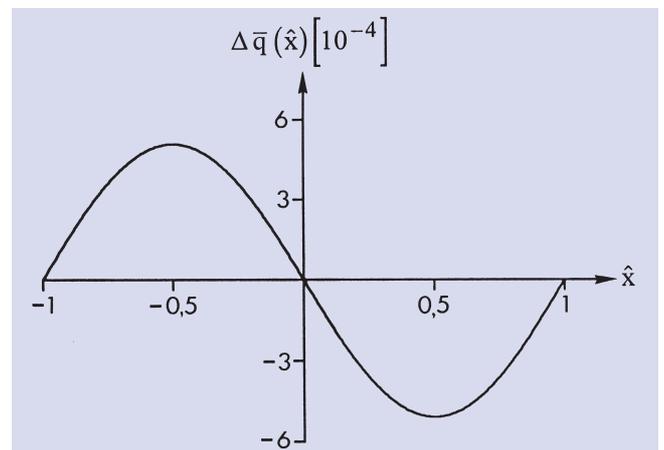


Abb. 8: Die ellipsoidische Korrektur $\Delta\bar{q}(\hat{x})$

Gemäß Abschnitt 2 wird diese Funktion nach T-Polynomen entwickelt

$$\Delta\bar{q}(\hat{x}) \doteq \Delta\bar{q}_N(\hat{x}) = \sum_{k=1(2)}^N C_k T_k(\hat{x}) \quad (110)$$

Mit dem Abbruch der Entwicklung

$$n = N - 2$$

und Ordnen der Terme nach Potenzen von \hat{x} erhalten wir die gesuchte Approximation, ein Polynom n -ten Grades

$$\Delta\bar{q}(\hat{x}) \doteq \Delta\bar{q}_n(\hat{x}) = \sum_{k=1(2)}^{n=N-2} c_k \hat{x}^k \quad (111)$$

Für den Polynomgrad

$$n = N - 2 = 17 \quad (112)$$

ergeben sich die Koeffizienten aus Tab. 2.

Als Kontrolle gilt

$$\sum_{k=1(2)}^{n=17} C_k = \sum_{k=1(2)}^{n=17} c_k = -C_{19} \quad (113)$$

Die Abb. 9 zeigt die Fehlerfunktion für $n = 17$

$$E_{17}(\hat{x}) = \Delta\bar{q}(\hat{x}) - \Delta\bar{q}_{17}(\hat{x}) \quad (114)$$

Tab. 2: Koeffizienten für das WGS-84

k	C_k	c_k
1	-0.00030 35643 89352 790	-0.00167 57015 68649 120
3	0.00035 56800 76600 277	0.00275 75976 18609 959
5	-0.00005 56435 48952 511	-0.00136 31799 41287 272
7	0.00000 36601 32898 871	0.00032 26219 68745 892
9	-0.00000 01355 76549 191	-0.00004 55624 01102 151
11	0.00000 00033 74966 079	0.00000 46311 16125 740
13	-0.00000 00000 71508 636	-0.00000 04583 43398 599
15	0.00000 00000 01982 459	0.00000 00574 18748 322
17	-0.00000 00000 00089 535	-0.00000 00058 67797 747
19	0.00000 00000 00004 977	

An den nicht-äquidistanten Stützstellen

$$\hat{x}_j = \cos j \frac{\pi}{19} \text{ für } j = 0(1)9 \quad (115)$$

erhalten wir betragsmäßig gleiche Fehlerwerte, die Interpolationseigenschaft

$$|E_{17}(\hat{x}_j)| = |C_{19}| = 5.0 \cdot 10^{-15}, \quad (116)$$

PC-Genauigkeit (doppelte Wortlänge).

