Andrzej Kobryń,
Białystok (Polen)

Gradientenfestlegung mittels Parabeln*

Nimmt man die Gradientenanpassung an den vertikalen Geländeverlauf als ein grundlegendes Entwurfskriterium an, so ist es günstiger, wenn die einzelnen gekrümmten Elemente direkt dem Geländeverlauf angepaßt werden, statt sie – wie bisher – zur Ausrundung der Gradientenwechsel zu verwenden.

1 Einführung

Bei der Gradientenfestlegung von Verkehrswegen, insbesondere von Straßen, wird ein Tangentenpolygon als eine Folge aneinanderstoßender, verschieden geneigter Geraden zunächst bestimmt. Die sog. Neigungswechsel werden in der Regel mit Kreisbogen oder quadratischer Parabel ausgerundet. Auf einer Basis solcher Gradientenelemente werden verschiedene Lösungen von Zeit zu Zeit diskutiert (z. B. Stoffel, 1969), die ein Ziel haben, die damit verbundenen Probleme bei Vorbereitung des Gradientenprojektes zu vereinfachen. In den letzten Jahren werden aber mehrere Aufsätze, wie z. B. von Calogero (1969) und Fulczyk (1975), den neuen Möglichkeiten gewidmet, die mit Anwendung der elektronischen Rechentechnik bei Bearbeitung der durch diese Elemente gebildeten Gradiente verbunden sind. Nur selten werden die Übergangskurven bzw. Spline-Funktionen als die eventuellen Gradientenelemente betrachtet, was bisher aus einem praktisch begründeten Bestreben nach Anwendung solcher Lösungen erfolgte, die relativ weniger arbeitsintensiv sind.

Der heutige Entwicklungsstand der CAD-Technologien gestattet in zunehmendem Maße, andere geometrische Elemente zu verwenden, die in der Regel mit höherem Rechenaufwand verbunden sind, aber auch größere Nutzen bringen. Zu bemerken ist, daß solche Gradientenelemente eine bessere Geländeanpassung ermöglichen (z. B. Müller, 1988), was aus ökonomischen Gründen günstig ist. Dabei ist es wichtig, daß eine Vertikaloptimierung ohne Änderung des Längsprofils möglich ist. In diesem Zusammenhang kann man zum Schluß kommen, daß es zweckmäßig ist, verschiedene geometrische Gradientenelemente zu berücksichtigen, um einen optimalen Trassenverlauf im Längsprofil zu bestimmen.

Nimmt man die Gradientenanpassung dem vertikalen Geländeverlauf als ein grundlegendes Entwurfskriterium an, so ist es günstiger, wenn die einzelnen krummlinigen Elemente direkt dem Geländeverlauf angepaßt werden, statt die, die – wie bisher – zur Ausrundung der Gradientenneigungswechsel verwendet werden sollten. Eine entsprechende Vorgehensweise kann man sowohl für quadratische Parabel als auch für einfachste Übergangskurve, d. h. kubische Parabel angeben.

2 Gradientenfestlegung mittels quadratischer Parabel

Wir gehen von einer Gleichung der quadratischen Parabel der Form

$$y = \frac{1}{2R} x^2 \tag{1}$$

aus. Wir betrachten einen Teil dieser Kurve zwischen einem Punkt A, in dem die Krümmung $1/R$ beträgt, und einem Punkt E, in dem die Neigung einer Tangente $\tan u_E$ gleich ist (Abb. 1a). Wegen $y' = \tan u$ (u – Tangentenrichtungswechsel) gilt aufgrund der Gl. (1)

$$\tan u_E = \frac{x_E}{R} \tag{2}$$

wobei x_E eine Abszisse des Punktes E ist. Die Gl. (2) gestattet, einen entsprechenden Wert der Abszisse $x_E = R \tan u_E$ des Punktes E zu bestimmen, der einem angenommenen Krümmungsradius R im Punkt A und einer Gradientenneigung $\tan u_E$ im Punkt E entspricht. Berücksichtigt man, daß $R = x_E / \tan u_E$, so schreibt man die Gleichung der quadratischen Parabel (1) in der Form

$$y = \frac{1}{2} x_E \tan u_E \; t^2 \tag{3}$$

wobei: $t = \dfrac{x}{x_E}$, $x \in \langle 0; x_E \rangle$, also $t \in \langle 0; 1 \rangle$.

