Zur nummerischen Bestimmung von Schnittpunkten von ebenen Kegelschnitten im Raum mit räumlichen Kegelschnitten

Helmuth Späth, Oldenburg

1 Allgemeine Problemstellung

Eine Kurve im Raum in Hauptachsenlage ist in Parameterdarstellung gegeben durch

$$x = x(\alpha; t),\ \ y = y(\beta; t),\ \ z = z(\gamma; t), \tag{1}$$

wobei α, β und γ Vektoren i. a. von unterschiedlicher Länge (im nächsten Abschnitt stets von der Länge Eins) sind, die die Gestalt der einzelnen Komponenten prägen, und t mit $t_1 \leq t \leq t_2$ der Kurvenparameter ist. Die Kurve (1) kann jetzt noch der Reihe nach in der (y,z)-, (x,z)- und (x,y)-Ebene um die Drehwinkel φ_3, φ_2 und φ_1 gedreht und dann noch um einen Vektor $(a, b, c)^T$ verschoben werden. Dabei gehören zu den gegebenen Drehwinkeln φ_1, φ_2 und φ_3 die elementaren Rotationsmatrizen

$$D_1(\varphi_1) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_2(\varphi_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$D_3(\varphi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_3 & -\sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_3 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Kurve ist dann also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + D_1(\varphi_1) D_2(\varphi_2) D_3(\varphi_3) \begin{pmatrix} x(\alpha; t) \\ y(\beta; t) \\ z(\gamma; t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Für eine Ellipse in Hauptachsenlage in der (x, y)-Ebene mit dem Ursprung als Mittelpunkt und den Halbachsen p und q muss in (3)

$$x(\alpha; t) = p\cos t,\ \ y(\beta; t) = q \sin t,\ \ z = 0,$$

$$p \neq q,\ \ 0 \leq t < 2\pi \tag{4}$$

eingesetzt werden. Für $p = q$ würde es sich ursprünglich um einen Kreis in der (x, y)-Ebene mit Radius $r = p = q$ handeln, und die Drehung $D_1(\varphi_1)$ in (3) entfällt dann.
Eine Fläche im Raum in Hauptachsenlage ist parametrisch gegeben durch

$$X = X(\alpha; u, v),\ \ Y = Y(\beta; u, v),$$

$$Z = Z(\gamma; u, v)\ \ u_1 \leq u \leq u_2,\ \ v_1 \leq v \leq v_2. \tag{5}$$

Hierbei sind α, β und γ wieder (andere) Parametervektoren, und u und v sind die Flächenparameter. Eine mit den Drehwinkeln ψ_3, ψ_2 und ψ_1 gedrehte und um $(A,B,C)^T$ verschobene Fläche ist dann

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + D_1(\psi_1) D_2(\psi_2) D_3(\psi_3) \begin{pmatrix} X(\alpha; u, v) \\ Y(\beta; u, v) \\ Z(\gamma; u, v) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Für ein Ellipsoid mit den Halbachsen P, Q und R und dem Ursprung als Mittelpunkt lautet (5)

$$\begin{aligned} X(\alpha; u, v) &= P\cos u \sin v, \\ Y(\beta; u, v) &= Q \sin u \sin v, \\ Z(\gamma; u, v) &= R \cos v, \\ 0 \leq u < 2\pi, &\quad 0 \leq v < \pi \end{aligned} \tag{7}$$

und müsste in (6) eingesetzt werden.
Wir stellen nun die Frage, wie eine Raumkurve und eine Fläche, beide in allgemeiner Lage, geschnitten werden können. Notwendig und hinreichend ist offenbar die Existenz gemeinsamer Punkte, d. h. die Existenz von Parameterwerten t, u und v derart, dass – bei der Schreibweise werden α, β und γ weggelassen –

