Georg Kampmann und Bernd Renner, Dessau

Vergleich verschiedener Methoden zur Bestimmung ausgleichender Ebenen und Geraden

Es wird das Problem der Bestimmung ausgleichender Flächen zweiter Ordnung (ausgleichende Quadrik) unter Benutzung fehlerhafter räumlicher Punktkoordinaten unter besonderer Berücksichtigung einer ausgleichenden Ebene bzw. bei ebenen Punktkoordinaten die Bestimmung einer ausgleichenden Geraden behandelt.

1 Aufgabenstellung

In [3] wurde das Problem der Bestimmung einer ausgleichenden Fläche zweiter Ordnung (ausgleichende Quadrik) unter Benutzung fehlerbehafteter räumlicher Punktkoordinaten behandelt. Ein auch für praktische Anwendungen besonders wichtiger Spezialfall ist die Bestimmung einer ausgleichenden Ebene beziehungsweise bei ebenen Punktkoordinaten in Analogie dazu die Bestimmung einer ausgleichenden Gerade.
Für diesen Anwendungsfall soll die in [3] vorgeschlagene Methode angewandt und mit einigen anderen Methoden verglichen werden. Gegeben seien räumliche kartesische Koordinaten x_i, y_i, z_i beziehungsweise ebene kartesische Koordinaten x_i, y_i für n Punkte ($i = 1, \ldots, n$, $n > 3$ im Falle räumlicher bzw. $n > 2$ im Falle ebener Koordinaten). Diese Koordinaten sollen im Modellansatz verschiedene Punkte im Raum bzw. in der Ebene beschreiben, so dass keine sogenannten „Mehrfachbeobachtungen im Modell“ vorhanden sind.
In den folgenden Betrachtungen wird für den Beobachtungsvektor

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \text{ im Falle raumlicher Koordinaten}$$

beziehungsweise (1.1)

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ im Falle ebener Koordinaten}$$

als stochastisches Modell zum Zweck der Ausgleichungsrechnung die a priori Varianz-Kovarianz-Matrix

$$D(\mathbf{l}) = \sigma^2 \mathbf{I} \quad (\mathbf{I}: \text{ Einheitsmatrix}) \tag{1.2}$$

angesetzt.
Ziel ist die Bestimmung einer ausgleichenden Ebene bzw. Gerade, das heißt, eines geometrischen Gebildes mit der Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

im Falle räumlicher Koordinaten

beziehungsweise

$$a \cdot x + b \cdot y + d = 0 \quad \text{im Falle ebener Koordinaten}$$

Zu diesem Zweck müssen geeignete Schätzwerte für die Parameter a, b, c und d bestimmt werden, die mit $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ und $\hat{d}$ bezeichnet werden.
An den Stellen, an denen im Folgenden sowohl auf den Fall räumlicher als auch auf den Fall ebener Koordinaten Bezug genommen wird, werden meistens nur die Formeln für den erstgenannten Fall explizit genannt, da die Übertragung auf den Fall ebener Koordinaten keine Schwierigkeiten bereitet.

2 Verschiedene Möglichkeiten zur Bestimmung ausgleichender Ebenen und Geraden

In [1] wird eine exakte Methode zur Lösung des Problems der sogenannten orthogonalen Regression erläutert, das heißt, der Bestimmung einer ausgleichenden Ebene bzw. Gerade, für die die Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände zu den gegebenen Punkten minimal wird.
Nach dieser Methode ergibt sich der gesuchte Parametervektor $(\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c})^T$ als der zum kleinsten Eigenwert der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_s)^2 & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_s)(y_i - y_s) & \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_s)(z_i - z_s) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_s)(y_i - y_s) & \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_s)^2 & \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_s)(z_i - z_s) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_s)(z_i - z_s) & \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_s)(z_i - u_s) & \sum_{i=1}^{n}(z_i - z_s)^2 \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

gehörende normierte Eigenvektor. x_s, y_s und z_s sind hierbei die Schwerpunktkoordinaten der gegebenen Punkte:

$$x_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ y_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,\ z_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Anschließend kann der Parameter $\hat{d}$ folgendermaßen bestimmt werden:

$$\hat{d} = -\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \hat{a} + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \hat{b} + \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \hat{c}\right) \qquad (2.2)$$

Wie in [1] erläutert, ist der minimale Eigenwert der Matrix in (2.1) außerdem gleich dem gesuchten Minimum der Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände zur ausgleichenden Gerade.

Die Minimierung der Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände zur ausgleichenden Ebene ist gleichbedeutend mit der Minimierung von $\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2)$, wobei v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} die an den Punktkoordinaten x_i, y_i, und z_i anzubringenden Verbesserungen sind. Deshalb ist eine exakte Lösung des Problems der orthogonalen Regression auch als bestmögliche L2-Lösung für das vorliegende Ausgleichungsproblems anzusehen (Minimierung der Quadratsumme der Verbesserungen). Wie in [1] erläutert, hat diese Lösung die Eigenschaft, dass die ausgleichende Gerade bzw. die ausgleichende Ebene durch den Schwerpunkt der gegebenen Punkte verläuft.

Allerdings ermöglicht es der in [1] gewählte Ansatz nicht, von der Zielfunktion der Minimierung der Quadratsumme der Verbesserungen zu anderen Zielfunktionen überzugehen. Als Alternative bietet es sich daher an, ein geeignetes (lineares) Ausgleichungsmodell aufzustellen, in dem neben der L2-Zielfunktion auch andere geeignete Zielfunktionen gewählt werden können wie z. B. eine L1-Zielfunktion (Minimierung der Absolutsumme der Verbesserungen oder auch Minimierung der Summe der orthogonalen Abstände) oder eine Minimax-Zielfunktion (Minimierung der betragsmäßig maximalen Verbesserung oder auch Minimierung des maximalen orthogonalen Abstandes).

Zu diesem Zweck bieten sich verschiedene Ausgleichungsansätze an, insbesondere solche, die der bekannten quasivermittelnden Ausgleichungsrechnung entsprechen, vgl. [4] und auch [2]. Da diese Methoden unter Umständen nur Näherungslösungen liefern, empfiehlt es sich, zu ihrer Beurteilung die jeweils gelieferte L2-Lösung mit der gemäß (2.1) und (2.2) erhaltenen optimalen L2-Lösung zu vergleichen.

Um zu einer Ausgleichungsformulierung zu gelangen, muss man zunächst Gleichung (1.3) so schreiben, dass Verbesserungen an die gegebenen Punktkoordinaten angebracht werden:

$$a \cdot (x_i + v_{x_i}) + b \cdot (y_i + v_{y_i}) + c \cdot (z_i + v_{z_i}) + d =$$
$$0 \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2.3)$$

Bei Vorgabe der Beobachtungsgleichungen (2.3) muss zusätzlich eine Bedingung für die Parameter a, b, c und d gegeben sein, denn sonst würde sich als Lösung des Ausgleichungsproblems $a = b = c = d = 0$ ergeben.

Für die Vorgabe einer solchen Bedingung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine besonders einfache Möglichkeit wäre beispielsweise die Bedingung $d = -1$, womit die Beobachtungsgleichungen (2.3) übergehen in

$$a \cdot (x_i + v_{x_i}) + b \cdot (y_i + v_{y_i}) +$$
$$c \cdot (z_i + v_{z_i}) = 1 \quad i = 1, \ldots, n \qquad (2.4)$$

Ausgehend von (2.4) kann man nun die in [3] für den allgemeineren Fall einer Fläche zweiter Ordnung erläuterte Methode anwenden. Diese besteht darin, durch Bildung der Ableitungen nach den Parametern und den verbesserten Beobachtungen unter Benutzung geeigneter Näherungswerte a_0, b_0 und c_0 ($a = a_0 + \Delta a$, $b = b_0 + \Delta b$, $c = c_0 + \Delta c$) zu einem Ausgleichungsmodell mit bedingten Beobachtungen und Unbekannten überzugehen, welches sich in ein Modell mit quasivermittelnden Beobachtungen überführen lässt, indem die zum Punkt Nr. i gehörenden Verbesserungen v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} zu einer Verbesserung (Rechnungsverbesserung) V_i zusammengefasst werden.