Bei der Festlegung der Gradiente mit der mittels der Gl. (3) beschriebenen quadratischen Parabel nehmen wir an, daß die Tangente im Punkt A, dem eine maximale Krümmung entspricht, waagerecht ist. Um einen Festlegungsprozeß zu vereinfachen, identifizieren wir ein Volumen der Dämme und Einschnitte entsprechend mit ihren Höhen und Tiefen. Als Entwurfskriterium verwenden wir dann eine Funktion

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 \tag{4}$$

wobei

$Y_i = H_i - H_A$ wenn $H_E > H_A$

oder

$Y_i = H_A - H_i$ wenn $H_E < H_A$

* Arbeit wurde an der TU Białystok realisiert (W/IIB/7/96)

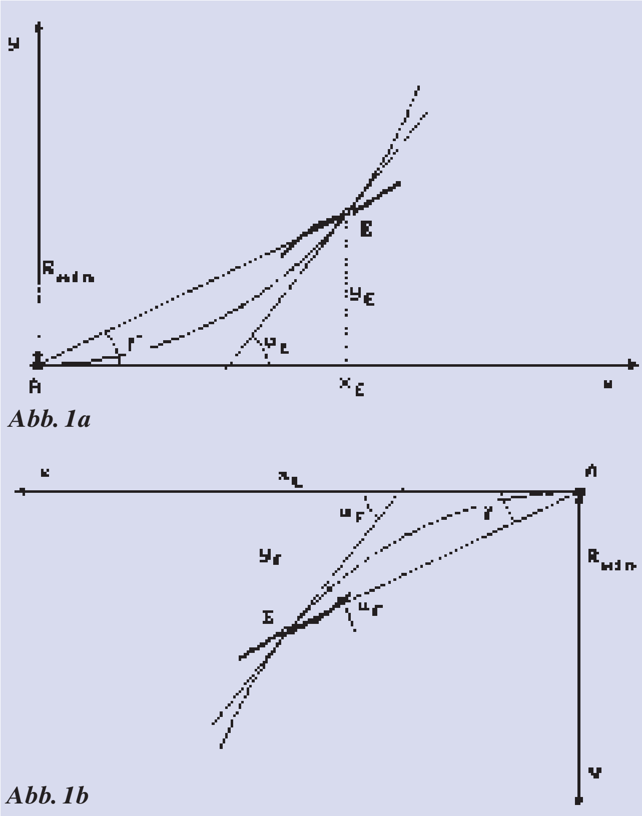

Abb. 1a

Abb. 1b

Abb. 1: Gradientenfestlegung mittels der quadratischen Parabel

und: y_i – Ordinaten der entsprechenden Punkte der quadratischen Parabel, die für dieselben Werte x_i berechnet werden, denen die Höhen Y_i der Längsprofilpunkte entsprechen.

Würde Punkt A als ein Anfangspunkt des festzulegenden Gradientenabschnittes angenommen werden, so wird die Abszisse x_E festgelegt, wenn ein bestimmter Längsprofilpunkt als Punkt E ausgewählt wird. Für den angenommenen minimalen Krümmungsradius R folgt dann aus der Gl. (2) der entsprechende Wert $\tan u_E$. Die in der Gl. (4) auftretenden Ordinaten y_i berechnen wir in diesem Fall als:

$$y_i \;=\; \frac{1}{2}\; x_E \;\; \tan \; u_E \;\; t_i^2 \tag{5}$$

wo: $t_i = \dfrac{x_i}{x_E}$ und $x_i \;=\; L_i - L_A, x_E = L_E - L_A$ (L – Stationierung der einzelnen Punkte des Längsprofils). Als Endpunkt des aktuell festzulegenden Gradientenabschnittes wird ein solcher Punkt angenommen, für den der Wert der Funktion (4) minimal ist.

