



Zur numerischen Berechnung des kürzesten Abstandes von Kegelschnitten

Helmuth Späth, Oldenburg

In der Koordinatenmesstechnik wird häufig der kürzeste Abstand zwischen zwei Kurven in der Ebene oder zwischen zwei Flächen im Raum gesucht. Für ebene und räumliche Kegelschnitte wird ein numerisches Verfahren vorgeschlagen und an Beispielen die Effizienz belegt.

1 Einleitung

Nicht ausgeartete Kegelschnitte in der Ebene sind Gerade, Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel; solche im Raum sind Ebene, Kugel, Ellipsoid, Hyperboloide und Paraboloid. Wir setzen keine Hauptachsenlage voraus, lassen also Translationen und Drehungen zu. Gesucht ist dann der kürzeste Abstand zwischen Kegelschnitten in der Ebene oder im Raum vom gleichen oder von verschiedenem Typ. Die Fragestellung ist eine Verallge-

meinerung von der in [4] behandelten, wo einer der beiden Kegelschnitte zu einem Punkt entartet war.

Betrachten wir die geometrische Situation im Fall von zwei Kreisen (Fig. 1). Die Fälle 1 und 2 sind die von uns zu betrachtenden Normalfälle: der kürzeste Abstand ist die Strecke $\overline{AB}$ aber es gibt noch drei weitere (nicht kürzeste) Abstände, nämlich $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ bzw. $\overline{AD}$. Alle Strecken liegen auf der Verbindungsgeraden der beiden Kreismittelpunkte und sind somit elementar berechenbar, was bei anderen Kegelschnitten nicht der Fall ist. Die anderen Fälle 3 bis 6 sind entartet: in den Fällen 3, 4 und 6 ist der kürzeste Abstand gleich Null, der im Fall 6 sogar zweimal auftritt. Im Fall 5 von zwei konzentrischen Kreisen gibt es sogar unendlich viele kürzeste Abstände, was bei anderen Kegelschnitten aber nicht auftreten kann [3]; nur bei zwei Parallelen oder parallelen Ebenen gibt es das noch.

Ein auf herzuführenden Bestimmungsgleichungen beruhendes Iterationsverfahren wird in Abhängigkeit vom Startwert jeweils mehrere Abstände und die beiden zugehörigen Punkte auf den zwei Kegelschnitten liefern; derjenige mit der geringsten Länge muss dann ausgewählt werden. Die Fälle in Fig. 1 (außer Fall 5) können eben bei anderen Paaren von gleichen oder verschiedenen Kegelschnitten in modifizierter Form ebenfalls auftreten. Bei räumlichen Kegelschnitten kann es auch Schnittkurven geben, d.h. unendlich viele Punkte auf beiden mit Abstand Null.