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + D_1(\varphi_1) D_2(\varphi_2) D_3(\varphi_3) \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$+ D_1(\psi_1) D_2(\psi_2) D_3(\psi_3) \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix} \tag{8}$$

gilt. Dies sind drei nichtlineare Gleichungen für die drei Unbekannten t, u und v. Da man im Allgemeinfall jetzt nicht weiterkommt, wollen wir im nächsten Abschnitt konkret die Schnittpunkte von Ellipse im Raum und von Ellipsoid, beide in allgemeiner Lage, versuchen zu ermitteln, soweit solche überhaupt existieren. Dabei werden offenbar die Spezialfälle Kreis und Kugel, Kreis und Ellipsoid und Ellipse und Kugel simultan mitbehandelt. Die Übertragung des numerischen Verfahrens auf anderen Kombinationen von räumlichen Kegelschnitten und von Kegelschnitten im Raum oder auf andere konkrete Kurven und Flächen ist leicht möglich.

2 Schnittpunkte von Ellipse im Raum und von Ellipsoid

Das nichtlineare Gleichungssystem (8) lautet unter Verwendung von (4) und (7)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} + D_1(\psi_1) D_2(\psi_2) D_3(\psi_3) \begin{pmatrix} P\cos u \sin v \\ Q \sin u \sin v \\ R \cos v \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - D_1(\varphi_1)D_2(\varphi_2)D_3(\varphi_3) \begin{pmatrix} p \cos t \\ q \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \qquad (9)$$

Bevor wir auf die nummerische Behandlung von (9) eingehen, wollen wir einen sehr großen Spezialfall betrachten, wo analytisch entschieden werden kann, ob Lösungen existieren und wie diese gegebenenfalls explizit lauten.

Beispiel 1: Es sei ein Kreis in der (x, y)-Ebene mit Mittelpunkt $(a, 0, 0)^T$ mit $a \neq 0$ und Radius $r \neq 0$ und eine Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und Radius $R \neq 0$ gegeben, d. h. in der parametrischen Darstellung durch

$$x = a + r \cos t, \; y = r \sin t, \; z = 0, \; 0 \leq t < 2\pi \qquad (10)$$

und

$$X = R \cos u \sin v, \; Y = R \sin u \sin v, \; Z = R \cos v,$$

$$0 \leq u < 2\pi, \; 0 \leq v < \pi. \qquad (11)$$

Drehungen seien nicht vorgegeben. (Bei der Kugel macht dies sowieso keinen Sinn.) Wegen $R \neq 0$ liefert die Bedingung $z = Z$ sofort

$$\cos v = 0, \qquad (12)$$

d. h. es gilt $\sin v = 1$ und $v = \frac{\pi}{2}$ wegen $v \in [0, \pi\,)$. Die restlichen Gleichungen (9), d. h. $x = X$ und $y = Y$ liefern dann das einfache Problem, die verbleibenden zwei Kreise mittels der Forderungen

$$\begin{array}{rcrcl} R \cos u & = & a & + & r \cos t \\ R \sin u & = & & & r \sin t \end{array} \qquad (13)$$

zu schneiden. Quadrieren jeder der beiden Gleichungen und Aufaddieren der Ergebnisse liefert

$$2ar \cos t = R^2 - r^2 - a^2. \qquad (14)$$

Es gibt also dann zwei Lösungen t und $2\pi - t$ von (14), falls

$$\left(\frac{R^2 - r^2 - a^2}{2ar} \right)^2 \leq 1 \qquad (15)$$

erfüllt ist, was von den Werten für R,r und a abhängt. Für $R = 3$, $r = 5$, $a = 4$ ergibt sich $t = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right) = \pi - \arccos(.8) = 2.4981$, während für $r = 8$ (15) nicht erfüllt ist. Weiter ergibt die erste Gleichung von (13)

$$\cos u = \frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR}, \qquad (16)$$

was für $R = 3$, $r = 5$, $a = 4$ die Werte $u = \frac{\pi}{2}$ und $u = \frac{2\pi}{2}$ ergibt. Wegen der leicht nachrechenbaren Identität

$$r^2 \left[1 - \left(\frac{R^2 - r^2 - a^2}{2ar} \right) \right]^2 = R^2 \left[\left(\frac{R^2 - r^2 + a^2}{2aR} \right)^2 \right] \qquad (17)$$

ist das Quadrat der rechten Seite von (16) genau dann ≤ 1 wenn (15) gilt, d. h. (15) reicht für die Existenz von zwei Lösungen $(t, u, \pi/2)$ und $(2\pi - t, 2\pi - u, \pi/2)$.

