



Untersuchung der Äußerlen- und Göldner-Bloss-Kurven

bei der Trassierung unter Anwendung der Kriterien der Geschwindigkeit der Krümmungsänderung (des Krümmungswechsels), des Winkeldiagramms und der Ordinatengrößen

Waldemar Krupiński

Einführung

Übergangskurven spielen eine große Rolle bei der Bahnlinien-, Straßen- und Wassertrassierung. Damit eine ebene Kurve Anwendung bei der Trassierung finden kann, muss sie bestimmte Bedingungen erfüllen.

In dieser Arbeit werden Äußerlen- und Göldner-Bloss-Kurven unter Berücksichtigung ihrer Anwendungsmöglichkeit als Übergangskurven bei der Trassierung untersucht.

Es wird eine Vergleichsanalyse der obigen Kurven mit Hilfe folgender Kriterien durchgeführt:

1. Geschwindigkeit der Krümmungsänderung
2. Winkeldiagramm
3. Ordinatengrößen

Theoretische Kriteriengrundlagen

- 1) Um Geschwindigkeitsgrößen der Krümmungsänderung für die untersuchten Kurven zu erhalten, soll man die Ausgangsfunktion $K(x)$ differenzieren, das heißt $\frac{dK(x)}{dx}$ errechnen.
- 2) Zur Untersuchung der Bahnlinientrassierung kann man das Kriterium des Winkeldiagramms nach J. POŃKOWSKI [7] anwenden. Dieses Kriterium hat auch I. PAŹŁOWICZ [6] zur Untersuchung der von ihm behandelten Kurve unter dem Namen [IK] angewandt und hat den überragenden Wert der im Eisenbahnen üblicherweise angewandten Klothoide nachgewiesen.

Jeder Kurvenlänge l entspricht ein Verschwenkungswinkel (α) dieser Kurve (Abb. 1).

Der Abbildung 1 gemäß, wenn wir auf der x-Achse die einzelnen Abschnitte Δl und auf der y-Achse die Senkrechten der Länge, die den verschiedenen Verschwenkungswinkeln entsprechen, abmessen und die Scheitel dieser Senkrechten verbinden, erhalten wir die so genannte Winkeldiagrammkurve.

Für die auf den Achsen abgemessenen Größen nehmen wir die entsprechenden Skalen C_x und C_y an; damit lassen sich die Koordinaten der einzelnen Punkte der Kurve in die Formeln fassen:

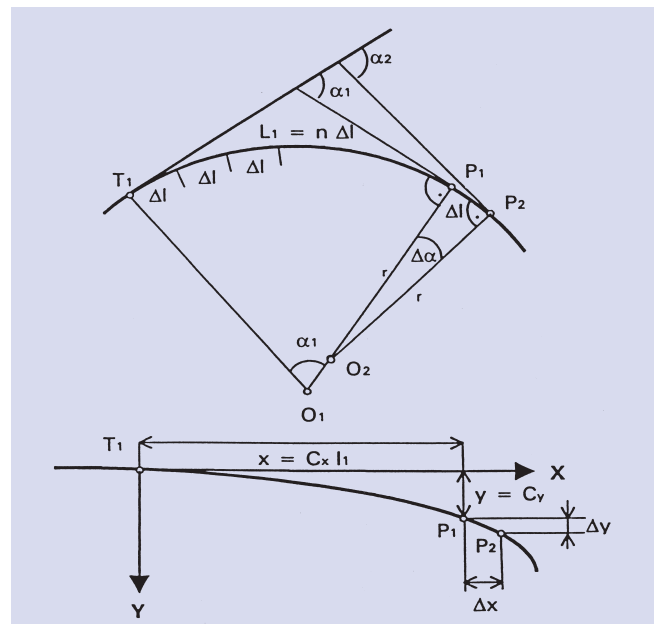


Abb. 1: Methode des Winkeldiagramms

$$\begin{cases} x_i = C_x \cdot l_i \\ y_i = C_y \cdot \alpha_i \end{cases}$$

Für den Abschnitt $\Delta l = P_1P_2$ nimmt die obige Formel folgende Gestalt an:

$$\begin{cases} \Delta x = C_x \cdot \Delta l \\ \Delta y = C_y \cdot \Delta \alpha \end{cases}$$