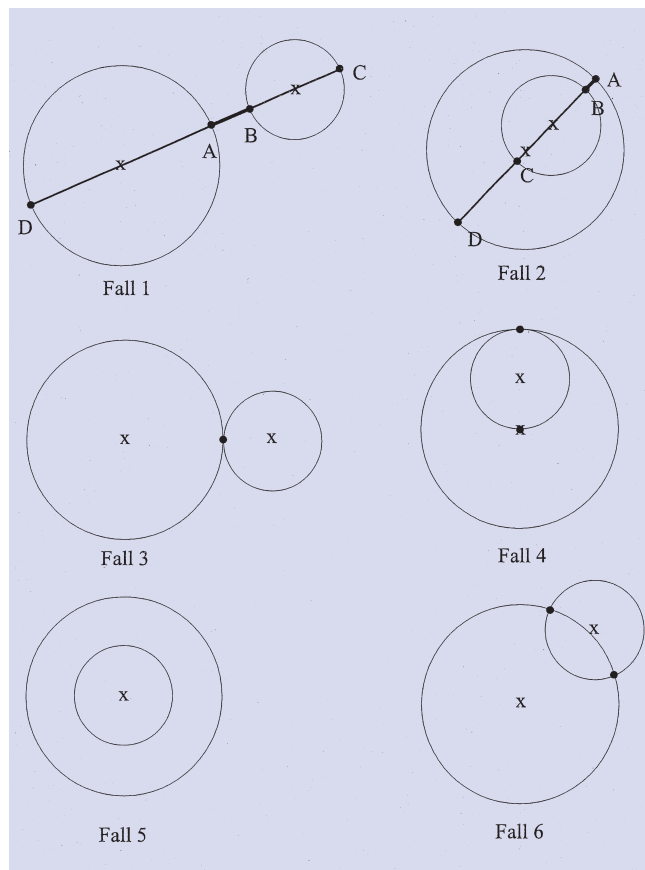


Fig. 1

2 Kürzester Abstand von zwei Ellipsen in Parameterdarstellung und in allgemeiner Lage

Beispielhaft am Fall zweier Ellipsen wollen wir die Berechnung des kürzesten Abstandes betrachten, wenn die Kegelschnitte in Parameterdarstellung vorliegen. Die Ausführungen lassen sich einfach z.B. auf zwei Ellipsoide oder auf zwei andere gleiche oder verschiedene ebene oder räumliche Kegelschnitte übertragen.

Es seien also zwei Ellipsen mit den Mittelpunkten (a, b) bzw. (c, d) , Halbachsenpaaren (p, q) bzw. (r, s) und Drehwinkeln α bzw. β gegeben. Die zugehörigen parametrischen Darstellungen sind dann

$$\begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + p \cos t \\ b + q \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (1)$$

und

$$\begin{pmatrix} C(u) \\ D(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c + r \cos u \\ d + s \sin u \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u < 2\pi \quad (2)$$

Für $p = q$ und $\alpha = 0$ oder $r = s$ und $\beta = 0$ haben wir den Fall einer Ellipse und eines Kreises. Für festes t und festes u ist der quadrierte Abstand zwischen zwei zugehörigen Punkten auf (1) und (2) durch

$$F(t, u) = (A(t) - C(u))^2 + (B(t) - D(u))^2 \quad (3)$$

gegeben. Der kürzeste Abstand entspricht einem globalen Minimum (t^*, u^*) dieser nach unten mit Null beschränkten Funktion und ist gegeben durch

$$d^* = \sqrt{F(t^*, u^*)}. \quad (4)$$

Notwendige Bedingungen für einen Abstand im Sinne solcher in Fig. 1 (Fälle 1 und 2) sind dann

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial t} = -(p \cos \alpha \sin t + q \sin \alpha \cos t)(A(t) - C(u)) - (p \sin \alpha \sin t - q \cos \alpha \cos t)(B(t) - D(u)) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u} = (r \cos \beta \sin u + s \sin \beta \cos u)(A(t) - C(u)) + (r \sin \beta \sin u - s \cos \beta \cos u)(B(t) - D(u)) = 0. \quad (6)$$

Um infrage kommende Abstände zu finden, ist das nichtlineare Gleichungssystem (5) und (6) nach t und u aufzulösen. Wegen (1) und (2) genügt es, t und u jeweils im Intervall $(0, 2\pi)$ zu suchen. Wir benutzen das NEWTON-Verfahren mit Approximation der partiellen Ableitungen von (5) und (6) nach t und u durch zentrale Differenzenquotienten, wie es z.B. in der FORTRAN-Subroutine TAYLOR [2] implementiert ist. Um viele Abstände und möglichst insbesondere den kürzesten zu finden, verwenden wir viele Startwerte für t und u , nämlich N Stück, und zwar gleich verteilt im Intervall $(0, 2\pi)$ (siehe Subroutine RANDOM in [1], S. 335).

Beispiel 1: Es sei $(a, b, p, q, \alpha) = (-1, -3, 2, 4, -0.5)$ und $(c, d, r, s, \beta) = (6, 1, 1, 3, 1)$. Für $N = 50$ zufällige Startwerte