Aus (2.4) ergibt sich zunächst

$$a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i + c_0 \cdot z_i + \Delta a \cdot x_i + \Delta b \cdot y_i + \Delta c \cdot z_i +$$
$$a_0 \cdot v_{x_i} + b_0 \cdot v_{y_i} + c_0 \cdot v_{z_i} + \Delta a \cdot v_{x_i} +$$
$$\Delta b \cdot v_{y_i} + \Delta c \cdot v_{z_i} - 1 = 0 \qquad (2.5)$$

Mit

$$V_i := -a_0 \cdot v_{x_i} - b_0 \cdot v_{y_i} - c_0 \cdot v_{z_i} - \Delta a \cdot v_{x_i} -$$
$$\Delta b \cdot v_{y_i} - \Delta c \cdot v_{z_i} = -a \cdot v_{x_i} - b \cdot v_{y_i} - c \cdot v_{z_i} \qquad (2.6)$$

und

$$w_i := a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i + c_0 \cdot z_i - 1 \qquad (2.7)$$

lautet dann die Gleichung Nr. i im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen:

$$x_i \cdot \Delta a + y_i \cdot \Delta b + z_i \cdot \Delta c = -w_i + V_i \qquad (2.8)$$

Da die Ausgangsgleichung (2.4) im Gegensatz zum allgemeineren Fall einer Fläche zweiter Ordnung bereits linear in den Parametern und Verbesserungen ist, ist hier – ähnlich wie beispielsweise bei der Ausgleichung von Höhennetzen – die Einführung von Näherungswerten nicht unbedingt notwendig oder anders formuliert: Bei Vernach-

lässigung eventueller Rundungsfehler sind die Ausgleichungsresultate unabhängig von den gewählten Näherungswerten.
Man kann also auch die Näherungswerte $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ wählen. Mit $\Delta a = a - a_0 = a, \Delta b = b - b_0 = b$, $\Delta c = c - c_0 = c$ und $w_i = a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i + c_0 \cdot z_i - 1 = -1$ nimmt in diesem Fall Gleichung (2.8) folgende Gestalt an:

$$x_i \cdot a + y_i \cdot b + z_i \cdot c = 1 + V_i \tag{2.9}$$

Als eine weitere Möglichkeit für die Aufstellung der zusätzlich zu den Gleichungen (2.3) erforderlichen Bedingung soll im Folgenden die Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ betrachtet werden (im Falle einer ausgleichenden Gerade in der Ebene lautet diese entsprechend $a^2 + b^2 = 1$).
Im Gegensatz zu der Bedingung $d = -1$, die implizit in den Gleichungen (2.4) enthalten ist, muss die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ beim Übergang zum Modell der quasivermittelnden Beobachtungen explizit berücksichtigt und unter Benutzung der Näherungswerte a_0, b_0, c_0 und d_0 linearisiert werden. Man erhält auf diese Weise ein Modell mit quasivermittelnden Beobachtungen und einer Bedingungsgleichung für die Unbekannten.
Die Beobachtungsgleichung Nr. i, bei der im Vergleich zu Gleichung (2.8) noch der Näherungswert und der Zuschlag für den Parameter d hinzukommen, lautet in diesem Fall

$$x_i \cdot \Delta a + y_i \cdot \Delta b + z_i \cdot \Delta c + \Delta d = -w_i + V_i \tag{2.10}$$

$$\text{mit } V_i := -a \cdot v_{x_i} - b \cdot v_{y_i} - c \cdot v_{z_i}$$

$$\text{und } w_i := a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i + c_0 \cdot z_i + d_0$$

Setzt man für die Näherungswerte die Gültigkeit von $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$ voraus (dies kann durch Multiplikation aller Näherungswerte mit einem geeigneten Faktor erreicht werden), so lautet die linearisierte Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ folgendermaßen:

$$2 \cdot a_0 \cdot \Delta a + 2 \cdot b_0 \cdot \Delta b + 2 \cdot c_0 \cdot \Delta c = 0 \tag{2.11}$$

Da es sich bei der Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ im Gegensatz zur Bedingungsgleichung $d = -1$ um eine nichtlineare handelt, ist ferner keine Unabhängigkeit des Ausgleichungsresultates von den gewählten Näherungswerten mehr gegeben. Man benötigt somit in diesem Fall geeignete Näherungswerte, die beispielsweise durch Anwendung des zuvor erläuterten Ausgleichungsansatzes (mit der Bedingung $d = -1$) gewonnen werden können.
In den folgenden Abschnitten sollen nun die verschiedenen hier erläuterten Methoden an Hand konkreter Beispiele miteinander verglichen werden. Dazu werden diese von 1 bis 3 durchnumeriert:

Methode 1:
Bestimmung von $(\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c})^T$ als zum kleinsten Eigenwert der Matrix in (2.1) gehörender Eigenvektor und Bestimmung von $\hat{d}$ gemäß (2.2)

Methode 2:
Benutzung der Bedingungsgleichung $d = -1$ und Ausgleichung im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen gemäß (2.8) beziehungsweise (2.9)

Methode 3:
Benutzung der Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ und Ausgleichung im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen gemäß (2.10) mit der Bedingung (2.11)
Betrachtet werden sollen in den folgenden beiden Abschnitten das Beispiel einer ausgleichenden Gerade für 3 Punkte und das Beispiel einer ausgleichenden Ebene für 4 Punkte. Es zeigt sich bei diesen Beispielen, dass von den Methoden 2 und 3 nur die Methode 3 in der Lage ist, die mit Methode 1 ermittelte exakte L2-Lösung zu reproduzieren (zumindest iterativ). In Abschnitt 5 wird begründet, warum die Methode 3 diese günstige Eigenschaft besitzt.

3 Die Bestimmung einer ausgleichenden Gerade mit drei verschiedenen Methoden an Hand eines konkretes Zahlenbeispiels

In der Ebene seien 3 Punkte mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Koordinaten gegeben, durch die eine ausgleichende Gerade gelegt werden soll:

Tab. 3.1: Ebene Koordinaten

x_i	– 10	0	10
y_i	– 10	1	10

Dafür sollen die in Abschnitt 2 erläuterten drei Methoden angewandt werden, wobei die entsprechenden Formeln jeweils gemäß der vorliegenden Aufgabenstellung zu modifizierend sind (Weglassen der Koordinate z und des Parameters c).
Methode 1:
Unter Berücksichtigung der Erläuterungen zu Beginn von Abschnitt 2 ergibt sich der Parametervektor $(\hat{a}\ \hat{b})^T$ als der zum kleineren der beiden Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_s)^2 & \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_s)(y_i - y_s) \\ \sum_{i=1}^{3}(x_i - x_s)(y_i - y_s) & \sum_{i=1}^{3}(y_i - y_s)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 & 200 \\ 200 & 200\,\frac{2}{3} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

gehörende normierte Eigenvektor. x_s und y_s sind hierbei die Schwerpunktkoordinaten, die sich folgendermaßen ergeben:

$$x_s = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = 0, \quad y_s = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{1}{3} \tag{3.2}$$

Die Eigenwerte der Matrix in (3.1) sind 0.333056 und 400.333611 und als normierter Eigenvektor zum kleineren Eigenwert erhält man den Vektor $(-0.707696\ \ 0.706517)^T$. Somit ergeben sich nach Methode 1 unter Berücksichtigung von (2.2) folgende Schätzwerte für die Parameter der ausgleichenden Gerade:

$\hat{a} = -0.707696, \ \hat{b} = 0.706517,$

$$\hat{d} = -\frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \hat{a} + \sum_{i=1}^{3} y_i \cdot \hat{b}\right) = -0.235506 \qquad (3.3)$$

Wie es für die mit Methode 1 bestimmte Lösung zu erwarten ist, verläuft die ausgleichende Gerade durch den Schwerpunkt, denn es gilt

$$\hat{a} \cdot x_s + \hat{b} \cdot y_s + \hat{d} = -0.707696 \cdot 0 + 0.706517 \cdot \frac{1}{3} - 0.235506 = 0$$

Außerdem ist der gesuchte Minimalwert der Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände zur ausgleichenden Gerade gleich dem oben angegebenen minimalen Eigenwert:

$$\min \sum_{i=1}^{3}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2) = \lambda_{min} = 0.333056 \qquad (3.4)$$

Methode 2:
Durch Einsetzen der Koordinaten der drei gegebenen Punkte in die Beobachtungsgleichungen (2.9) erhält man in Matrixschreibweise folgendes Modell der quasivermittelnden Beobachtungen:

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{w} + \mathbf{V} \quad \text{mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 0 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ (\mathrm{diag}(D(\mathbf{V})) = \sigma^2 \begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ a^2+b^2 \\ a^2+b^2 \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

$D(\mathbf{V})$ ergibt sich hierbei unter Beachtung der Gleichungen (1.2) und (2.6) aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz. Eigentlich müssten somit bei einer L2-Ausgleichung im Modell (3.5) die Gewichte $P_i = \frac{1}{a^2+b^2}$ benutzt werden. Dies ist jedoch nicht möglich, da erst durch die Ausgleichung Schätzwerte für a und b bestimmt werden sollen. Weil jedoch alle Gewichte gleich groß sind und es für die Schätzung der Parameter nur auf die Verhältnisse der Gewichte zueinander ankommt, kann als Gewichtsmatrix die Einheitsmatrix benutzt werden.
Als L2-Lösung $\hat{\mathbf{u}}$ erhält man somit

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Die Parameter der ausgleichenden Gerade ergeben sich also zu

$$\hat{a} = -1, \ \hat{b} = 1, \ \hat{d} = -1 \qquad (3.7)$$

Es sei darauf hingewiesen, dass diese ausgleichende Gerade im Gegensatz zu der mit Methode 1 ermittelten nicht durch den Schwerpunkt verläuft, denn es gilt

$$\hat{a} \cdot x_s + \hat{b} \cdot y_s + \hat{d} = -1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \neq 0.$$

Außerdem ist, wie weiter oben bereits erläutert, keine Verbesserung der Lösung durch Verwendung der soeben ermittelten Parameterschätzwerte als neue Näherungswerte in (2.8) möglich, denn unabhängig von der Wahl der Näherungswerte ergeben sich immer dieselben ausgeglichenen Parameter wie in (3.7) angegeben.
Mit den in (3.7) angegebenen Schätzwerten als Näherungswerte ($a_0 = -1, \ b_0 = 1$) beispielsweise ergeben sich gemäß (2.7) die Widersprüche $w_i := a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i - 1$ und man erhält das Modell

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{w} + \mathbf{V} \quad \text{mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 0 & 1 \\ 10 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (3.8)$$

woraus sich als Parameterschätzung

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \Delta\hat{a} \\ \Delta\hat{b} \end{pmatrix} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.9)$$

und damit $\hat{a} = a_0 + \Delta\hat{a} = a_0, \ \hat{b} = b_0 + \Delta\hat{b} = b_0$ ergibt. Man erhält also dieselbe Lösung wie in (3.7) angegeben.
Aus dem im Modell (3.5) erhaltenen Verbesserungsvektor $\mathbf{V} = \mathbf{A\hat{u}} + \mathbf{w}$ ergeben sich die Verbesserungen v_{x_i} und v_{y_i} folgendermaßen:

$$v_{x_i} = -V_i \cdot P_i \cdot \hat{a} \quad v_{y_i} = -V_i \cdot P_i \cdot \hat{b} \qquad (3.10)$$

Es handelt sich hierbei um dieselbe Formel, die in [3] für den allgemeineren Fall einer ausgleichenden Fläche zweiter Ordnung bereits angewendet und erläutert wurde. In (3.10) ist für P_i das sich unter Berücksichtigung von (3.5) ergebende Gewicht $P_i = \dfrac{1}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2}$ einzusetzen, da für die Parameter a und b nunmehr die Schätzwerte $\hat{a}$ und $\hat{b}$ vorliegen. (3.10) nimmt damit folgende Gestalt an:

$$v_{x_i} = -\frac{V_i \cdot \hat{a}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2} \quad v_{y_i} = -\frac{V_i \cdot \hat{b}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2} \qquad (3.11)$$

Eine weitere Begründung für die Formel (3.11) wird in Abschnitt 5 gegeben.
Durch Einsetzen in (3.11) erhält man die in Tabelle 3.2 angegebenen Verbesserungen.

Tab. 3.2: Verbesserungen der ebenen Koordinaten mit Methode 2

v_{x_i}	– 0.5	0	– 0.5
v_i	0.5	0	0.5

Die Berechnung der Quadratsumme der Verbesserungen ergibt $\sum_{j=1}^{3}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 1$, also einen wesentlich größeren Wert als der in (3.4) angegebene Idealwert. Auch dadurch wird deutlich, dass bei diesem Beispiel mit Methode 2 nicht die optimale L2-Lösung ermittelt wird.

Methode 3:
Für Methode 3 sollen die mit Methode 2 ermittelten Parameterschätzwerte ($a_{00} = -1, \ b_{00} = 1, \ d_{00} = -1$) als

Näherungswerte verwendet werden. Dazu müssen diese zunächst so normiert werden, dass die Bedingung $a_0^2 + b_0^2 = 1$ erfüllt ist. Man erhält

$$a_0 = \frac{a_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b_0 = \frac{b_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d_0 = \frac{d_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{3.12}$$

Durch Einsetzen der benötigten Werte in die Gleichungen (2.10) und (2.11) erhält man nun ein Modell mit quasivermittelnden Beobachtungen und einer Bedingung, welches in Matrixschreibweise folgendermaßen lautet:

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{V}$$
$$\mathbf{Hu} = \mathbf{w}_2$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ \mathbf{H} = (-\sqrt{2} \quad \sqrt{2} \quad 0),$$

$$\mathbf{w}_2 = (0), \ \mathbf{P} = \mathbf{I} \tag{3.13}$$

Eine exakte Methode zur Ermittlung der Lösung im Modell (3.13) wäre die Umstellung der Bedingungsgleichung $2 \cdot a_0 \cdot \Delta a + 2 \cdot b_0 \cdot \Delta b = 0$ nach a_0 oder b_0 und das Einsetzen des entsprechenden Ausdrucks in die 3 Beobachtungsgleichungen.

Will man ohne großen Zusatzaufwand vorhandene Software zur Lösungsbestimmung gemäß Gleichung (3.9) nutzen, so bietet es sich an, die Bedingungsgleichung ebenfalls als eine Beobachtungsgleichung anzusehen, ihr aber ein sehr viel größeres Gewicht als den anderen Gleichungen zuzuordnen, zum Beispiel das Gewicht 10^6 im Vergleich zum Gewicht 1 für die anderen Beobachtungen. Man wird dann die gesuchte L2-Lösung für das Modell (3.13) ebenfalls mit hinreichender Genauigkeit erhalten.

Auf diese Weise ergibt sich das Modell

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} = -\bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{V}} \quad \text{mit}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -10 & -10 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \ \bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{diag}(\bar{\mathbf{P}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 10^6 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

woraus sich als Parameterschätzung

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \Delta\hat{a} \\ \Delta\hat{b} \\ \Delta\hat{d} \end{pmatrix} = -(\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{A}})^{-1} \ \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{w}} =$$

$$\begin{pmatrix} -0.000589 \\ -0.000589 \\ 0.471601 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ableiten lässt. Für die gesuchten Parameter $\hat{a}$, $\hat{b}$ und $\hat{d}$ erhält man somit:

$$\hat{a} = a_0 + \Delta\hat{a} = -0.707695,$$
$$\hat{b} = b_0 + \Delta\hat{b} = 0.706518,$$
$$\hat{d} = d_0 + \Delta\hat{d} = -0.235506 \tag{3.16}$$

Diese Lösung unterscheidet sich nur sehr wenig von der mit Methode 1 ermittelten optimalen L2-Lösung (andernfalls wäre es – wie insbesondere das Beispiel in Abschnitt 4 zeigt – auch möglich, die Lösung iterativ zu verbessern). Die Verbesserungen v_{x_i} und v_{y_i} können unter Verwendung von $\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}$ entsprechend den Beziehungen (3.11) berechnet werden.

Man erhält damit die in Tabelle 3.3 angegebenen Verbesserungen.