Würde Punkt E als Anfangspunkt des laufenden durch die quadratische Parabel (3) gebildeten Gradientenabschnittes angenommen (Abb. 1b), so müßten die Neigungen der Tangenten im Scheitelpunkt E gleich sein. Bei Kenntnis des festgelegten Wertes $\tan u_E$ soll man zunächst kontrollieren, ob der aus der Gl. (2) folgende Krümmungsradius $R = x_E / \tan u_E$ den zulässigen Wert nicht überschreitet (x_E folgt aus der angenommenen Lage des Punktes A). Außerdem soll man bei Berechnung der in Gl. (5) auftretenden Werte t_i folgende Gleichungen verwenden: $x_i \;=\; L_A - L_i$ und $x_E = L_A - L_E$. Analog wie früher wird die Funktion (4) bei der Bestimmung des Endpunktes des laufenden Gradientenabschnittes angewendet. Nimmt man den Anfangspunkt A (diesmal Endpunkt des Gradientenabschnittes) in folgenden Punkten des Längsprofils an, so sucht man nach solchem Punkt, dem der minimale Funktionswert (4) entspricht.

Da die Krümmung der quadratischen Parabel für kleine Werte der Tangentenrichtungswinkel annähernd konstant ist, kann die Gradientenanpassung dem Geländeverlauf im Längsprofil bequemer und leichter sein, wenn die Übergangskurven zu diesem Zweck verwendet werden. Im Falle solcher Kurven hat man mit größeren Krümmungsänderungen zu tun. Hier kommt z. B. eine kubische Parabel in Frage.

3 Gradientenfestlegung mittels kubischer Parabel

Wir betrachten eine allgemein bekannte Gleichung der kubischen Parabel

$$y \;=\; \frac{1}{a^2}\; x^3 \tag{6}$$

Von uns von Interesse sei der Anfangspunkt der kubischen Parabel, d. h. vom $x = 0$ bis zum Punkt mit der Abszisse x_E, in dem die Krümmung maximal ist. Bezeichnen wir als u_E den Tangentenrichtungswinkel im Punkt mit der Abszisse x_E, so nimmt die Gleichung (6) die Form

$$y \;=\; \frac{1}{3}\; x_E \;\; \tan \;\; u_E \, t^3 \tag{7}$$

an, wo $t = \dfrac{x}{x_E}$, $x \in \langle 0; x_E \rangle$ (Kobryń, 1999). Nach Kobryń steigt die Krümmung der Kurve (7) im Intervall $\langle 0; x_E \rangle$ vom Null im Punkt A bis zum Wert $1/R$ (R – der angenommene minimale Krümmungsradius) im Punkt E, wenn

$$\tan \;\; u_E \;\; \leq \;\; \sqrt{\frac{1}{5}} \tag{8}$$

Dieser Wert entspricht dem Winkel $u_E = 24{,}^\circ1$, was wegen der kleinen Werte der Neigungen im Falle der Gradientenfestlegung voll ausreichend ist. Nimmt man an, daß der Krümmungswert $K = 1/R$ für $x = x_E$ betragen soll, so erhält man aufgrund der allgemeinen Formel

$$K\,(x) \;\;=\;\; \frac{|y''|}{(1 \;+\; y'^{\,2})^{3/2}} \tag{9}$$

folgende Gleichung:

$$\frac{x_E}{R} \;\;=\;\; \frac{2 \;\; \tan \;\; u_E}{(1 \;+\; \tan^2 \;\; u_E)^{\frac{3}{2}}} \tag{10}$$

Diese Gleichung kann bei der Bestimmung der Werte der einzelnen Parameter der Kurve (7) (wie die Abszisse x_E des Endpunktes, der minimale Krümmungsradius R

und der Tangentenrichtungswinkel u_E im Endpunkt) behilflich sein.

