



Zur korrekten Linearisierung von nichtlinearen GH-Modellen

Stephan Kupferer

In jüngster Vergangenheit wurde die Frage diskutiert, an welcher Stelle eine Linearisierung vorzunehmen ist, wenn ein nichtlineares GH-Modell vorliegt. Im Fall der Beobachtungen gehen die Meinungen auseinander, ob an der Stelle der ursprünglichen oder der verbesserten Beobachtungen zu linearisieren ist. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit dieser Thematik und weist auf Probleme hin, die bei der Verwendung der verbesserten Beobachtungen entstehen können.

1 Einleitung

Jede Auswertung eines Gauß-Helmert-Modells beginnt mit einer Linearisierung der Modellbildung, um anschließend auf iterativem Wege die Parameter des eigentlich nichtlinearen Ansatzes zu berechnen. Die Linearisierung erfolgt durch eine Reihenentwicklung nach Taylor, wobei die quadratischen und alle nachfolgenden Glieder vernachlässigt werden.

Im Zuge der Reihenentwicklung muss man sich entscheiden, an welcher Stelle differenziert werden soll, also welche Werte die beteiligten Variablen bei der Ableitung annehmen. Damit der bei der Linearisierung unvermeidliche Modellverlust klein ist, sollten die Variablen nahe an ihren wahren Werte liegen.

Bei Variablen für Beobachtungen kann man prinzipiell unterschiedliche Wege gehen. DIN 18709 und gängige Literatur zur Ausgleichung legen nahe, in jedem Iterationsschritt an der Stelle der ursprünglichen Beobachtungen zu linearisieren.

Eine andere Möglichkeit ist die Linearisierung an der Stelle der nach jedem Iterationsschritt verbesserten Beobachtungen. Diese Vorgehensweise wird dadurch begründet, dass die verbesserten Beobachtungen $\hat{l} = l + v$ den wahren Werten eher entsprechen dürften als die ursprünglichen und deshalb eine Linearisierung besser an dieser verbesserten Stelle erfolgen sollte.

Lenzmann und Lenzmann gehen in [3] auf diese Frage ein und kommen zu dem Schluss, dass eine Linearisierung an der Stelle der verbesserten Beobachtungen grundsätzlich vorzuziehen ist und die Standardliteratur dementsprechend zu aktualisieren ist.

Der vorliegende Beitrag greift diese Frage auf und skizziert, welche Probleme durch diese Vorgehensweise entstehen.

2 Berechnung des GH-Modells

2.1 Standardverfahren

Ein Gauß-Helmert-Modell wird immer dann angesetzt, wenn die Beobachtungen und die Unbekannten in der Formulierung des mathematischen Zusammenhangs nicht grundsätzlich in getrennten Summanden vorzufinden sind.

$$F(x, l) = 0 \quad (2.1)$$

Die zur Berechnung notwendige Linearisierung nach Taylor führt zu dem bekannten Ansatz:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\hat{x}, l} d\hat{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_{\hat{x}, l} v + F(l, \hat{x}) = 0$$

$$\text{bzw. } A \cdot d\hat{x} + B \cdot v + w = 0 \quad (2.2)$$

$$C_{ll} = \sigma_0^2 Q_{ll} = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (2.3)$$

Die Menge der Unbekannten x enthält die Parameter des Modells. Unter l versteht man die Menge der Beobachtungen, die in die Ausgleichung eingehen. Der Vektor v beschreibt die Modifikationen der Beobachtungen, die anzu bringen sind, um das Gleichungssystem konsistent zu machen. Die Designmatrix A entsteht durch die Ableitung des funktionellen Zusammenhangs nach den Parametern x , die Matrix der Bedingungsgleichungen B aus den Ableitungen nach den Beobachtungen l . Der Vektor w folgt aus dem Funktionswert F an der Stelle der geschätzten Unbekannten und der ursprünglichen Beobachtungen, er wird im Allgemeinen als Vektor der Widersprüche bezeichnet. Die Matrix C_{ll} enthält die Varianzen und Kovarianzen der Beobachtungen.