Für P_1P_2 unendlich klein (infinitesimal) kann man aufschreiben:

$$\begin{cases} dx = C_x \cdot dl \\ dy = C_y \cdot d\alpha \end{cases}$$

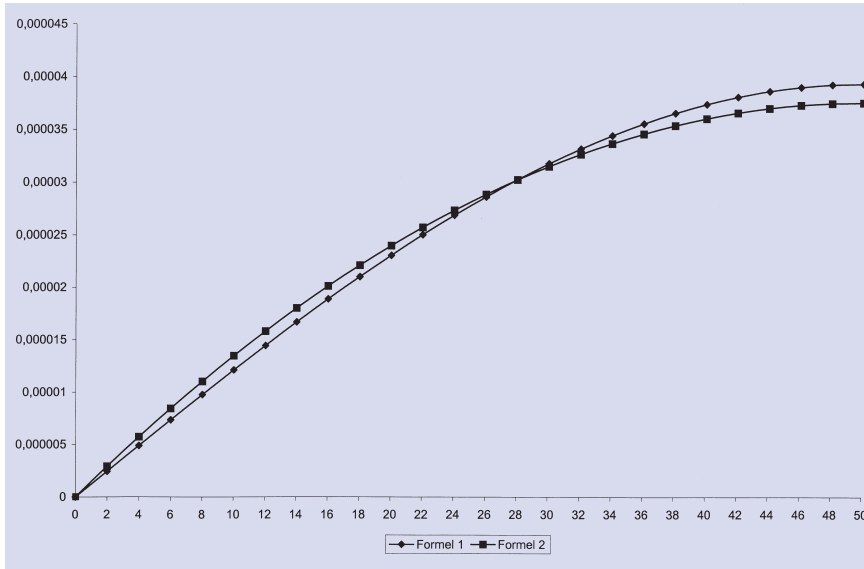
daher

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{C_y}{C_x} \cdot \frac{1}{r}$$

wobei

$$r = \frac{dl}{d\alpha}$$

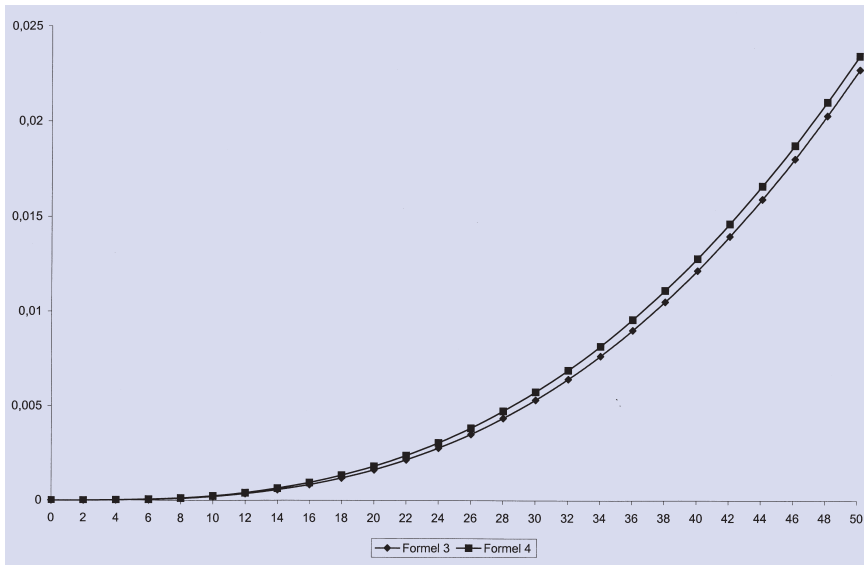
1) Zum Kriterium der Geschwindigkeit der Krümmungsänderung



Tab. 1: Geschwindigkeiten der Krümmungsänderung

[m]	Formel 1	Formel 2
2	2,46578E-06	2,94E-06
4	4,92182E-06	5,76E-06
6	7,35845E-06	8,46E-06
8	9,76603E-06	1,104E-05
10	1,21351E-05	0,0000135
12	1,44562E-05	1,584E-05
14	1,67203E-05	1,806E-05
16	1,89184E-05	2,046E-05
18	2,10419E-05	2,214E-05
20	2,30823E-05	0,000024
22	2,50316E-05	2,574E-05
24	2,68821E-05	2,736E-05
26	2,86265E-05	2,886E-05
28	3,02580E-05	3,024E-05
30	3,17700E-05	0,0000315
32	3,31567E-05	3,264E-05
34	3,44125E-05	3,366E-05
36	3,55325E-05	3,456E-05
38	3,65122E-05	3,534E-05
40	3,73479E-05	0,000036
42	3,80362E-05	3,654E-05
44	3,85743E-05	3,696E-05
46	3,89603E-05	3,726E-05
48	3,91924E-05	3,744E-05
50	3,92699E-05	0,0000375