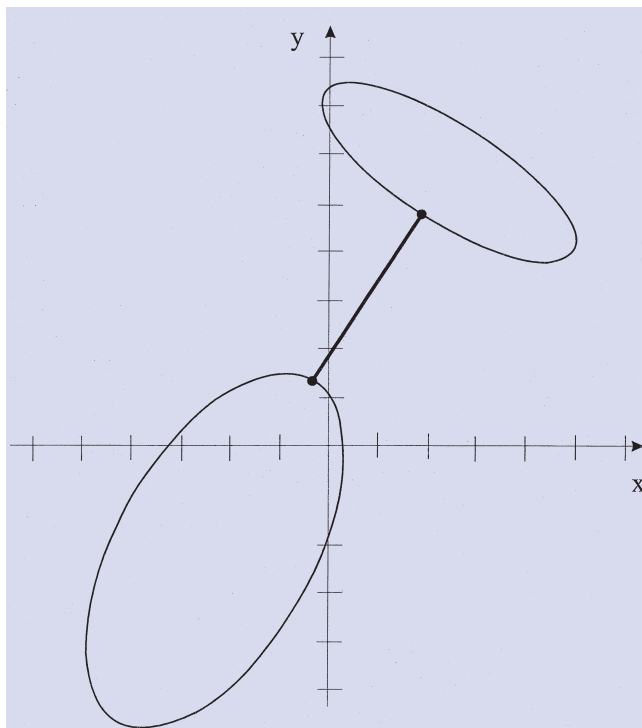


Fig. 2

wurde der kürzeste Abstand $d^* = 4.07$ mit $t^* = 1.54$ und $u^* = 3.14$ insgesamt 9 Male erreicht, siehe Fig. 2.

Andere Abstände $d = 6.10$, $d = 12.06$ und $d = 14.08$ wurden 21, 5 und 15 Male gefunden. Das NEWTON-Verfahren konvergierte für *jeden* der $N = 50$ Startwerte in 4 bis 7 Iterationen bei verlangerter 4-stelliger Genauigkeit. Das ist nicht weiter verwunderlich, da es z.B. mit t^*, u^* wegen der Periodizität der Ansatzfunktionen viele Lösungen gibt, z.B. ist auch $(t^*, u^*) = (7.82, -3.14)$ eine Lösung mit $d^* = 4.07$.

3 Kürzester Abstand zwischen zwei beliebigen Kegelschnitten in der Ebene

Ein beliebiger ebener Kegelschnitt, dessen Typ wir gar nicht kennen müssen, ist durch eine Gleichung

$$Q_1(x, y) = a_1 x^2 + a_2 xy + a_3 y^2 + a_4 x + a_5 y + a_6 = 0 \quad (7)$$

gegeben und ein zweiter durch

$$Q_2(x, y) = b_1 x^2 + b_2 xy + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y + b_6 = 0. \quad (8)$$

Für $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ oder $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ ist einer der beiden Kegelschnitte eine Gerade, siehe auch Beispiel 2 und Fig. 3. Ist (s, t) ein beliebiger Punkt auf Q_1 und ist (u, v) ein beliebiger Punkt auf Q_2 , so ist im Sinne unserer Aufgabenstellung das (nach unten beschränkte) Abstandsquadrat

$$S(s, t, u, v) = (s - u)^2 + (t - v)^2 \quad (9)$$

unter den Nebenbedingungen

$$Q_1(s, t) = 0, \quad Q_2(u, v) = 0 \quad (10)$$

global zu minimieren. Die LAGRANGE-Funktion ist dann

$$L(s, t, u, v, \lambda, \mu) = S(s, t, u, v) + \lambda Q_1(s, t) + \mu Q_2(u, v). \quad (11)$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Minimum sind

$$\frac{\partial L}{\partial s} = 2(s - u) + \lambda(2a_1 s + a_3 t + a_4) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 2(t - v) + \lambda(a_3 s + 2a_2 t + a_5) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -2(s - u) + \mu(2b_1 u + b_3 v + b_4) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} = -2(t - v) + \mu(b_3 u + 2b_2 v + b_5) = 0. \quad (15)$$