Die Gleichung (2.2) wird üblicherweise als mathematisches Modell bezeichnet, Gleichung (2.3) als stochastisches Modell.

Die Forderung nach minimaler gewichteter Quadratsumme der Verbesserungen ($v^T P v$) unter der Nebenbedingung (2.2) ergibt das lineare Gleichungssystem $N \cdot z = n$, wobei die einzelnen Matrizen die Gestalt

$$\begin{bmatrix} BC_{ll}B^T & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ d\hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

annehmen (Der Vektor k_1 enthält die Korrelaten aus der Lagrange-Gleichung). Der Fall zusätzlicher Restriktionen bezüglich der Unbekannten ergibt für das vorliegende Thema keine neuen Gesichtspunkte und wird deshalb nicht weiter verfolgt.

Die gesuchten Zuschläge zu den Näherungswerten der Unbekannten erhält man nach der Inversion der Normalgleichungsmatrix aus dem entsprechenden Teil des Vektors z .

$$z = N^{-1}n \quad (2.5)$$

Da es sich um nichtlineare Ausgangsmodelle handelt, muss üblicherweise mehrfach iteriert werden, bis die Zuschläge verschwindend gering werden und damit das lokale Minimum der Funktion $v^T P v$ unter der Nebenbedingung (2.2) gefunden wurde.

2.2 Alternative

Möchte man einen Nutzen daraus ziehen, dass bei jeder Iteration bereits verbesserte Werte für die Beobachtungen vorliegen, dann bietet sich eine Linearisierung des funktionalen Zusammenhanges an der Stelle $(\hat{x}, \hat{l} = l + v)$ statt an $(\hat{x}, l)$ an. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\hat{x}, \hat{l}} d\hat{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_{\hat{x}, \hat{l}} dv + F(\hat{l}, \hat{x}) = 0$$

$$bzw. \quad A \cdot d\hat{x} + B \cdot dv + w = 0 \quad (2.6)(2.1)$$

das sich von Gleichungssystem (2.2) aus dem Standardverfahren insofern unterscheidet, als nun nicht mehr in jedem Iterationsschritt der volle Verbesserungsvektor v , sondern ein Zuschlag zu der jeweils letzten Schätzung von v ermittelt wird. Als erste Näherung für die Verbesserungen kann der Wert 0 verwendet werden.

Die Berechnung erfolgt ansonsten analog zum Standardverfahren.

2.3 Problem

Testet man die Linearisierung an der Stelle der verbesserten Beobachtungen mit Problemen aus der Formanalyse, so stellt man fest, dass die endgültigen Parameterschätzungen und die Verbesserungsquadratsumme von der Qualität der ersten Näherung der Parameter und der Genauigkeit der Beobachtungen abhängen. Je schlechter die Beobachtungen, also hier die gemessenen Objektpunkte zu dem zu schätzenden Objekt passen und je weniger die erste Näherung der Form zur eigentlichen Sollform passt, desto stärker sind die Abweichungen.

Bei näherer Betrachtung ist das auch nicht verwunderlich. Man betrachte der Einfachheit halber den Fall, dass die Beobachtungen genügend genau sind, die Modellierung der Form richtig ist, aber die erste Näherung der Form weit weg von der besten Lage bezüglich der gemessenen Punkte liegt. In der ersten Iteration werden sowohl Verbesserungen für die Parameter, als auch Verbesserungen für die Punkte geschätzt. Bildlich gesprochen werden die Punktwolke und die aktuelle Schätzung der Form aufeinander zu bewegt. Aus der Sicht der Beobachtungen be-

deutet das allerdings, dass der Vektor $v_{(1)}$ nun näher an der *im Moment* geschätzten Form liegt, deren Lage sich aber im Verlaufe der Iterationen noch deutlich ändern wird. Linearisiert man nun im Verlaufe der zweiten Iteration an der Stelle $\hat{l} = l + v_{(1)}$, so führt man effektiv neue Beobachtungen und damit auch ein neues Ziel für die zu schätzende Form ein. Man erzeugt im Prinzip in jedem Berechnungsschritt eine neue Situation. Das iterative Verfahren kann und wird durchaus konvergieren, allerdings muss der Fixpunkt der Iteration nicht exakt der bestmöglichen Form bezüglich der ursprünglich gemessenen Punkte entsprechen.