Um einen Prozeß der Gradientenfestlegung zu vereinfachen, nehmen wir an, daß die Tangente im Punkt, in dem die Krümmung gleich Null ist, waagerecht ist. Den Anfangspunkt der Parabel (in dem die Krümmung $K = 0$) bezeichnen wir als A und den Punkt, in dem $K = 1/R$, als E. Während der Gradientengestaltung sind folgende Fälle möglich:

– der Anfang des laufenden Abschnittes liegt im Anfangspunkt A der Parabel

– der Anfang des laufenden Abschnittes liegt im Endpunkt E der Parabel

Im ersten Fall (Abb. 2a), wegen der Annahme des bestimmten Punktes des Längsprofils als Endpunkt E der Parabel, wird der Wert tan u_E festgelegt, der aus (7) für $t = 1$ folgt:

$$\tan\ u_E \quad 3\,\frac{y_E}{x_E} \tag{11}$$

wobei $x_E = |H_E - H_A|$, $y_E = L_E - L_A$ (H – Höhen, L – Stationierung der Längsprofilpunkte). Der aufgrund der Gl. (11) berechnete Wert tan u_E soll die Bedingung (8) erfüllen. Zu kontrollieren ist auch, ob der Krümmungsradius im Punkt E, der wegen der Formel (10)

$$R \;=\; x_E\,\frac{(1+\tan^2 u_E)^{\frac{3}{2}}}{2\tan u_E} \tag{12}$$

beträgt, den zulässigen Wert nicht überschreitet.

Als Kriterium der Anpassung der durch die kubische Parabel (7) gebildeten Gradiente zum vertikalen Geländeverlauf verwenden wir die Funktion (4). Die Werte y_i berechnen wir diesmal als

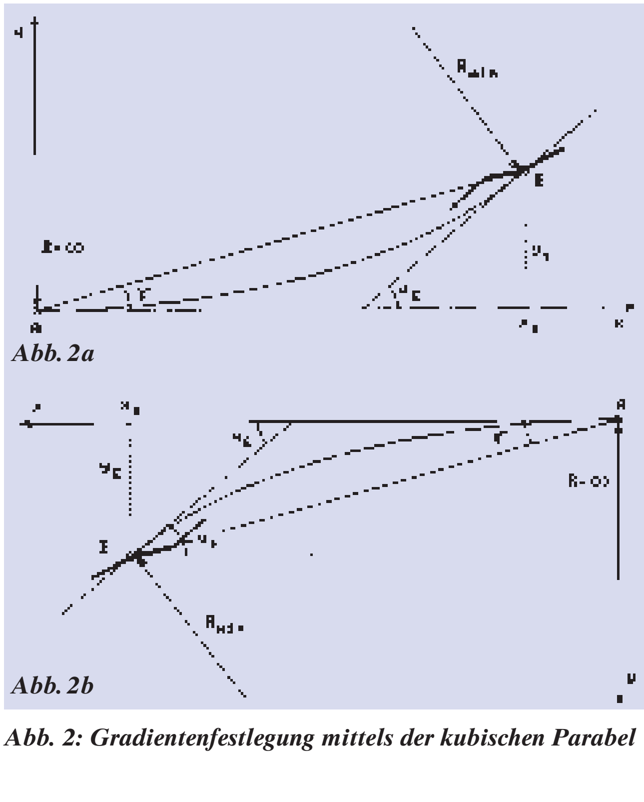

Abb. 2: Gradientenfestlegung mittels der kubischen Parabel

$$y_i \;=\; \frac{1}{3}\;x_E\;\;\tan\;u_E\;\;t_i^3 \tag{13}$$

wobei bei der Berechnung von t_i die gleichen Regeln und Gleichungen wie im Falle der quadratischen Parabel, d. h.: $\frac{x_i}{x_E}$, $x_i \;=\; L_i - L_A$, $x_E = L_E - L_A$ gelten.

Im zweiten Falle (Abb. 2b) müssen die Neigungen der Tangenten im Scheitelpunkt E gleich sein, d. h. tan u_E betragen. Wegen der Annahme einer Lage des Punktes A folgt der Wert der Abszisse $x_E = L_A - L_E$. In diesem Zusammenhang soll kontrolliert werden, ob der nach Gl. (12) berechnete Krümmungsradius den zulässigen Wert nicht überschreitet. Bei endgültiger Auswahl der Lage des Punktes A gilt identische Vorgehensweise wie früher: Der gesuchte Punkt A ist ein solcher Punkt, dem der minimale Wert der Funktion (4) entspricht. Bei der Berechnung der in der Gl. (13) auftretenden Werte t_i benutzen wir diesmal die Gleichungen $x_i \;=\; L_A - L_i$ und $x_E = L_A - L_E$.