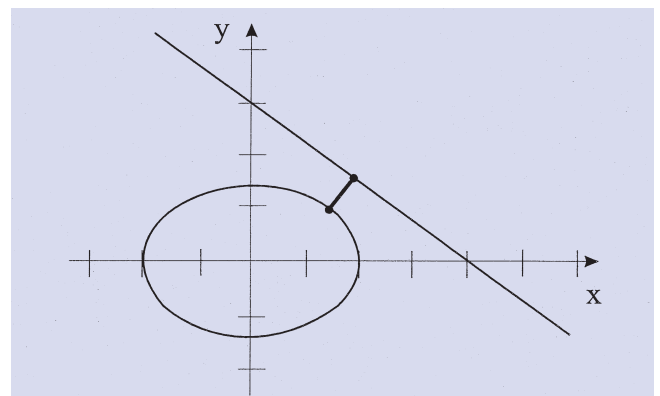


Fig. 3

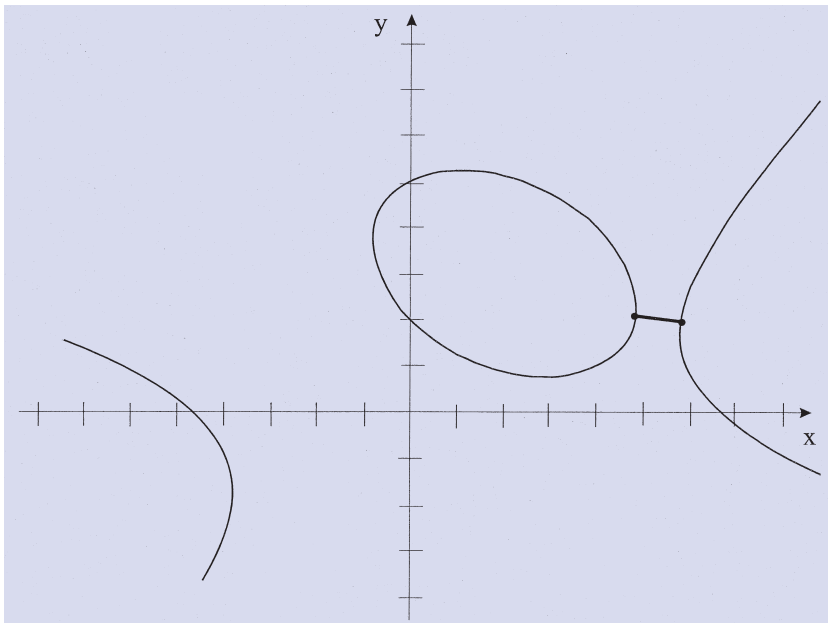


Fig. 4

Eliminiert man λ aus (12) und μ aus (14) und setzt in (13) bzw. (15) ein, so ergeben sich die Gleichungen

$$(t-v)(2a_1s + a_3t + a_4) - (s-u)(a_3s + 2a_2t + a_5) = 0, \quad (16)$$

$$-(t-v)(2b_1u + b_3v + b_4) + (s-u)(b_3u + 2b_2v + b_5) = 0. \quad (17)$$

Zusammen mit (10) sind dies vier nichtlineare Gleichungen mit den vier Unbekannten s, t, u, v . Bei den folgenden Beispielen wenden wir wieder das NEWTON-Verfahren an und benutzen jeweils $N=100$ Startwerte, die zufällig gleich verteilt in einem vierdimensionalen Würfel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und der Kantenlänge 20 erzeugt wurden.

Beispiel 2: Wählen wir für $\mathbf{a}=(a_1, \dots, a_6)^T$ und $\mathbf{b}=(b_1, \dots, b_6)^T$ die Werte $\mathbf{a}=(1,0,2,0,0,-4)$ und $\mathbf{b}=(0,0,0,3,4,-12)$, so wollen wir offenbar den kürzesten Abstand zwischen der Ellipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

mit dem Ursprung als Mittelpunkt und den Halbachsen $p=2$ und $q=\sqrt{2}$ und der Geraden

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

mit den Achsenabschnitten $x=4$ und $y=3$ berechnen. Schon beim ersten Startwert wurde der kürzeste Abstand $d^*=0.75$ mit $(s^*, t^*, u^*, v^*)=(1.46, .97, 1.91, 1.57)$ in 7 Iterationen auf 4 Dezimalen nach dem Komma genau gefunden. Ellipse, Gerade und der kürzeste Abstand sind in Fig. 3 visualisiert.

Beispiel 3: Geben wir $\mathbf{a}=(5,4,8,-32,-56,80)$ und $\mathbf{b}=(7,16,-23,-14,-16,-216)$ vor, so wissen wir zunächst nicht, um welche Art von Kegelschnitten es sich handelt. Eine Zeichnung, die man hier wie auch bei den folgenden Beispielen produzieren kann, indem man z. B. x variiert und für jedes x die entstehende quadratische Gleichung in y löst, zeigt (Fig. 4), dass es sich um eine Ellipse und eine Hyperbel handelt. Bei $N=100$ Startwerten

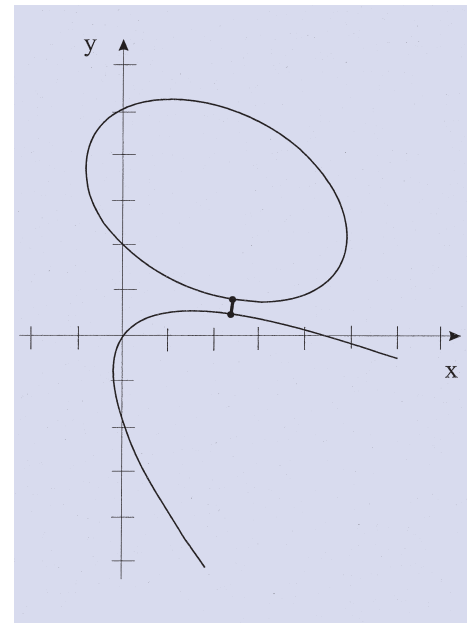


Fig. 5

wurde $d^*=1.01$ mit $(s^*, t^*, u^*, v^*)=(4.82, 2.09, 5.82, 1.96)$ 41 Male erhalten. Daneben wurden Abstände $d=4.82$, $d=6.90$, $d=9.48$ gefunden; 6 Male konvergierte das Verfahren nicht.