Mit der Umformung der Polynomapproximation (Interpolationsformel) (111)

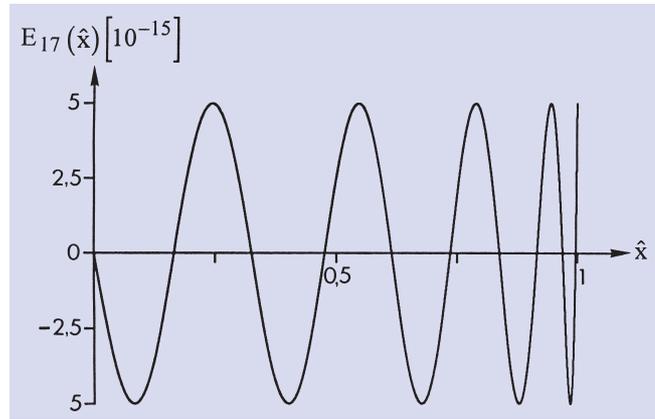


Abb. 9: Die Fehlerfunktion $E_{17}(\hat{x})$

$$\Delta \bar{q}_n(\hat{x}) = \hat{x} \sum_{k=0}^{\bar{n}} c_k \hat{x}^{2k} \quad (117)$$

und

$$\bar{n} = (n - 1) / 2 \quad (118)$$

erhalten wir als Ergebnis die Rechenformel für den Parameter \bar{q} als Funktion von \hat{x} (reelle Achse)

$$\begin{aligned} \bar{q}(\hat{x}) &= \hat{x} + \Delta \bar{q}_n(\hat{x}) \\ \Delta \bar{q}_n(\hat{x}) &= \hat{x} \sum_{k=0}^{\bar{n}} c_k \hat{x}^{2k} \end{aligned} \quad (119)$$

für $n = 17$ bzw. $\bar{n} = 8$.

6.3 Transformationen $(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\phi, \lambda)$

Betrachten wir nunmehr die Transformationskette zwischen den Gaußschen Koordinaten \bar{x}, \bar{y} und dem ellipsoidischen (ϕ, λ) -System

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow (\bar{q}, \bar{l}) \rightarrow (q, l) \rightarrow (\phi, \lambda) .$$

Zunächst erhalten wir mit (95) die komplexe Funktion

$$\hat{x} + i\hat{y} = \frac{1}{s_{90}}(\bar{x} + i\bar{y}) \quad (120)$$

und ihre Zerlegung

$$\begin{cases} \hat{x} = \frac{\bar{x}}{s_{90}} \\ \hat{y} = \frac{\bar{y}}{s_{90}} \end{cases} \quad (121)$$

Im Weiteren folgt mit (108) die komplexe Funktion

$$\bar{q} + i\bar{l} = \hat{x} + i\hat{y} + \Delta\bar{q}_n(\hat{x} + i\hat{y}) \quad (122)$$

und mit der Zerlegung des Polynoms

$$\Delta\bar{q}_n(\hat{x} + i\hat{y}) = A + iB \quad (123)$$

das Ergebnis

$$\begin{cases} \bar{q} = \hat{x} + A \\ \bar{l} = \hat{y} + B \end{cases} \quad (124)$$

Betrachten wir im Weiteren die Zerlegung A und B . Ausgehend von der Vereinfachung (117) erhalten wir

$$\Delta\bar{q}_n(\hat{x} + i\hat{y}) = (\hat{x} + i\hat{y})P_n[(\hat{x} + i\hat{y})^2] \quad (125)$$

Mit der Zerlegung

$$(\hat{x} + i\hat{y})^2 = (\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + 2i\hat{x}\hat{y} = \alpha + i\beta \quad (126)$$

also

$$\alpha = \hat{x}^2 - \hat{y}^2, \quad \beta = 2\hat{x}\hat{y} \quad (127)$$

und im Weiteren der Zerlegung des Polynoms vom Grade \bar{n} in (125)

$$P_{\bar{n}}(\alpha + i\beta) = C + iD \quad (128)$$

folgt der Zusammenhang

$$A + iB = (\hat{x} + i\hat{y})(C + iD) \quad (129)$$

Damit erhalten wir die Zerlegung der komplexen Funktion zur ellipsoidischen Korrektur (123)

$$\begin{cases} A = \hat{x}C - \hat{y}D \\ B = \hat{y}C + \hat{x}D \end{cases} \quad (130)$$