Tab. 3.3: Verbesserungen der ebenen Koordinaten mit Methode 3

v_{x_i}	– 0.158333	0.333333	– 0.175
v_{y_i}	0.15807	– 0.332778	0.174709

Für die Quadratsumme der Verbesserungen ergibt sich in diesem Fall der Wert $\sum_{i=1}^{3}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2) = 0.333056$. Wie zu erkennen ist, stimmt dieser Wert im Rahmen der Genauigkeit bereits völlig mit dem in (3.4) angegebenen und durch Eigenwertbestimmung ermittelten optimalen Wert überein. Dies zeigt ebenfalls, dass Methode 3 mit hinreichender Genauigkeit die optimale L2-Lösung ermittelt hat.

4 Die Bestimmung einer ausgleichenden Ebene mit drei verschiedenen Methoden an Hand eines konkretes Zahlenbeispiels

Durch 4 räumliche Punkte mit den in Tabelle 4.1 angegebenen Koordinaten soll eine ausgleichende Ebene gelegt werden:

Tab. 4.1: Räumliche Koordinaten

x_i	– 10	– 1	1	10
y_i	– 15	– 0.5	1.5	15
z_i	– 20	– 2	1	20

Zu diesem Zweck sollen erneut die in Abschnitt 2 erläuterten drei Methoden angewandt werden.

Methode 1:
Mit den Schwerpunktkoordinaten

$$x_s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i = 0,\; y_s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i = \frac{1}{4},\; z_s = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} z_i = -\frac{1}{4} \qquad (4.1)$$

ergibt sich der Parametervektor $(\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c})^T$ als der zum kleinsten Eigenwert der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_s)^2 & \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_s)(y_i - y_s) & \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_s)(z_i - z_s) \\ \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_s)(y_i - y_s) & \sum_{i=1}^{4}(y_i - y_s)^2 & \sum_{i=1}^{4}(y_i - y_s)(z_i - z_s) \\ \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_s)(z_i - z_s) & \sum_{i=1}^{4}(y_i - y_s)(z_i - z_s) & \sum_{i=1}^{4}(z_i - z_s)^2 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} 202 & 302 & 403 \\ 302 & 452.25 & 602.75 \\ 403 & 602.75 & 804.75 \end{pmatrix}$$

gehörende normierte Eigenvektor.
Als Eigenwerte der Matrix in (4.2) erhält man 1458.354371, 0.134032 und 0.511597. Der normierte Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert ist der Vektor $(\hat{a}\ \hat{b}\ \hat{c})^T = (-0.92606\ 0.168226\ 0.337806)^T$
Zusammengefasst erhält man also nach Methode 1 unter Berücksichtigung von Gleichung (2.2) folgende Schätzwerte für die Parameter a, b, c und d:

$$\hat{a} = -0.92606,\ \hat{b} = 0.168226,$$
$$\hat{c} = 0.337806,\ \hat{d} = 0.042395 \qquad (4.3)$$

Die so ermittelte ausgleichende Ebene verläuft durch den Schwerpunkt, denn es gilt

$$\hat{a}\cdot x_s + \hat{b}\cdot y_s + \hat{c}\cdot z_s + \hat{d} =$$
$$-0.92606\cdot 0 + 0.168226\cdot 0.25 +$$
$$0.337806\cdot(-0.25) + 0.042395 = 0$$

Weiterhin ist durch den oben angegebenen minimalen Eigenwert 0.134032 der Minimalwert der Quadratsumme der Verbesserungen bei der Bestimmung einer ausgleichenden Ebene gegeben:

$$\min \sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = \lambda_{\min} = 0.134032$$

Methode 2:
In Analogie zu (3.5) und (3.6) ergeben sich unter Benutzung der vorliegenden Koordinaten das Modell der quasivermittelnden Beobachtungen und die Lösung $\hat{\mathbf{u}}$ folgendermaßen:

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{w} + \mathbf{V} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -15 & -20 \\ -1 & -0.5 & -2 \\ 1 & 1.5 & 1 \\ 10 & 15 & 20 \end{pmatrix},\ \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(D(\mathbf{V})) = \sigma^2 \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} \qquad (4.5)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{A}^T\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (4.6)$$

Somit hat die nach Methode 2 ermittelte ausgleichende Ebene folgende Parameter:

$$\hat{a} = 0.5,\ \hat{b} = 1,\ \hat{c} = -1,\ \hat{d} = -1 \qquad (4.7)$$

Wie bei dem Beispiel in Abschnitt 3 verläuft auch die jetzt ermittelte ausgleichende Ebene nicht durch den Schwerpunkt:

$$\hat{a}\cdot x_s + \hat{b}\cdot y_s + \hat{c}\cdot z_s + \hat{d} =$$
$$0.5\cdot 0 + 1\cdot 0.25 - 1\cdot(-0.25) - 1 = -0.5 \neq 0$$

Unter Benutzung von $\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}$ können die Verbesserungen v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} in Analogie zu (3.11) bestimmt werden:

$$v_{x_i} = -\frac{V_i\cdot\hat{a}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2} \qquad v_{y_i} = -\frac{V_i\cdot\hat{b}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2}$$

$$v_{z_i} = -\frac{V_i\cdot\hat{c}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2} \qquad (4.8)$$

Man erhält für v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} die in Tabelle 4.2 angegebenen Werte.

Tab. 4.2: Verbesserungen der räumlichen Koordinaten mit Methode 2

v_{x_i}	$0.\bar{2}$	0	0	$0.\bar{2}$
v_{y_i}	$0.\bar{4}$	0	0	$0.\bar{4}$
v_{z_i}	$-0.\bar{4}$	0	0	$-0.\bar{4}$

Für die Quadratsumme der Verbesserungen folgt daraus der Wert $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.\bar{8}$.

Dies ist ein deutlich schlechterer Wert als der in (4.4) angegebene Optimalwert der Verbesserungsquadratsumme. Wie im Falle einer ausgleichenden Gerade lässt sich auch diese Lösung durch weitere Iterationsschritte nicht verbessern, da sich mit Methode 2 unabhängig von der Vorgabe der Näherungswerte stets dieselbe ausgleichende Ebene ergibt.

Methode 3:

Wie in Abschnitt 3 sollen auch diesmal die mit Methode 2 ermittelten Werte ($a_{00} = 0.5$, $b_{00} = 1$, $c_{00} = -1$, $d_{00} = -1$) als Näherungswerte für Methode 3 verwendet und zu diesem Zweck zuvor so normiert werden, dass die Bedingung $a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1$ erfüllt ist. Damit ergibt sich

$$a = \frac{a_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2 + c_{00}^2}} = 0.\bar{3}$$

$$b_0 = \frac{b_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2 + c_{00}^2}} = 0.\bar{6}$$

$$c_0 = \frac{c_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2 + c_{00}^2}} = -0.\bar{6}$$

$$d_0 = \frac{d_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + b_{00}^2 + c_{00}^2}} = -0.\bar{6} \tag{4.9}$$

und man erhält in Matrixschreibweise folgendes Modell:

$$\mathbf{Au} = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{V}$$

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{w}_2$$

$$\text{mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & -15 & -20 & 1 \\ -1 & -0.5 & -2 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -0.\bar{6} \\ 0 \\ 0 \\ -0.\bar{6} \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

$\mathbf{H} = (0.\bar{6}\ 1.\bar{3}\ \ -1.\bar{3}\ 0)$, $\mathbf{w}_2 = (0)$, $\mathbf{P} = \mathbf{I}$.