Beispiel 4: Mit $\mathbf{a}=(5,4,8,-32,-56,80)$ und $\mathbf{b}=(9,24,16,-40,30,0)$ haben wir eine Ellipse und eine Parabel, wie Fig. 5 zeigt. Hier wurde der kürzeste Abstand $d^*=0.33$ mit $(s^*, t^*, u^*, v^*)=(2.42, .80, 2.38, .47)$ 53 Male von $N=100$ gefunden, daneben auch $d=4.72$; insgesamt konvergierte das Verfahren in nur 22 von 100 Fällen nicht.

Beispiel 5: Mit $\mathbf{a}=(1,-8,7,6,-6,9)$ und $\mathbf{b}=(9,24,16,-40,30,0)$ haben wir nach Fig. 6 eine Hyperbel und eine Parabel. In 45 von 100 Fällen wurde $d^*=1.43$ mit $(s^*, t^*, u^*, v^*)=(-1.65, -.55, -.22, -.64)$ erhalten.

Die gesamte Rechenzeit für alle Beispiele war auf einem PC im Sekundenbereich.

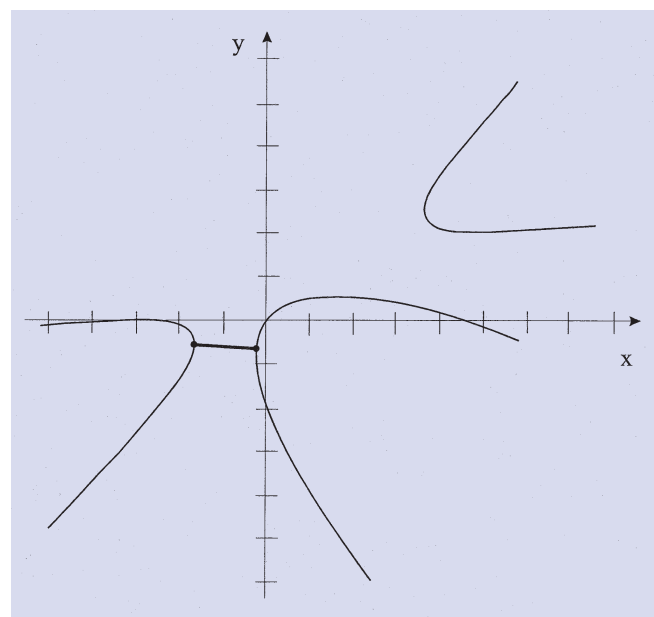


Fig. 6

4 Kürzester Abstand zwischen zwei beliebigen räumlichen Kegelschnitten

Zwei räumliche Kegelschnitte in impliziter Form sind gegeben durch

$$R_1(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0, \quad (18)$$

$$R_2(x, y, z) = b_1x^2 + b_2y^2 + b_3z^2 + b_4xy + b_5xz + b_6yz + b_7x + b_8y + b_9z + b_{10} = 0. \quad (19)$$

Suchen wir den kürzesten Abstand zwischen zwei Punkten (r, s, t) auf R_1 und (u, v, w) auf R_2 , so ist die nach unten beschränkte Funktion

$$T(r, s, t, u, v, w) = (r - u)^2 + (s - v)^2 + (t - w)^2 \quad (20)$$

global zu minimieren unter den Nebenbedingungen

$$R_1(r, s, t) = 0, \quad R_2(u, v, w) = 0. \quad (21)$$

Hier ist die LAGRANGE-Funktion

$$L(r, s, t, u, v, w, \lambda, \mu) = T(r, s, t, u, v, w) + \lambda R_1(r, s, t) + \mu R_2(u, v, w). \quad (22)$$