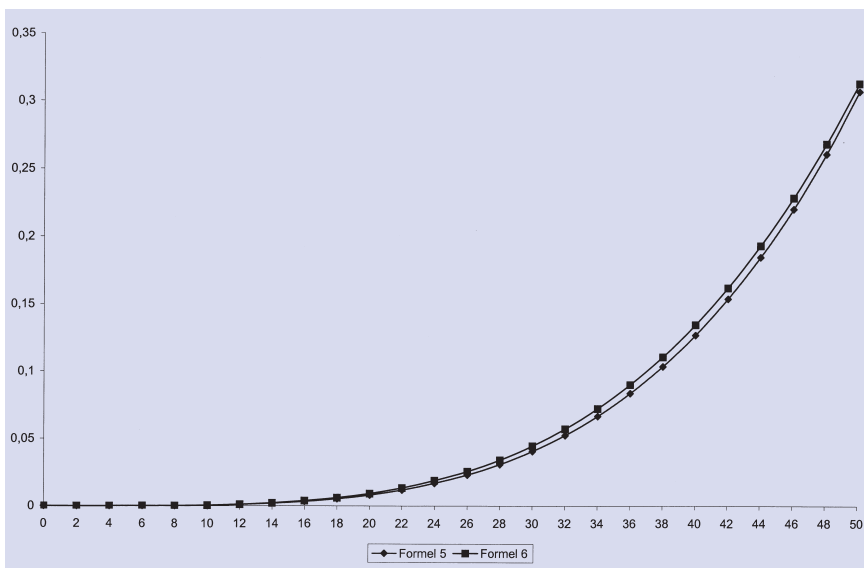
2) Zur Methode des Winkeldiagramms



Tab. 2: Methode des Winkeldiagramms

[m]	Formel 3	Formel 4
2	1,64E-06	1,89E-06
4	1,31E-05	1,57E-05
6	4,43E-05	5,24E-05
8	0,000105	0,000123
10	0,000205	0,000238
12	0,000353	0,000406
14	0,000559	0,000638
16	0,000832	0,000942
18	0,00118	0,001327
20	0,001613	0,0018
22	0,002138	0,002369
24	0,002763	0,003041
26	0,003495	0,003823
28	0,004342	0,00472
30	0,00531	0,005738
32	0,006405	0,006881
34	0,007633	0,008156
36	0,008998	0,009564
38	0,010505	0,011112
40	0,012459	0,0128
42	0,013961	0,014632
44	0,015916	0,016611
46	0,018025	0,018737
48	0,02029	0,021012
50	0,022711	0,023438

3) Zu den Ordinatengrößen



Tab. 3:

[m]	Formel 5	Formel 6
2	8,22E-07	9,92E-07
4	1,32E-05	1,57E-05
6	6,65E-05	7,91E-05
8	0,000210	0,000248
10	0,000512	0,000600
12	0,001061	0,001234
14	0,001962	0,002267
16	0,003342	0,003834
18	0,005342	0,006089
20	0,008124	0,009200
22	0,011866	0,013353
24	0,016764	0,018745
26	0,023030	0,025591
28	0,030894	0,034113
30	0,040600	0,044550
32	0,052413	0,057147
34	0,066613	0,072162
36	0,083499	0,089859
38	0,103389	0,110512
40	0,126621	0,124400
42	0,153557	0,161808
44	0,184584	0,193027
46	0,220113	0,228350
48	0,260590	0,268075
50	0,306495	0,312500

bezeichnend $\frac{C_y}{C_x} = C_r$; erhalten wir:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{C_r}{r}$$

Die obige Formel bestimmt den Wert des Winkelkoeffizienten der Tangente im bestimmten Punkt der Kurve des Winkeldiagramms.

Integrierend (es) erhalten wir:

$$y = \int \frac{C_r}{r} dx$$

Diese Gleichung gibt den Zusammenhang zwischen den Koordinaten x und y eines beliebigen Punktes der Kurve des Winkeldiagramms.