Sieht man der Einfachheit halber auch im Modell (4.10) die Bedingungsgleichung als Beobachtungsgleichung mit sehr hohem Gewicht an, so erhält man in Analogie zu (3.14) folgendes Modell:

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{u} = -\bar{\mathbf{w}} + \bar{\mathbf{V}} \quad \text{mit}$$

$$\bar{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -10 & -15 & -20 & 1 \\ -1 & -0.5 & -2 & 1 \\ 1 & 1.5 & 1 & 1 \\ 10 & 15 & 20 & 1 \\ 0.\bar{6} & 1.\bar{3} & -1.\bar{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} -0.\bar{6} \\ 0 \\ 0 \\ -0.\bar{6} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{diag}(\bar{\mathbf{P}}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 106 \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Im Modell (4.10) erhält man folgende L2-Lösung:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \Delta\hat{a} \\ \Delta\hat{b} \\ \Delta\hat{c} \\ \Delta\hat{d} \end{pmatrix} = -(\bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{A}})^{-1}\ \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{w}} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.621696 \\ -0.355661 \\ -0.044813 \\ 0.411045 \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

Für die gesuchten Parameter der ausgleichenden Ebene ergeben sich damit folgende Werte:

$$\hat{a} = a_0 + \Delta\hat{a} = 0.955030,\ \hat{b} = b_0 + \Delta\hat{b} = 0.311006,$$
$$\hat{c} = c_0 + \Delta\hat{c} = -0.711479,\ \hat{d} =$$
$$d_0 + \Delta\hat{d} = -0.255621 \tag{4.12}$$

Die durch (4.12) gegebene Ebene verläuft durch den Schwerpunkt, denn es gilt $\hat{a} \cdot x_s + \hat{b} \cdot y_s + \hat{c} \cdot z_s + \hat{d} = 0.955030 \cdot 0 + 0.311006 \cdot 0.25 - 0.711479 \cdot (-0.25) - 0.255621 = 0$ Die Verbesserungen v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} können auch jetzt in Analogie zu (4.8) bestimmt werden ($\mathbf{V} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{w}$).

$$v_{x_i} = -\frac{V_i \cdot \hat{a}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2} \qquad v_{y_i} = -\frac{V_i \cdot \hat{b}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2}$$

$$v_{z_i} = -\frac{V_i \cdot \hat{c}}{\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2} \tag{4.13}$$

Damit ergeben sich die in Tabelle 4.3 angegebenen Werte.

Tab. 4.3: Verbesserungen der räumlichen Koordinaten mit Methode 3

v_{x_i}	0.152186	– 0.035809	– 0.286468	0.17009
v_{y_i}	0.049559	– 0.011661	– 0.093288	0.05539
v_{z_i}	– 0.113376	0.026677	0.213413	– 0.126714

Die Quadratsumme der Verbesserungen hat damit den Wert $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.224968$.

Dieser Wert ist zwar deutlich geringer als der bei Methode 2 erhaltene, aber trotzdem noch merklich größer als der in (4.4) angegebene Optimalwert.

Auch ein direkter Vergleich der Parameter der mit Methode 1 und 3 erhaltenen ausgeglichenen Ebenen zeigt deutliche Unterschiede. Zwecks direkter Vergleichbarkeit sind im Folgenden sowohl die in (4.3) als auch die in (4.11) angegebenen Werte so normiert, dass $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 = 1$ und $\hat{a} > 0$ gilt:

Tab. 4.4: Schrittweise Annäherung der mit Methode 3 erhaltenen Lösungen an die mit Methode 1 bestimmte Optimallösung

Methode 3 1. Iterationsschritt	$\hat{a} = 0.775906$ $\hat{b} = 0.252674$ $\hat{c} = 0.578036$ $\hat{d} = -0.207677$ $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{[}^2 z_i) = 0.224968$
Methode 3 2. Iterationsschritt	$\hat{a} = 0.906928$ $\hat{b} = -0.047661$ $\hat{c} = -0.41858$ $\hat{d} = -0.09273$ $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.142079$
Methode 3 3. Iterationsschritt	$\hat{a} = 0.922931$ $\hat{b} = -0.136672$ $\hat{c} = -0.359887$ $\hat{d} = -0.055804$ $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.134596$
Methode 3 4. Iterationsschritt	$\hat{a} = 0.925374$ $\hat{b} = -0.159978$ $\hat{c} = -0.343644$ $\hat{d} = -0.045916$ $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.134071$
Methode 1	$\hat{a} = 0.92606$ $\hat{b} = -0.168226$ $\hat{c} = -0.337806$ $\hat{d} = -0.042395$ $\sum_{i=1}^{4}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = 0.134032$

$$\text{Methode 1}: \ \hat{a} = 0.92606, \ \hat{b} = -0.168226,$$
$$\hat{c} = -0.337806, \ \hat{d} = 0.042395$$
$$\text{Methode 3}: \ \hat{a} = 0.775906, \ \hat{b} = 0.252674,$$
$$\hat{c} = -0.578036, \ \hat{d} = -0.207677 \qquad (4.14)$$

Dies zeigt, dass Methode 3 die mit Methode 1 bestimmte Optimallösung mit den benutzten Näherungswerten noch nicht mit ausreichender Genauigkeit in einem einzigen Iterationsschritt reproduzieren kann.
Führt man allerdings weitere Iterationsschritte durch, so wird die Optimallösung schrittweise immer besser angenährt. Für jeden weiteren Iterationsschritt werden hierzu die Berechnungen entsprechend den Formeln (4.9) bis (4.13) durchgeführt, wobei in (4.9) für a_{00}, b_{00}, c_{00} und d_{00} jeweils die im vorangegangenen Iterationsschritt in (4.12) erhaltenen Werte $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ und $\hat{d}$ einzusetzen sind.
Tabelle 4.4 zeigt für die ersten 4 Iterationsschritte die Annäherung an die mit Methode 1 erhaltene Lösung. Auch hierbei wurde in allen Fällen so normiert, dass $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 = 1$ und $\hat{a} > 0$ gilt.
Somit zeigt sich auch für das Beispiel einer ausgleichenden Ebene, dass Methode 3 im Gegensatz zu Methode 2 in der Lage ist, die optimale L2-Lösung auf iterativem Wege zu ermitteln.

5 Begründung dafür, dass zwecks Bestimmung ausgleichender Ebenen beziehungsweise Geraden ein Ausgleichungsansatz mit der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ beziehungsweise $a^2 + b^2 = 1$ vorzuziehen ist

In diesem Abschnitt soll theoretisch begründet werden, warum bei der Bestimmung ausgleichender Ebenen bzw. Geraden unter Benutzung der Beobachtungsgleichungen (2.3) (wobei im Falle einer ausgleichenden Gerade der Summand $c \cdot (z_i + v_{z_i})$ in (2.3) weggelassen werden müsste) gerade die Bedingungsgleichung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ beziehungsweise $a^2 + b^2 = 1$ verwendet werden sollte, um die optimale L2-Lösung zumindest iterativ zu erhalten.
Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf den Fall der ausgleichenden Ebene, weil die Übertragung auf den Fall der ausgleichenden Gerade leicht möglich ist.
Wie bereits im Anschluss an Gleichung (2.3) erläutert wurde, wird eine Bedingung für die Parameter benötigt, die die triviale Lösung $a = b = c = d = 0$ ausschließt.
Neben den beiden in den Berechnungsbeispielen benutzten Bedingungen

$$d = -1 \qquad (5.1)$$

und

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \qquad (5.2)$$

sind theoretisch auch noch viele andere Bedingungen denkbar.
Man muss jedoch berücksichtigen, dass die ursprüngliche Forderung zur Ermittlung einer L2-Lösung lautet:

$$\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = \min! \qquad (5.3)$$

Die Lösung wird jedoch ermittelt durch Übergang zum Modell der quasivermittelnden Beobachtungen mit der Forderung

$$\sum_{i=1}^{n}(P_i \cdot V_i^2) = \min! \qquad (5.4)$$

Wie im Anschluss an Gleichung (3.5) erläutert wurde, kann als Gewichtsmatrix **P** die Einheitsmatrix benutzt werden. Dies wurde bei den Berechnungsbeispielen in den Abschnitten 2 und 3 auch stets getan. Forderung (5.4) geht damit über in

$$\sum_{i=1}^{n} V_i^2 = \min! \tag{5.5}$$

Somit ist es nötig zu verlangen, dass die Forderung (5.5) mit der ursprünglichen Forderung (5.3) gleichwertig ist. Im Folgenden wird gezeigt, dass dies bei Vorliegen hinreichend guter Näherungswerte a_0, b_0, c_0 und d_0 dann der Fall ist, wenn man von der Bedingung (5.2) für die Parameter ausgeht.
Für alle i mit $1 \le i \le n$ betrachten wir die Gleichung

$$a \cdot (x_i + v_{x_i}) + b \cdot (y_i + v_{y_i}) + \\ c \cdot (z_i + v_{z_i}) + d = 0 \tag{5.6}$$

v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} sind hierbei beliebige (nicht notwendigerweise die im Sinne der L2-Methode optimalen) Verbesserungen. Diese 3n Verbesserungen definieren eine Ebene. Die Parameter $a = a_0 + \Delta a$, $b = b_0 + \Delta b$, $c = c_0 + \Delta c$, $d = d_0 + \Delta d$ beschreiben diese Ebene und sind damit die den 3n Verbesserungen v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} zugeordneten Parameter. (a_0, b_0, c_0, d_0 sind beliebig vorgegebene Näherungswerte)
Geht man von Gleichung (5.6) über zu der Gleichung