4 Schlußbemerkungen

Bei Festlegung der durch die quadratische oder kubische Parabel gebildeten Gradiente ist zu kontrollieren (unabhängig vom Art der Kurve), ob die Werte u_E die angenommenen zulässigen Neigungen der Gradiente nicht überschreiten. Man kann voraussetzen, daß die bei den traditionellen Verfahren der Gradientenfestlegung geltenden Werte auch in diesem Fall angenommen werden können. Zu bemerken ist, daß keine Gradientenabschnitte mit konstanten Neigungswerten im Falle des oben beschriebenen Verfahrens vorhanden sind. Daher kann man vermuten, daß die in den Richtlinien empfohlenen Werte mehr oder weniger geändert werden können.

Dasselbe gilt auch im Falle der Krümmungsradien. Für den bestimmten minimalen Krümmungsradius sind die Sichtverhältnisse auf den Übergangskurven mit sich ändernden Krümmung günstiger als auf den Kreisbögen. In diesem Zusammenhang können die geltenden Radienwerte auch bei Gradientenfestlegung mittels Parabeln angewendet werden; es ist aber auch möglich, ein bischen kleinere Radien zu verwenden (Kobryń, 1999).

Aus ökonomischen Gründen ist es zweckmäßig, wenn die Art des festgelegten Vertikalbogens (Wanne/Kuppe) dem vertikalen Geländeverlauf entspricht. In diesem Fall können folgende Regel gelten:

$\sum (h - H) > 0 \quad \rightarrow \quad$ Wanne

$\sum (h - H) < 0 \quad \rightarrow \quad$ Kuppe

wobei

$$h = H_A + (L_i - L_A)\tan\gamma \tag{14}$$

wo (Abb. 1a und 2a)

$$\tan\gamma \;=\; \frac{H_E \;-\; H_A}{L_E \;-\; L_A}$$

oder

$$h = H_E + (L_i - L_E)\tan\gamma \tag{15}$$

wo (Abb. 1b und 2b)

$$\tan\gamma = \frac{H_A - H_E}{L_A - L_E}$$

Als Schlußbemerkung kann festgestellt werden, daß die oben dargestellten Projektierungsmethoden bessere Ergebnisse, d. h. bessere Anpassung dem Geländeverlauf geben können, wenn eine Minimalisierung der Erdmassenmengen als grundlegende Entwurfsbedingung gelten sollte. Diese Methoden können also günstiger als die traditionelle Ausrundung der Neigungswechsel der durch die verschieden geneigten Geraden gebildeten Gradiente sein.

Literatur

CALOGERO, V.: A new method in road design – polynomial alignment. Computer Aided Design. London, 1969.

FULCZYK, A. G.: Die kubische Funktion als Trassierungselement im Aufriß. Die Straße 15: 52–54, 1975.

KOBRYŃ, A.: Geometrische Gestaltung der Gradiente von Verkehrswegen. Zeszyty Naukowe Politechniki Białostockiej, Rozprawy nr 60, Białystok, 1999 (poln.).

STOFFEL, F.: Geometrische und kinematische Probleme der Gestaltung von Straßen im Grund- und Aufriss. Institut für Städtebau, Siedlungswesen und Kulturtechnik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn, 1969 (Dissertation).

Anschrift des Verfassers:
Dr.-Ing. ANDRZEJ KOBRYŃ
Katedra Dróg i Geodezji, Politechnika Białostocka
ul.Wiejska 45/E, PL -15351 Białystok, Polen
E-Mail: akobryn@cksr.ac.bialystok.pl.

Zusammenfassung

Es werden hier die quadratische und kubische Parabel als Gradientenelemente betrachtet. Die mathematischen Gleichungen dieser Kurven werden entsprechend modifiziert. Weiterhin werden Algorithmen der direkten Anpassung der durch diese Kurven gebildeten Gradiente dem vertikalen Geländeverlauf dargestellt.