Mit der inversen komplexen Funktion aus (21)

$$q + il = \operatorname{arsinh} \left\{ \tan \left[\frac{\pi}{2}(\bar{q} + i\bar{l}) \right] \right\} \quad (131)$$

und deren Zerlegung in Real- und Imaginärteil folgen die Transformationen

$$q = q(\bar{q}, \bar{l}), \quad l = l(\bar{q}, \bar{l}) \quad (132)$$

$$\begin{cases} q = \operatorname{artanh} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\bar{q})}{\cosh(\frac{\pi}{2}\bar{l})} \\ l = \operatorname{arctan} \frac{\sinh(\frac{\pi}{2}\bar{l})}{\cos(\frac{\pi}{2}\bar{q})} \end{cases} \quad (133)$$

die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial l}{\partial \bar{l}} = \frac{\pi}{2} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\bar{q}) \cosh(\frac{\pi}{2}\bar{l})}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}\bar{l}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}\bar{q})} \\ \frac{\partial l}{\partial \bar{q}} = -\frac{\partial q}{\partial \bar{l}} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}\bar{q}) \sinh(\frac{\pi}{2}\bar{l})}{\cosh^2(\frac{\pi}{2}\bar{l}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}\bar{q})} \end{cases} \quad (134)$$

Abschließend erhalten wir die ellipsoidische geographische Breite ϕ durch Iteration nach (13) bzw. (14)

$$\phi = \phi(q) \quad (135)$$

und die ellipsoidische geographische Länge λ

$$\lambda = l \quad (136)$$

6.4 Die Gaußsche Meridiankonvergenz $c(\bar{x}, \bar{y})$

Wir beginnen mit der bekannten 2. Grundformel der Gaußschen Meridiankonvergenz

$$\tan c = -\frac{\partial q / \partial \bar{y}}{\partial l / \partial \bar{y}} \quad (137)$$

Ausgehend von den Transformationen (133)

$$q = q(\bar{q}, \bar{l}), \quad l = l(\bar{q}, \bar{l}), \quad (138)$$

im Weiteren mit den Transformationen (124)

$$\bar{q} = \bar{q}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \bar{l} = \bar{l}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (139)$$

sowie (121)

$$\hat{x} = \frac{\bar{x}}{s_{90}}, \quad \hat{y} = \frac{\bar{y}}{s_{90}}$$

folgen die direkten Transformationen zwischen dem ellipsoidischen (q, l) -System und den Gaußschen Koordinaten (\bar{x}, \bar{y})

$$q = q(\bar{x}, \bar{y}) = q \left\{ \left[\bar{q} \left(\frac{\bar{x}}{s_{90}}, \frac{\bar{y}}{s_{90}} \right), \bar{l} \left(\frac{\bar{x}}{s_{90}}, \frac{\bar{y}}{s_{90}} \right) \right] \right\} \quad (140)$$

$$l = l(\bar{x}, \bar{y}) = l \left\{ \left[\bar{q} \left(\frac{\bar{x}}{s_{90}}, \frac{\bar{y}}{s_{90}} \right), \bar{l} \left(\frac{\bar{x}}{s_{90}}, \frac{\bar{y}}{s_{90}} \right) \right] \right\} \quad (141)$$

Wir erhalten folgende partielle Ableitungen

$$\frac{\partial q}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial q}{\partial \bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \bar{y}} \quad (142)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial l}{\partial \bar{q}} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{l}} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \bar{y}} \quad (143)$$

Aus den Transformationen (124)

$$\bar{q} = \bar{q}(\hat{x}, \hat{y}), \quad \bar{l} = \bar{l}(\hat{x}, \hat{y}) \quad (144)$$

folgen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \hat{x}} &= \frac{\partial \bar{l}}{\partial \hat{y}} = 1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} = 1 + \frac{\partial B}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \bar{l}}{\partial \hat{x}} &= -\frac{\partial \bar{q}}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial B}{\partial \hat{x}} = -\frac{\partial A}{\partial \hat{y}} \end{aligned} \quad (145)$$

im Weiteren die partiellen Ableitungen (142), (143)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{s_{90}} \left[-\frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \frac{\partial B}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial q}{\partial \bar{l}} \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \right) \right] \\ \frac{\partial l}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{s_{90}} \left[-\frac{\partial l}{\partial \bar{q}} \frac{\partial B}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{l}} \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \right) \right] \end{aligned} \quad (146)$$