$$x_i \cdot \Delta a + y_i \cdot \Delta b + z_i \cdot \Delta c + \Delta d = -w_i + V_i$$

$$\text{mit} \quad w_i = a_0 \cdot x_i + b_0 \cdot y_i + c_0 \cdot z_i + d_0 \tag{5.7}$$

so erkennt man, dass der Zusammenhang zwischen v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} einerseits und V_i andererseits für jedes i ausgedrückt wird durch die Beziehung

$$V_i = -a \cdot v_{x_i} - b \cdot v_{y_i} - c \cdot v_{z_i} \tag{5.8}$$

Um umgekehrt v_{x_i}, v_{y_i} und v_{z_i} durch Vi auszudrücken, müssen wir beachten, dass wir uns, wenn wir $\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2)$ minimieren wollen, auf Verbesserungen beschränken können, die die Eigenschaft haben, dass der Vektor $(v_{x_i}\ v_{y_i}\ v_{z_i})^T$ für jedes i senkrecht zur zugeordneten Ebene steht, also parallel zu dem die Normalenrichtung der Ebene definierenden Vektor $(a\ b\ c)^T$ verläuft.
Es gibt also für jedes i mit $1 \le i \le n$ ein $k_i \ne 0$, so dass gilt

$$v_{x_i} = k_i \cdot a, \quad v_{y_i} = k_i \cdot b, \quad v_{z_i} = k_i \cdot c \tag{5.9}$$

Setzt man (5.9) in (5.8) ein, so ergibt sich

$$V_i := -k_i(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow k_i = -\frac{V_i}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Durch Einsetzen des soeben bestimmten Wertes k_i geht (5.9) über in

$$v_{x_i} = -\frac{V_i \cdot a}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad v_{y_i} = -\frac{V_i \cdot b}{a^2 + b^2 + c^2},$$

$$v_{z_i} = -\frac{V_i \cdot c}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{5.10}$$

Anmerkung: Da die Gleichungen in (5.10) auch für die optimalen Parameter $\hat{a}$, $\hat{b}$ und $\hat{c}$ gelten müssen, liefert die Herleitung von (5.10) übrigens eine weitere Begründung für die in den Abschnitten 3 und 4 angewendeten Formeln (3.11) beziehungsweise (4.8).

Mit Hilfe der Beziehungen in (5.10) lässt sich der in (5.3) zu minimierende Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2)$ nun folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2) = \sum_{i=1}^{n} V_i^2 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{V_i^2}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{5.11}$$

An Hand der Gleichung (5.11) ist nun zu erkennen, dass die Forderung in (5.5) dann mit der Forderung in (5.3) gleichwertig ist, wenn der Ausdruck $a^2 + b^2 + c^2$ konstant ist. Dies kann dadurch erreicht werden, dass man die Ebenenparameter a, b, c, d, die bei gegebenen v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i} in Gleichung (5.6) und damit in Gleichung (5.11) berücksichtigt werden müssen, durch die in das Ausgleichungsmodell einzubringende Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = k$ (mit $k > 0$) auf solche einschränkt, die diese Forderung erfüllen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dabei $k = 1$ gesetzt werden, so dass man zur Bedingung (5.2) gelangt.
Aus diesen Betrachtungen ergibt sich also, dass die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2$ die Gleichwertigkeit der Optimalitätsforderungen (5.3) und (5.5) und damit die Gleichheit der entsprechenden Lösungen gewährleistet.
Da Forderung (5.3) die sogenannte orthogonale Regression beinhaltet (Minimierung der Summe der Quadrate der orthogonalen Abstände zur ausgleichenden Ebene beziehungsweise Gerade) kann man auch sagen:
Die Bedingung $a^2 + + b^2 + c^2 = 1$ gewährleistet, dass die im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen erhaltene L2-Lösung die Forderung der orthogonalen Regression erfüllt.
Streng gilt dies jedoch nur, wenn vorausgesetzt wird, dass die Beziehung $\hat{a}^2 + \hat{b}^2 + \hat{c}^2 = 1$ von den im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen ermittelten Lösungsparametern $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ exakt erfüllt wird. Nur dann darf man sich bei der Betrachtung der Gleichung (5.11) tatsächlich auf solche Parameter a, b, c beschränken, für die $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ gilt.
Da die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ bei der praktischen Durchführung der Rechnung jedoch linearisiert wird, kann man im Allgemeinen auch nur von einer ungefähren Übereinstimmung der im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen erhaltenen Lösung mit der Lösung der orthogonalen Regression sprechen, wobei die Übereinstimmung um so besser ist, je besser die verwendeten Näherungswerte sind.
Zum Abschluss soll noch kurz auf eine etwas andere Begründung der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ eingegangen werden, die aber mit der bis jetzt betrachteten in einem engen Zusammenhang steht.. Da der in (5.3) zu minimierende Ausdruck $\sum_{i=1}^{n}(v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 + v_{z_i}^2)$ sich bei Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems nicht ändert, ist auch die strenge Lösung des Minimierungsproblems (5.3) nicht von Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems abhängig. Damit diese wünschenswerte

Eigenschaft auch nach der Einführung einer Bedingungsgleichung für die Parameter a, b, c und d erhalten bleibt, ist es nötig, diese Bedingungsgleichung so zu wählen, dass sie keine Abhängigkeit der Lösung vom Koordinatensystem bewirkt.

Aus Gleichung (5.8) geht hervor, dass sich der Betrag der Rechnungsverbesserung V_i im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen als Betrag des Skalarproduktes zwischen dem Vektor $(v_{x_i}\ v_{y_i}\ v_{z_i})^T$ und dem Parametervektor $(a\ b\ c)^T$ ergibt, wobei die Länge des Letzteren noch von der Bedingungsgleichung abhängt, selbst wenn die durch die Parameter definierte Ebene bereits als fixiert angesehen wird.

Gemäß den Beziehungen (5.9) und den vorangegangenen Erläuterungen kann man sich auf den Fall beschränken, dass der Vektor $(v_{x_i}\ v_{y_i}\ v_{z_i})^T$ dieselbe Richtung hat wie der Vektor $(a\ b\ c)^T$. Dies wiederum bedeutet, dass sich der Betrag der Verbesserung V_i als Produkt der Längen dieser beiden Vektoren ergibt.

Die Länge des Vektors $(v_{x_i}\ v_{y_i}\ v_{z_i})^T$ ändert sich bekanntlich bei Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems nicht. Damit auch die Rechnungsverbesserungen V_i und damit das Minimum ihrer Quadratsumme – also die Lösung des Ausgleichungsproblems – nicht von solchen Koordinatentransformationen abhängen, ist es somit nötig die Bedingung für die Parameter a, b, c und d so zu wählen, dass auch die Länge des Vektors $(a\ b\ c)^T$ immer konstant bleibt. Da das Quadrat dieser Länge durch den Ausdruck $a^2 + b^2 + c^2$ gegeben ist, wird dies gerade durch die Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ erreicht. Darüber hinaus wird durch diese Bedingung erreicht, dass die Rechnungsverbesserung V_i gerade mit dem orthogonalen Abstand des Punktes i von der betrachteten Ebene übereinstimmt.

Die eben genannte Begründung rechtfertigt die Bevorzugung der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ beziehungsweise $a^2 + b^2 = 1$ auch bei Vorgabe einer anderen Zielfunktion als der in (5.3), sofern diese ebenfalls nicht von Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems abhängt. Dies trifft beispielsweise für alle Zielfunktionen zu, die sich ebenfalls als Funktion der orthogonalen Abstände der gegebenen Punkte zur ausgleichenden Ebene beziehungsweise Gerade darstellen lassen.