Summary

In the paper are considered as parabolic curves (2 and 3 degree) elements of grade line. Mathematical equations of these curves have been modified. The match algorithm of the grade line to relief by these curves also were presented.

Neuer Farbscanner fürs Großformat

VIDAR gehört zu den weltweit führenden Anbietern von großformatigen Scanner-Lösungen und genießt einen hervorragenden Ruf in bezug auf Schnelligkeit, Genauigkeit und Wiedergabequalität. Die Scanner von VIDAR haben sich vor allem für die detailgetreue Wiedergabe von technischen Zeichnungen und Landkarten bewährt und bieten für die unterschiedlichen Anforderungen die jeweils passenden Produkte und Leistungsmerkmale: zum Beispiel die besonders hohe Auflösung von 600 dpi mit dem Designer und die hohe geometrische Genauigkeit von 0,05 % beim Surveyor. Die Neuvorstellung des Latitude überzeugt nun mit der Möglichkeit, Überformate bis 54 Zoll, entsprechend 137 cm, mit einer Scanbreite bis zu 132 cm zu verarbeiten.

Der Latitude verfügt über vier CCD-Kameras, die das Bild der Vorlage mit ihrem direkten Strahlengang erfassen. Diese robuste Bauweise kommt – wie bei allen Scannern der VIDAR-Familie – ohne Umlenkspiegel aus und bietet damit Sicherheit gegen Dejustage und Staub. Neben dem großen Format entspricht auch die mögliche Vorlagendicke bis 1,2 cm dem Wunsch vieler Anwender. Damit können selbst solche Originale eingescannt werden, die auf Karton oder Holzplatten geklebt wurden. Zudem bietet auch für derart schwierige Vorlagen der bei VIDAR exklusive Antrieb aller vier Transport-Achsen die besten Voraussetzungen.

Die Partnerschaft des US-amerikanischen VIDAR mit dem deutschen Software-Hersteller SCP Software GmbH bietet optimale Voraussetzungen für Qualität, Wirtschaftlichkeit und problemlosen Betrieb. Sämtliche VIDAR-Scanner sind für die Einbindung in die digitalen Kopier- und Reprosysteme von SCP vorbereitet. Zusammen mit den in Aachen entwickelten Software-Produkten werden alle Anwendergruppen erreicht, bei denen Farbe und Schwarzweiß, große Formate und kleine Auflagen im Mittelpunkt stehen – ideal also für Reprographie- und Vervielfältigungszentralen in der Industrie, in CAD- und Landkarten-Anwendungen sowie in der Versorgungswirtschaft. Dabei hilft die Software von SCP bei der Erhaltung bzw. Optimierung der graphischen Qualität. Grauer oder verschmutzter Hintergrund wird gesäubert, Linienelemente werden wieder reproduzierbar gemacht, Kanten werden geschärft und Moiré in farbigen Flächen wird beseitigt. Die Produkte von SCP und VIDAR ergänzen sich optimal, sowohl beim einfachen Scannen in Datei („Scan-to-file“) zur Bestandsdatenerfassung als auch in Verbindung mit allen gängigen Großformatdruckern zu kompletten großformatigen Farbkopiersystemen.

Bei SCP befinden sich Entwicklung, Marketing, Verkauf und der Technische Kundendienst in einer Hand und unter einem Dach. Die kurzen Wege erlauben eine rasche und kundenorientierte Kommunikation und vermitteln kompetente Unterstützung bei individuellen Aufgabenstellungen. Die herstellereigene Hotline vermeidet zudem Zeit- und Informationsverluste und geht keinem Problemfall aus dem Weg. Für praktische Vorführungen der Leistungsfähigkeit stehen immer die neuesten Scanner und Drucker zur Verfügung.

Weitere Informationen dazu über
SCP Software GmbH,
Auf der Hüls 120,
52068 Aachen,
Tel.: (02 41) 9 68 30-0,
Fax: -10,
E-Mail: vertrieb@scp.de.