Als Vektorzug dargestellt werden Zuschläge zu den Verbesserungen eine Raumkurve beschreiben. Die resultierende Gesamtverbesserung muss nicht zwingend senkrecht auf der Fläche stehen, die aus der letzten Iteration vor dem Abbruch der Schleife hervorgeht.

Besonders deutlich tritt dieser Effekt im Übrigen beim Testen von einzelnen Punkten bei der Formanalyse zu Tage. Verwendet man hier den Ansatz nach (2.6), so wird man feststellen, dass der geschätzte Fehlervektor schief zur Form liegt, was schon rein anschaulich keinen Sinn macht.

Beim Standardverfahren wird der komplette Verbesserungsvektor bei jeder Iteration neu geschätzt und wandert sozusagen mit, wenn sich die Form durch die Verbesserung der Parameter ändert.

Das Beobachtungsmaterial und damit die Messung wird bis zum Schluss unverändert beibehalten. Deshalb ist hier die endgültige Schätzung der Parameter unabhängig von der ersten Näherung für die Parameter.

3 Zusammenfassung

Zunächst erscheint es logisch, immer an der Stelle der verbesserten Beobachtungen zu linearisieren. Schließlich ist die Linearisierung nach Taylor möglichst nahe an den wahren Werten der Variablen vorzunehmen, damit das linearisierte Modell das ursprüngliche in diesem Bereich bestmöglich annähern kann und es ist zu erwarten, dass die verbesserten Beobachtungen näher am wahren Wert liegen als die ursprünglichen.

Allerdings verändert man dann auch bei jeder Iteration die Situation der Messung, weil im Grunde jedes Mal andere Beobachtungen eingeführt werden. Die ursprünglichen Beobachtungen spielen bereits nach der ersten Iteration keine Rolle mehr. Das bedeutet, dass aufgrund des Zusammenspiels von iterativer Berechnung und veränderlicher Stelle der Linearisierung die berechneten Parameter nicht den optimalen Parametern bezogen auf die ursprüngliche Messung entsprechen müssen.

Das Standardverfahren kennt dieses Problem nicht, weil durch die immer gleiche Linearisierung an der Stelle der ursprünglichen Beobachtungen die Situation in jeder Iteration dieselbe bleibt. Das Ergebnis der Parameterschätzung ist unabhängig von der ersten Näherung für die Parameter.

Es erscheint deshalb ratsam, einer generellen Ablösung des Standardverfahrens, wie in [3] vorgeschlagen wurde, skeptisch gegenüber zu stehen.

4 Literaturverzeichnis

- [1] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A.: Taschenbuch der Mathematik / Grosche, G.; Ziegler, V. 25. durchgesehene Auflage. Frankfurt: Verlag Harry Deutsch, 1991.
- [2] CASPARY, W., WICHMANN, K.: Lineare Modelle. R. Oldenburg Verlag München Wien, 1994. – ISBN 3 486 22910 9.
- [3] LENZMANN, L., LENZMANN, E.: Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells. AVN 2/2004.

Anschrift des Verfassers:
Dipl.-Ing. STEPHAN KUPFERER,
Wissenschaftlicher Mitarbeiter,
Geodätisches Institut,
Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe,
Tel.: 07 21 / 6 08 23 07,
E-mail: kupferer@gik.uni-karlsruhe.de

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit der Frage nach der korrekten Linearisierung von nichtlinearen Gauß-Helmert-Modellen und beschreibt, welche Seiteneffekte bei der Linearisierung an der Stelle der verbesserten Beobachtungen auftreten können.

Abstract

This article deals with the correct usage of the Taylor-theorem in solving nonlinear Gauß-Helmert-Models. The question is if the set of corrected observations or the original ones should be used to linearise the present functional model.