Wählt man beispielsweise als Zielfunktion die Minimierung der Summe der orthogonalen Abstände zur ausgleichenden Gerade bzw. Ebene, so kann man in der Weise vorgehen, dass das Modell der quasivermittelnden Beobachtungen entsprechend (3.13) bzw. (4.10) aufgestellt, die Bedingungsgleichung eliminiert und im erhaltenen Modell die übliche L1-Norm-Methode angewendet wird. Aus den hierbei erhaltenen Rechnungsverbesserungen Vi können dann durch Anwendung der Formeln (3.11) bzw. (4.8) die Koordinatenverbesserungen berechnet werden. Die erhaltene Lösung kann anschließend, wie auch bei dem L2-Beispiel in Abschnitt 4 geschehen, iterativ verbessert werden. Wählt man als Zielfunktion die Minimierung des maximalen orthogonalen Abstandes zur ausgleichenden Gerade bzw. Ebene, so unterscheidet sich die Vorgehensweise nur dadurch, dass im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen nach Elimination der Bedingungsgleichung die Minimax-Methode angewendet wird.

Würde man dagegen die L1- bzw. die Minimax-Zielfunktion in der Form wählen, dass die Summe der Beträge der Koordinatenverbesserungen bzw. deren Maximalbetrag minimiert wird, so könnte man auch bei Verwendung der Bedingung $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ beziehungsweise $a^2 + b^2 = 1$ keine Unabhängigkeit der erhaltenen Lösung von Koordinatentransformationen erreichen.

6 Einige Betrachtungen zur Übertragung der bisherigen Aussagen auf das Problem der Bestimmung ausgleichender Flächen und Kurven zweiter Ordnung

Zwecks Bestimmung ausgleichender Quadriken, das heißt, ausgleichender Flächen und Kurven zweiter Ordnung, geht man, wie in [3] erläutert, von den folgenden, im Vergleich zu (2.3) wesentlich erweiterten Ausgleichungsformulierungen aus:

Flächen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &c_{11}(x_i + v_{x_i})^2 + c_{22}(y_i + v_{y_i})^2 + c_{33} \cdot (z_i + v_{z_i})^2 + \\ &2c_{12}(x_i + v_{x_i})(y_i + v_{y_i}) + 2c_{13}(x_i + v_{x_i})(z_i + v_{z_i}) + \\ &2c_{23}(y_i + v_{y_i})(z_i + v_{z_i}) + \\ &2c_{10}(x_i + v_{x_i}) + 2c_{20}(y_i + v_{y_i}) + \\ &2c_{30}(z_i + v_{zy_i}) + c_{00} = 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Kurven zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} &c_{11}(x_i + v_{x_i})^2 + c_{22}(y_i + v_{y_i})^2 + 2c_{12}(x_i + v_{x_i})(y_i + v_{y_i}) + \\ &2c_{10}(x_i + v_{x_i}) + 2c_{20}(y_i + v_{y_i}) + c_{00} = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Die folgenden Erläuterungen beschränken sich wiederum auf den dreidimensionalen Fall, also auf die Formeln (6.1), da die Übertragung auf den zweidimensionalen Fall, also auf ausgleichende Kurven zweiter Ordnung, keine Schwierigkeiten bereitet.

Die Gleichungen (6.1) lassen sich folgendermaßen in Matrixschreibweise formulieren:

$$(\mathbf{p}_i^T + \mathbf{v}_i^T)\mathbf{M}(\mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i) + 2\mathbf{m}^T(\mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i) + c_{00} = 0$$

$$\text{mit } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{12} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ c_{30} \end{pmatrix}, \ \mathbf{p}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} v_{x_i} \\ v_{y_i} \\ v_{z_i} \end{pmatrix} : \tag{6.3}$$

Geht man nach der in den vorangegangenen Abschnitten für ausgleichende Ebenen (also Flächen erster Ordnung) erläuterten Methode vor, so ergeben sich die Rechnungsverbesserungen Vi im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen in Analogie zu dem Übergang von Gleichung (5.6) zu Gleichung (5.7) dadurch, dass auf der linken Seite von Gleichung (6.1) beziehungsweise (6.3) alle

Summanden, die mindestens eine der Variablen v_{x_i}, v_{y_i} oder v_{z_i} enthalten, zu $-V_i$ zusammengefasst werden:

$$
\begin{aligned}
V_i = {} & \\
& -c_{11}v_{x_i}^2 - c_{22}v_{y_i}^2 - c_{33}v_{z_i}^2 - 2c_{12}v_{x_i}v_{y_i} - 2c_{13}v_{x_i}v_{z_i} \\
& -2c_{23}v_{y_i}v_{z_i} - 2c_{11}x_iv_{x_i} - 2c_{22}y_iv_{y_i} - 2c_{33}z_iv_{z_i} \\
& -2c_{12}x_iv_{y_i} - 2c_{12}y_iv_{x_i} - 2c_{13}x_iv_{z_i} - 2c_{13}z_iv_{y_i} \\
& -2c_{23}y_iv_{z_i} - 2c_{23}z_iv_{y_i} - 2c_{10}v_{x_i} - 2c_{20}v_{y_i} - 2c_{30}v_{z_i}
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

Bei Benutzung der Bezeichnungen in (6.3) schreibt sich Gleichung (6.4) folgendermaßen:

$$V_i = -\mathbf{v}_i^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{p}_i^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i - 2\mathbf{m}^T\mathbf{v}_i \tag{6.5}$$

Wie in Gleichung (5.8) sind auch die Vektoren $\mathbf{v}_i$ in Gleichung (6.5) als beliebige Verbesserungsvektoren aufzufassen (also nicht notwendigerweise die im Sinne der L2-Methode optimalen), die in diesem Fall den Punkt $\mathbf{p}_i$ in einen Punkt $\hat{\mathbf{p}}_i$ überführen ($\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i$), der auf einer durch die Parameter $\mathbf{M}$, $\mathbf{m}$ und c_{00} beschriebenen Quadrik liegt.
Im Gegensatz zu der Beziehung (5.8), die im Falle einer ausgleichenden Ebene exakt gültig ist, gelten (6.4) und (6.5) jedoch nur näherungsweise, da die durch die Linearisierung der Beziehungen (6.1) entstehenden Fehler (Zerlegung der Parameter in Näherungswerte plus Zuschläge und Weglassen aller Glieder, in denen die Parameterzuschläge mit dem Produkt zweier Koordinaten multipliziert werden) bei der Herleitung von (6.4) beziehungsweise (6.5) nicht berücksichtigt wurden. Für eine näherungsweise Gültigkeit der folgenden Betrachtungen muss somit das Vorliegen hinreichend guter Näherungswerte der Flächenparameter vorausgesetzt werden.
Beim Ausgleichungsansatz (6.1) wird nun ebenfalls eine Bedingung für die Parameter benötigt, die die Lösung $c_{11} = c_{22} = c_{33} = c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{10} = c_{20} = c_{30} = c_{00} = 0$ ausschließt. In [3] wurde die Bedingung $c_{00} = -1$ verwendet. Die Betrachtungen in den vorangegangenen Abschnitten lassen jedoch vermuten, dass auch jetzt eine andere Bedingung vorzuziehen ist, insbesondere um die Unveränderlichkeit der Verbesserungen V_i bei Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems zu gewährleisten.
In [1] wird mit einer ähnlichen Begründung folgende Bedingung vorgeschlagen:

$$c_{11}^2 + c_{22}^2 + c_{33}^2 + 2c_{12}^2 + 2c_{13}^2 + 2c_{23}^2 = 1 \tag{6.6}$$

Mit den Bezeichnungen in (6.3) lässt sich diese Bedingung auch folgendermaßen formulieren:

„Die Summe der Quadrate aller Elemente der Matrix $\mathbf{M}$ soll 1 betragen.“ (6.7)