Um nun im Allgemeinfall (9) eventuelle Nullstellen – falls existent, so wird ihre Anzahl i. a. 2 oder 4 sein, aber auch die Spezialfälle 1 und 3 sind denkbar – zu suchen, verwenden wir das Newton-Verfahren [1, 3] für (9). Dabei benutzen wir eine größere Anzahl N von Startwerten $(t^{(0)}, u^{(0)}, v^{(0)})$, wobei $0 \leq t^{(0)}, u^{(0)} < 2\pi, 0 \leq v^{(0)} < \pi$ gleich verteilt und unabhängig pseudozufällig in den jeweiligen Intervallen gewählt werden und wobei bei jeder Iteration $k \geq 1$ dafür gesorgt wird, dass auch $0 \leq t^{(k)}$, $u^{(k)} \leq 2\pi$, $0 \leq v^{(k)} < \pi$ gilt, indem geeignete Vielfache von $\pm 2\pi$ bzw. $\pm \pi$ addiert werden. Weiter wird die erforderliche Jacobi-Matrix für (9) durch Differenzenapproximation, wie bei der Subroutine Taylor [2] vorgesehen, angenähert.

Falls das so implementierte Newton-Verfahren stets divergieren sollte, so ist die Nichtexistenz von Schnittpunkten anzunehmen; andernfalls erhält man, falls nicht gelegentlich Divergenz auftritt, für verschiedene Startwerte i. a. irgendwelche Schnittpunkte und für hinreichend viele Startwerte i. a. alle Schnittpunkte.

Beispiel 2: Es sei $P = 5$, $Q = 3$, $R = 4$, $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $\psi_1 = 1$, $\psi_2 = -1$, $\psi_3 = 2$ und $p = 1$, $q = 7$, $a = 3$, $b = 1$, $c = 2$, $\varphi_1 = -1$, $\varphi_2 = 2$, $\varphi = 1$. Hier ist eine analytische Lösung nicht möglich. Bei $N = 20$ zufälligen Startwerten wurden vier Lösungen K Male mit jeweils weniger als 10 Iterationen in Sekundenbruchteilen erreicht, nämlich (L = Lösung Nr.)

L	t	u	v	x	y	z	K
1	5.8045	2.9915	.4134	2.6675	– 1.7065	3.9362	3
2	.6426	.7628	1.8184	2.9930	5.2057	1.2590	4
3	2.5191	.4486	1.5523	3.3510	4.5348	– .1680	7
4	3.4234	5.1031	.1003	3.1357	– 1.1577	1.8081	5

Einmal divergierte das Verfahren. Dieses Verhalten ist typisch für eine Reihe von weiteren durchgerechneten Beispielen.

Literatur

[1] Isaacson, E. / Keller, H. B.: Analyse numerischer Verhalten. Verlag Harri Deutsch 1973.

[2] Späth, H.: Algorithmen für multivariable Ausgleichsmodelle. R. Oldenburg, München 1974.

[3] Späth, H.: Numerik – Eine Einführung für Mathematiker und Informatiker, Vieweg, Braunschweig 1994.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Helmuth Späth
Fachbereich Mathematik
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Postfach 2503, D-26111 Oldenburg, Germany
E-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Das Problem der Bestimmung von Schnittpunkten einer Kurve im Raum und einer Fläche im Raum (beide in Parameterdarstellung) wird betrachtet allgemein und speziell für im Raum gedrehte und verschobene Ellipsen und gedrehte und verschobene Ellipsoide. Für den sehr wahrscheinlichen Fall einer nicht analytisch möglichen Lösung wird ein geeignet angepasstes nummerisches Verfahren vorgeschlagen und dessen erfolgreicher Einsatz an Beispielen erläutert.