Der Quotient der partiellen Ableitungen (146) ergibt mit (137) die Gaußsche Meridiankonvergenz

$$\tan c = -\frac{-\frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \frac{\partial B}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial q}{\partial \bar{l}} \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \right)}{-\frac{\partial l}{\partial \bar{q}} \frac{\partial B}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial l}{\partial \bar{l}} \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \right)} \quad (147)$$

Durch Einsetzen der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (134) in (147) erhalten wir eine zweite Rechenformel für die Gaußsche Meridiankonvergenz als Funktion der Gaußschen Koordinaten (\bar{x}, \bar{y})

$$\tan c = \frac{\frac{\partial B}{\partial \hat{x}} + \tan\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\bar{l}\right) \left(1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} \right)}{1 + \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} - \tan\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\bar{l}\right) \frac{\partial B}{\partial \hat{x}}} \quad (148)$$

Die partiellen Ableitungen in der Formel (148) folgen als Zerlegung der Ableitung der komplexen Funktion (117)

$$\Delta \bar{q}'_n(\hat{x} + i\hat{y}) = \frac{\partial A}{\partial \hat{x}} + i \frac{\partial B}{\partial \hat{x}}, \quad (149)$$

ebenso

$$\Delta \bar{q}'_n(\hat{x} + i\hat{y}) = \sum_{k=0}^{\bar{n}} \bar{c}_k (\alpha + i\beta)^k = \bar{C} + i\bar{D} \quad (150)$$

mit

$$\bar{c}_k = (2k + 1) c_k, \quad \bar{n} = (n - 1)/2 \quad (151)$$

und

$$\alpha = \hat{x}^2 - \hat{y}^2, \quad \beta = 2\hat{x}\hat{y}. \quad (152)$$

Mit dem doppelzeiligen Horner-Schema erhalten wir die gesuchte Zerlegung der Ableitung der komplexen Funktion (149)

$$\bar{C} = \frac{\partial A}{\partial \hat{x}}, \quad \bar{D} = \frac{\partial B}{\partial \hat{x}}. \quad (153)$$

In sphärischer Approximation

$$A = B = 0 \quad (154)$$

folgt

$$\tan c = \tan\left(\frac{\pi}{2}\bar{q}\right) \tanh\left(\frac{\pi}{2}\bar{l}\right) \quad (155)$$

und weiter mit den Transformationen

$$\frac{\pi}{2}\bar{q} = \frac{\bar{x}}{r}, \quad \frac{\pi}{2}\bar{l} = \frac{\bar{y}}{r} \quad (156)$$

und der Kugel $r = R_M$ (32) die Formel der Gaußschen Meridiankonvergenz in sphärischer Approximation

$$\tan c = \tan\left(\frac{\bar{x}}{r}\right) \tanh\left(\frac{\bar{y}}{r}\right), \quad (157)$$

vergleiche im VL-Skript „Die Kugel“, MITTERMAYER (1998, S. 291).

6.5 Die Subroutine

In der SUBROUTINE TR2 in Fortran 77 werden für das WGS-84 ellipsoidische Gaußsche Koordinaten \bar{x}, \bar{y} gemäß der Transformationskette

$$(\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) \rightarrow (\bar{q}, \bar{l}) \rightarrow (q, l) \rightarrow (\phi, \lambda)$$

in ellipsoidische geographische Koordinaten ϕ, λ transformiert sowie die ellipsoidische Gaußsche Meridiankonvergenz c als Funktion von \bar{x}, \bar{y} berechnet.

Formelle Parameter sind:

Eingabe:

- xs ... Gaußsche Koordinate \bar{x} , [m]
- ys ... Gaußsche Koordinate \bar{y} [m]

Ausgabe:

- phi ... ellipsoidische geographische Breite ϕ (Bogenmaß)
- rl ... ellipsoidische geographische Länge λ (Bogenmaß)
- cwi ... Meridiankonvergenz c (Bogenmaß)



```

subroutine tr2(xs,ys,phi,rl,cwi)
implicit real*8(a-h,o-z)
dimension cc(0:8),ccc(0:8)
pi2=dasin(1.d0)
*
W G S - 8 4
a=6378137.d0
b=6356752.314245209d0
s90=10001965.72931275d0
e=dsqrt((a*a-b*b)/(a*a))
cc(0)=-.1675701568649120d-2
cc(1)=.2757597618609959d-2
cc(2)=-.1363179941287272d-2
cc(3)=.322621968745892d-3
cc(4)=-.45562401102151d-4
cc(5)=.4631116125740d-5
cc(6)=-.458343398599d-6
cc(7)=.57418748322d-7
cc(8)=-.5867797747d-8
x1=xs/s90
y1=ys/s90
alpha=x1*x1-y1*y1
beta=2.d0*x1*y1
call chorner(cc,8,alpha,beta,c,d)
a1=x1*c-y1*d
b1=y1*c+x1*d
qs=x1+a1
rls=y1+b1
f1=dsin(pi2*qs)
f2=dcosh(pi2*rls)
q=datanh(f1/f2)
f1=dsinh(pi2*rls)
f2=dcos(pi2*qs)
* Ellipsoidische geographische Länge
rl=datan2(f1,f2)
* I t e r a t i o n :
b0=dtanh(q)
do 1 i=1,6
  b1=dtanh(q+e*dtanh(e*b0))
  1 b0=b1
* Ellipsoidische geographische Breite
phi=dasin(b1)
* M e r i d i a n k o n v e r g e n z
do 2 k=0,8
  2 ccc(k)=(2.d0*k+1)*cc(k)
  call chorner(ccc,8,alpha,beta,c,d)
  f=dtan(pi2*qs)*dtanh(pi2*rls)
  u1=d+(1.d0+c)*f
  u2=1.d0+c-d*f
  cwi=datan2(u1,u2)
  return
end
    
```

6.6 Beispiele

Es folgen für das WGS-84 einige Beispiele zur Transformation der ellipsoidischen geographischen Koordinaten ϕ, λ in Gaußsche Koordinaten \bar{x}, \bar{y} und umgekehrt

$$(\phi, \lambda) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \rightarrow (\phi, \lambda)$$

sowie die zugehörigen ellipsoidischen Gaußschen Meridiankonvergenzen c , gerechnet mit den Subroutinen TR1 und TR2.

Die Beispiele in der Tabelle 3 dienen der Kontrolle bezüglich der 4 Quadranten eines Punktes $P(\phi, \lambda)$.

Die Tabelle 4 enthält zur ellipsoidischen geographischen

Tab. 3: Numerische Beispiele zur Koordinatentransformation

ϕ	52° 0' 0"0000 0000	52° 0' 0"0000 0000
λ	3° 0' 0"0000 0000	-3° 0' 0"0000 0000
\bar{x} [m]	5 767 595.292 97	5 767 595.292 97
\bar{y} [m]	206 011.323 48	-206 011.323 48
ϕ	52° 0' 0"0000 0000	52° 0' 0"0000 0000
λ	3° 0' 0"0000 0000	-3° 0' 0"0000 0000
$c(\phi, \lambda)$	2° 21' 53"4868 9596	-2° 21' 53"4868 9596
$c(\bar{x}, \bar{y})$	2° 21' 53"4868 9597	-2° 21' 53"4868 9597
ϕ	-52° 0' 0"0000 0000	-52° 0' 0"0000 0000
λ	3° 0' 0"0000 0000	-3° 0' 0"0000 0000
\bar{x} [m]	-5 767 595.292 97	-5 767 595.292 97
\bar{y} [m]	206 011.323 48	-206 011.323 48
ϕ	-52° 0' 0"0000 0000	-52° 0' 0"0000 0000
λ	3° 0' 0"0000 0000	-3° 0' 0"0000 0000
$c(\phi, \lambda)$	-2° 21' 53"4868 9596	2° 21' 53"4868 9596
$c(\bar{x}, \bar{y})$	-2° 21' 53"4868 9597	2° 21' 53"4868 9597

Breite $\phi = 52^\circ$ vier Beispiele mit den ellipsoidischen geographischen Längen $\lambda = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$.