Im Folgenden wird begründet, dass sich unter dieser Bedingung bei Vernachlässigung der durch die Linearisierung entstehenden Fehler (also bei Annahme der exakten Gültigkeit von Gleichung (6.5)) tatsächlich die Unabhängigkeit der Rechnungsverbesserungen V_i von Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems zeigen lässt.
Wir betrachten dazu eine beliebige, nur aus Verschiebungen und Drehungen zusammengesetzte Koordinatentransformation T. Diese lässt sich beschreiben durch die Gleichung

$$T(\mathbf{p}) = \mathbf{C}^T\mathbf{p} + \Delta \tag{6.8}$$

Gleichung (6.8) bedeutet, dass der beliebige Punkt $\mathbf{p} = (x\ y\ z)^T$ überführt wird in den Punkt $\mathbf{C}^T\mathbf{p} + \Delta$, wobei Δ ein Verschiebungsvektor ist und $\mathbf{C}$ eine Drehmatrix, das heißt, eine Orthogonalmatrix mit der Eigenschaft $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{c}^T\mathbf{C} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$: Einheitsmatrix).
Die Anwendung von T auf den Verbesserungsvektor $\mathbf{v}_i = \hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i$ ergibt

$$
\begin{aligned}
& T(\mathbf{v}_i) = T(\hat{\mathbf{p}}_i) - T(\mathbf{p}_i) = \mathbf{C}^T\hat{\mathbf{p}}_i + \Delta - \mathbf{c}^T\mathbf{p}_i - \Delta = \\
& \mathbf{C}^T(\hat{\mathbf{p}}_i - \mathbf{p}_i) = \mathbf{C}^T\mathbf{v}_i
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Die durch Gleichung (6.3) gegebene Quadrik wird durch die Koordinatentransformation T in eine Fläche mit der Gleichung

$$
\begin{aligned}
& T(\mathbf{p}_i^T + \mathbf{v}_i^T) \cdot \tilde{\mathbf{M}} \cdot T(\mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i) + \\
& 2\tilde{\mathbf{m}}^T \cdot T(\mathbf{p}_i + \mathbf{v}_i) + \tilde{c}_{00} = 0
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

überführt, wobei $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{m}}$ und $\tilde{c}_{00}$ geeignet zu bestimmen sind.
Es soll nun gezeigt werden, dass der Wert V_i in Gleichung (6.5) bei der Transformation T dann unverändert bleibt, wenn gilt:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C} \tag{6.11}$$

$$\tilde{\mathbf{m}} = -\mathbf{C}^T\mathbf{M}\mathbf{C}\Delta + \mathbf{C}^T\mathbf{m} \tag{6.12}$$

Wir transformieren dazu die Variablen auf der rechten Seite von Gleichung (6.5) unter Benutzung der Beziehungen (6.8), (6.9), (6.11), (6.12) und erhalten bei Beachtung von $\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{I}$:

$$
\begin{aligned}
& -(T(\mathbf{v}_i))^T \cdot \tilde{\mathbf{M}} \cdot (T(\mathbf{v}_i)) - \\
& 2(T(\mathbf{p}_i))^T \cdot \tilde{\mathbf{M}} \cdot (T(\mathbf{v}_i))\mathbf{v} - 2\tilde{\mathbf{m}}^T \cdot (T(\mathbf{v}_i)) \\
& = -\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{v}_i - \\
& 2 \cdot \mathbf{p}_i^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{v}_i - \\
& 2 \cdot \Delta^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{v}_i \\
& +2 \cdot \Delta^T \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{v}_i - \\
& 2 \cdot \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{v}_i
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

$$= -\mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i - 2 \cdot \mathbf{p}_i^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_i - 2 \cdot \mathbf{m}^T \cdot \mathbf{v}_i = V_i$$

Bei der Überführung von $\mathbf{M}$ in $\tilde{\mathbf{M}}$ gemäß Gleichung (6.11) ändert sich die Summe der Quadrate der Matrixelemente nicht, da $\mathbf{C}^T$ und $\mathbf{C}$ orthogonale Matrizen sind. (Linksmultiplikation einer Matrix mit einer Orthogonalmatrix lässt die euklidische Norm jedes Spaltenvektors und damit die Summe der Quadrate seiner Elemente unverändert; bei Rechtsmultiplikation gilt das Gleiche für die Zeilenvektoren.)

Somit ermöglicht gerade die Bedingung (6.6) beziehungsweise (6.7), dass sich bei Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems die Matrix **M** in Übereinstimmung mit Gleichung (6.11) ändern kann. Da diese Bedingungen keine Einschränkungen für die Elemente von **m** sowie für c_{00} enthalten, kann sich darüber hinaus der Vektor **m** stets gemäß Gleichung (6.12) zu $\tilde{\mathbf{m}}$ transformieren. Zusammenfassend lässt sich also in Analogie zu den Betrachtungen in Abschnitt 5 sagen, dass bei Verwendung der Bedingung (6.6) beziehungsweise (6.7) und bei Vorliegen hinreichend guter Näherungswerte die Rechnungsverbesserungen V_i im Modell der quasivermittelnden Beobachtungen und damit die Lösung des Ausgleichungsproblems nicht von Verschiebungen und Drehungen des Koordinatensystems abhängen.

Eine analoge Aussage gilt für die Bestimmung ausgleichenden Kurven zweiter Ordnung gemäß Modellformulierung (6.2), falls statt (6.6) die Bedingung

$$c_{11}^2 + c^2 2_{22} + 2c_{12}^2 = 1 \qquad (6.14)$$

verwendet wird.

Die praktische Berücksichtigung der Bedingungen (6.6) und (6.14) geschieht in Analogie zu der in den Abschnitten 3 und 4 angewandten Vorgehensweise: Das Modell der quasivermittelnden Beobachtungen wird, wie in [3] demonstriert, aufgestellt und um die linearisierte Bedingungsgleichung (6.6) bzw. (6.14) ergänzt, die in ihrem Aufbau der Gleichung (2.11) entspricht.

Auch die Aussagen am Ende von Abschnitt 5 über die Vorgehensweise beim Vorliegen von L1- und Minimax-Zielfunktionen (Minimierung der Summe der Beträge der Rechnungsverbesserungen V_i bzw. Minimierung der betragsmäßig maximalen Rechnungsverbesserung V_i) lassen sich auf das Problem der Bestimmung ausgleichender Quadriken übertragen.

Allerdings entsprechen die genannten Zielfunktionen für die Rechnungsverbesserungen jetzt im Gegensatz zur Bestimmung ausgleichender Geraden und Ebenen nicht mehr exakt den entsprechenden Zielfunktionen für die orthogonalen Abstände zu den ausgleichenden Kurven bzw. Flächen. Die Übereinstimmung wird aber umso günstiger sein, je kleiner der durch die Linearisierung entstandene Fehler ist, das heißt, je kleiner die tatsächlichen Fehler der beobachteten Punkte im Verhältnis zu den räumlichen Entfernungen sind, in denen sich die Krümmung der ausgleichenden Kurve bzw. Fläche deutlich bemerkbar macht.

Literatur

[1] Drixler, E.: Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Heft Nr. 409, 1993.

[2] Grafarend, E. W., Schaffrin, B.: Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1993.

[3] Kampmann, G., Renner, B: Über die Bestimmung von Flächen höherer Ordnung. In: Der Vermessungsingenieur, Heft 5/98, S. 249.

[4] Wolf, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn, 1968.

Anschrift der Verfasser:
Prof. Dr.-Ing. Georg Kampmann
Dipl.-Math. Bernd Renner
Hochschule Anhalt (FH)
Fachbereich Vermessungswesen
Postfach 2215
D-06818 Dessau

Abstract

Different approximations for straight line fit and simple planes up to quadrics are investigated and compared to each other from numerical examples. Orthogonal regression within Gauß-Markov Models is extended from simple least squares to other target functions.

BUCHBESPRECHUNG

Fritsch (Ed.), Photogrammetric Week ’03

Photogrammetric Week ’03. Edited by Dieter Fritsch. 2003. XI, 292 pages. Softcover. € 60,– sFr 97,–, ISBN 3-87907-397-X. Herbert Wichmann, Hüthig Fachverlage, Heidelberg (www.hf uethig.de)

Zum 49. Mal fand in Stuttgart die englischsprachige *Photogrammetric Week* statt und gab Spezialisten aus verschiedenen Ländern Gelegenheit, sich über aktuelle Erkenntnisse und Entwicklungen auszutauschen. Experten aus Deutschland, Frankreich, Österreich, Australien, Arabien, Kanada, der Schweiz und den USA referierten über wichtige Themen aus den Gebieten *analogue versus digital image data collection, Distributed photogrammetric data analysis* und *3D Visualisation and animation*. Ihre Vorträge finden sich gesammelt in dem Band *Photogrammetric Week ’03*, der mit bewährter Kompetenz von Dr.-Ing. Dieter Fritsch herausgegeben wurde. Das Buch informiert Wissenschaftler und Praktiker über den aktuellen Stand von Technik und Methoden der Photogrammetrie und ist daher nicht nur für Teilnehmer der Tagung von großem Interesse, sondern auch und besonders für Fachleute, die keine Gelegenheit hatten, sie zu besuchen.