Auf dieselbe Weise wie im letzten Abschnitt führen die notwendigen Bedingungen auf vier nichtlineare Gleichungen

$$(s - v)(2a_1r + a_4s + a_5t + a_7) - (r - u)(2a_2s + a_4r + a_6t + a_8) = 0, \quad (23)$$

$$(t - w)(2a_1r + a_4s + a_5t + a_7) - (r - u)(2a_3t + a_5r + a_6s + a_9) = 0, \quad (24)$$

$$-(s - v)(2b_1u + b_4v + b_5w + b_7) + (r - u)(2b_2v + b_4u + b_6w + b_8) = 0, \quad (25)$$

$$-(t - w)(2b_1u + b_4v + b_5w + b_7) + (r - u)(2b_3w + b_5u + b_6v + b_9) = 0. \quad (26)$$

Hinzu kommen die Gleichungen (21). Das sind zusammen sechs nichtlineare Gleichungen mit den sechs Unbekannten (r, s, t, u, v, w) . In den beiden folgenden Beispielen haben wir für das NEWTON-Verfahren jeweils $N = 100$ Startwerte gleich verteilt im 6-dimensionalen Würfel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und den Kantenlängen 20 gewählt.

Beispiel 7: Für R_1 nehmen wir das Ellipsoid mit dem Ursprung als Mittelpunkt und den Halbachsenlängen 2, 3 und 6 und für R_2 die Kugel mit Mittelpunkt $(5, 4, 8)$ und dem Radius 1, also

$$R_1(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} - 1 = 0,$$

$$R_2(x, y, z) = (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 8)^2 - 1 = 0.$$

Hier wurde in 58 von 100 Fällen der kürzeste Abstand $d^* = 4.90$ mit $(r^*, s^*, t^*) = (.78, 1.18, 5.00)$ und $(u^*, v^*, w^*) = (4.28, 3.52, 7.49)$ gefunden, weiter einmal $d = 6.90$ und einmal $d = 14.50$; beim Rest der 40 Startwerte konvergierte das Verfahren nicht.

Beispiel 8: Hier wurden zwei willkürliche räumliche Ke-

gelschnitte gewählt, deren Typ nicht ermittelt wurde, nämlich

$$R_1(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - 4xy + 5xz - 6yz + 7x - 8y + 9z - 10 = 0,$$

$$R_2(x, y, z) = 10x^2 + 9y^2 + 8z^2 + 7xy + 6xz + 5yz + 4x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

Der kürzeste Abstand $d^* = .166$ wurde für $(r^*, s^*, t^*) = (.12, -.48, .40)$ und $(u^*, v^*, w^*) = (.033, -.41, .28)$ bei 24 von 100 Startwerten erreicht; andere Abstände waren $d = 1.11$ (10 Male), $d = 2.20$ (14 Male), $d = 3.13$ (11 Male); in 41 Fällen konvergierte das Verfahren nicht.

Die Rechenzeit für die beiden Beispiele zusammen war unter einer Sekunde. Daher ist Divergenz kein Problem, man kann z. B. auch $N = 10000$ Startwerte benutzen und dabei den Startwürfel wahlweise vergrößern oder verkleinern. Die empirische Wahrscheinlichkeit, dabei immer den kürzesten Abstand d^* u. a. zu erhalten, ist, nach den Beispielen, offenbar ziemlich groß.

Literatur

- [1] CHENEY, W., KINCAID, D.: Numerical Mathematics and Computing, 2nd edition, Monterey 1985.
- [2] SPÄTH, H.: Algorithmen für multivariable Ausgleichsmodelle. R. Oldenbourg-Verlag, München 1974.
- [3] SPÄTH, H.: Konzentrische Kegelschnitte (außer) Kreise gibt es nicht. AVN 107, 258–260 (2000).
- [4] SPÄTH, H.: Zur Bestimmung von Lotfußpunkten auf in der Koordinatentechnik vorkommenden Flächen. AVN 1/2001, 26–28.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. HELMUTH SPÄTH, Fachbereich Mathematik,
Carl-von-Ossietzky-Universität Oldenburg,
Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany.
E-Mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Bei den in der Koordinatenmesstechnik anfallenden mathematischen Aufgabenstellungen kann das Problem auftreten, dass der kürzeste Abstand zwischen zwei Kurven in der Ebene oder zwischen zwei Flächen im Raum zu bestimmen ist. Für den Fall, dass die Kurven ebene Kegelschnitte und die Flächen räumliche Kegelschnitte sind, wird ein numerisches Verfahren vorgeschlagen. Damit durchgerechnete Beispiele werden vorgestellt, die die Effizienz des Verfahrens belegen.