Tab. 4: Numerische Beispiele zur Koordinatentransformation

ϕ	52° 0' 0"0000 0000	52° 0' 0"0000 0000
λ	10° 0' 0"0000 0000	30° 0' 0"0000 0000
\bar{x} [m]	5 810 724.541 24	6 200 388.166 70
\bar{y} [m]	685 923.168 33	2 033 470.581 13
ϕ	52° 0' 0"0000 0000	51° 59' 59"9999 999
λ	10° 0' 0"0000 0000	30° 0' 0"0000 000
$c(\phi, \lambda)$	7° 54' 38"4895 46	24° 28' 9"5944 2
$c(\bar{x}, \bar{y})$	7° 54' 38"4895 46	24° 28' 9"5944 3
ϕ	52° 0' 0"0000 0000	52° 0' 0"0000 0000
λ	20° 0' 0"0000 0000	40° 0' 0"0000 0000
\bar{x} [m]	5 954 677.508 36	6 555 512.164 6
\bar{y} [m]	1 366 295.273 39	2 675 429.985 2
ϕ	52° 0' 0"0000 000	52° 0' 0"0000 00
λ	20° 0' 0"0000 000	40° 0' 0"0000 00
$c(\phi, \lambda)$	16° 0' 19"2708 55	33° 29' 9"4541 6
$c(\bar{x}, \bar{y})$	16° 0' 19"2708 55	33° 29' 9"4541 6

Hinweis: Die Koeffizienten der Polynomapproximationen (58) und (119) für die Ellipsoide von Bessel, Hayford und Krassowsky sowie dem GRS-80 liegen ebenfalls vor und werden auf Wunsch zur Verfügung gestellt.

Literatur

HECK, B. (1987): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe.
 HEISKANEN, W. A. und MORITZ H. (1967): Physical Geodesy. W. H. Freeman, San Francisco.

MITTERMAYER, E. (1966): Ein Iterationsverfahren für spezielle Differentialgleichungen 1. Ordnung. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM), S. 252.
 MITTERMAYER, E. (1995): Das Linienelement ellipsoidischer isometrischer Parametersysteme. ZfV 120, S. 299–305.
 MITTERMAYER, E. (1998): Die Kugel (im Oktober 1998). Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 10999 Berlin, Dresdner Str. 26 (2. erweiterte Auflage, 507 S., 162 Abb.).
 MITTERMAYER, E. (1999): Die Gaußschen Koordinaten als Ortsfunktionen und Funktionentheorie/Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN), S. 405–416.

STIEFEL, E. (1965): Einführung in die numerische Mathematik. B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Stuttgart.
 ZURMÜHL, R. (1965): Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. EBERHARD MITTERMAYER, Univ.-Prof.,
 TU Berlin, Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, Sekr. H12, Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin
 E-Mail: mit@mca.bv.tu-berlin.de

Zusammenfassung

Unter konsequenter Anwendung der numerischen Mathematik werden einfache Rechenformeln zur Transformation ellipsoidischer geographischer Koordinaten in ellipsoidische Gaußsche Koordinaten und umgekehrt entwickelt. Hierbei werden die Gaußschen Koordinaten in ein Hauptglied (sphärische Approximation) und eine ellipsoidische Korrektur zerlegt. Es gilt, diese ellipsoidische Korrektur durch eine komplexe Funktion darzustellen. Dies erfolgt durch eine bestmögliche Polynomapproximation (Interpolation). In Folge werden zur Berechnung der ellipsoidischen Gaußschen Meridiankonvergenz Formeln entwickelt. In diesem Beitrag sind die Polynomkoeffizienten für das WGS-84 angegeben; abschließend einige Beispiele, gerechnet mit den Subroutinen TR1 und TR2.

Summary

Using consequently the numerical mathematics simple calculation formulas for transformation of ellipsoidal geographic coordinates into ellipsoidal Gaussian coordinates and vice versa are developed. In order to do it, the Gaussian coordinates are decomposed in a main part (spherical approximation) and an ellipsoidal correction. This ellipsoidal correction should be represented as a complex function. This is realized by a best-possible polynomial approximation (interpolation). It follows a derivation of formulas for the computation of the ellipsoidal Gaussian convergence of meridians. In this contribution the polynomial coefficients for WGS-84 are given, as well as some examples computed using subroutines TR1 and TR2.