3) Um die Ordinaten der untersuchten Kurven zu erhalten, soll man $y(x)$ integrieren und dann:

$$y(x) = \int y'(x) dx = \iint K(x) dx$$

Für die Krümmung der Äuberlen-Kurve wird durch die Formel eingesetzt:

$$K(x) = \frac{1}{2R} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right]$$

Und für jene der Göldner-Bloss-Kurve:

$$K(X) = \frac{1}{R} \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right]$$

Ableitung der Formeln

1. Das Kriterium der Geschwindigkeit der Krümmungsänderung

1.1 Für die Äuberlen-Kurve

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2R} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\pi}{L} \right] = \frac{\pi}{2RL} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1)$$

1.2 Für die Göldner-Bloss-Kurve

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{R} \left[3 \cdot \frac{2x}{L^2} - 2 \cdot \frac{3x^2}{L^3} \right] = \frac{6x}{RL^2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad (2)$$

2. Die Methode des Winkeldiagramms

2.1 Für die Äuberlen-Kurve

$$y = \int K(x) dx = \frac{1}{2R} \left[x - \frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right] \quad (3)$$

2.2 Für die Göldner-Bloss-Kurve

$$y = \int K(x) = \frac{1}{R} \left[\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^4}{2L^3} \right] \quad (4)$$

3. Ordinatengrößen

3.1 Für die Äuberlen-Kurve

$$y(x) = \iint K(x) dx = \frac{1}{2R} \left[\frac{\pi^2}{24L^2} x^4 - \frac{\pi^4}{720L^4} x^6 + \frac{\pi^6}{4032L^6} x^8 \right] \quad (5)$$

3.2 Für die Göldner-Bloss-Kurve

$$y(x) = \iint K(x) dx = \frac{1}{R} \left[\frac{x^4}{4L^2} - \frac{x^5}{10L^3} \right] \quad (6)$$

Die Ergebnisse der Berechnungen und Diagramme, die die Ergebnisinterpretation für die Punkte mit Koordinaten (die sich alle 2 m auf den Kurven mit $R=400$ m; $L=100$ m ändern) erleichtern, werden unten dargestellt.

Schlussfolgerungen

1. Aus dem Kriterium Geschwindigkeit der Krümmungsänderung ergibt sich, dass in der Anfangsphase der Übergangskurve die Äuberlen-Kurve die besseren Eigenschaften aufweist; diese Eigenschaften in den mittleren Teilen der Kurve gleichen sich, danach weist aber die Göldner-Kurve bessere Eigenschaften auf.
2. Aus dem Kriterium des Winkeldiagramms ergibt sich, dass die Äuberlen-Kurve die besseren Eigenschaften im Längenbereich bis 100 m aufweist.
3. Aufgrund der Ordinatenlänge weist die Äuberlen-Kurve eine unwesentliche Überlegenheit gegenüber der Göldner-Kurve auf.
4. Wenn wir die nur kleinen Unterschiede zwischen den Eigenschaften der untersuchten Kurven in Betracht ziehen, kann man allgemein feststellen, dass die beiden Kurven die gestellten Bedingungen für die Übergangskurven erfüllen, genauso bei der Bahnlinien- wie auch bei der Straßentrassierung.

Literatur

- 1 ÄUBERLEN, R.: Vom Schwung der Fahrt zur Form der Straße, Forschungsarbeiten aus dem Straßenwesen, Neue Folge, Heft 25, 1956.
- 2 GÖLDNER, K.: Zur Frage der Kurvenüberleitung bei Autostraßen, Straße und Autobahn, Heft 12, Bonn, 1961.
- 3 GRABOWSKI, R. J.: Kształtowanie geometryczne krzywych przejściowych w drogach kołowych, kolejowych i trasach wodnych, Rozprawy Naukowe Politechniki Białostockiej, Nr 38, Białystok, 1996.
- 4 KRUPIŃSKI, W.: Aproksymacja naturalnych tras cieków wodnych pewnymi rodzinami funkcji matematycznych. ZN AR w Krakowie, nr 324, Geodezja, z. 16, str. 97-112, Kraków, 1997.
- 5 KRUPIŃSKI, W.: Badanie przydatności pewnych krzywych płaskich dla celów trasowania, ZN AR w Krakowie, nr 314, Geodezja, z. 15, Kraków, 1996.
- 6 PAWŁOWICZ, I.: Optimalizacja linii przejściowych w zastosowaniach geodezyjnych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, Geodezja nr 13, 1974.
- 7 PONIKOWSKI, J.: Pomiary kolejowe. Geodezja Gospodarcza, tom III, Warszawa, 1960.

Anschrift des Verfassers:

WALDEMAR KRUPIŃSKI
Akademia Rolnicza w Krakowie
Katedra Geodezji Wyższej
ul. Balicka 253a
30-198 Kraków
POLEN