

Modellselektion mittels Akaike- Informationskriterium – Anwendung in der Kongruenzanalyse

Model Selection via Akaike Information Criterion – Application in Congruence Analysis

Michael Lösler, Rüdiger Lehmann, Cornelia Eschelbach

Hypothesentests zählen in der angewandten Ingenieurgeodäsie zu den Standardwerkzeugen, um Parameter auf Signifikanz zu prüfen, Ausreißer im Beobachtungsmaterial zu finden oder Punktveränderungen im Rahmen einer Deformationsanalyse aufzudecken. Ziel des Hypothesentests ist es, statistisch begründete Entscheidungen zu treffen und sowohl direkt als auch indirekt das Ausgleichsmodell zu optimieren, z.B. durch Hinzufügen von Modellparametern oder durch Streichen von fehlerhaften Beobachtungen. Dieses Abwägen zwischen Modellkandidaten wird in der Statistik als Modellselektion bezeichnet, wobei das Modell zu wählen ist, welches den Messprozess optimal beschreibt und gleichzeitig eine adäquate Anzahl von Modellparametern enthält. Das Akaike-Informationskriterium (AIC) ist eines der ältesten und bekanntesten Verfahren aus der Informationstheorie, um Modellkandidaten auf der Basis der Kullback-Leibler-Divergenz untereinander zu bewerten. Dieser Beitrag gibt eine kurze Einführung in das AIC und diskutiert dessen Einsatzmöglichkeiten in der Kongruenzanalyse anhand von zwei Fallbeispielen.

Schlüsselwörter: Informationskriterium, Modellselektion, AIC, Kongruenzanalyse, Ausgleichsrechnung

In applied engineering geodesy, hypothesis testing is one of the standard tools to evaluate estimated least-squares parameters, to detect outliers in observations, or to prove the stability of points in the framework of deformation analysis. Based on the decision of the hypothesis test, the least-squares model is optimized directly or indirectly, e.g. by adding additional parameters or by removing incorrect observations. In statistics, this approach is known as model selection, and its goal is to find a suitable model, which is indicated by an adequate number of parameters and high rate of goodness-of-fit at the same time. Based on information theory, one well-known method for model selection is the Akaike information criterion (AIC). The AIC evaluates model candidates via Kullback-Leibler divergence. This investigation gives a short introduction to AIC and focuses on the usage of AIC technique in congruence analysis by means of two case studies.

Keywords: Information theory, model selection, AIC, congruence analysis, least-squares adjustment

1 AKAIKE-INFORMATIONSKRITERIUM

Das Optimieren von Modellen ist eng verknüpft mit der Parameterschätzung und der Ausgleichsrechnung. Ein optimiertes Modell soll dabei die Realität bestmöglich abbilden, aber gleichzeitig nur eine minimale Anzahl von Modellparametern besitzen. Ausgehend

von einem wahren Modell f beschreibt die Kullback-Leibler-Divergenz die Information $I(f, g)$, die verloren geht, wenn das wahre Modell f durch eine Approximation g beschrieben wird (Kullback & Leibler 1951/, /Lehmann 1994/, /Claeskens & Hjort 2008, S. 24/:

$$I(f, g) = \int f(I) \log \left(\frac{f(I)}{g(I; \theta)} \right) dI, \quad (1)$$

worin I der Datenvektor und θ der Vektor der Modellparameter sind, der neben den Modellkoeffizienten \mathbf{x} ggf. auch den unbekannt globalen Varianzfaktor σ_0^2 oder weitere Varianz- und Kovarianzfaktoren enthält.

Die Information $I(f, g)$ wird häufig als Diskrepanz zwischen dem wahren Modell und dessen Approximation interpretiert. $I(f, g) = 0$ entspricht somit $f = g$. Das Lösen von Gl. (1) wird durch Minimierung von

$$\min_{g(I; \theta)} I(f, g) \quad (2)$$

erreicht.

Die Kullback-Leibler-Divergenz $I(f, g)$ lässt sich i. d. R. jedoch nicht berechnen, da das wahre Modell f nicht bekannt ist. Akaike entdeckte 1973 jedoch eine Beziehung zwischen der Kullback-Leibler-Divergenz und der Maximum-Likelihood-Methode und leitete aus dieser eine Schätzung von Gl. (2) und somit eine Methodik zur Modellbewertung ab /Akaike 1974/, /deLeeuw 1992/.

$$AIC = -2 \log \mathcal{L}(\theta; I) + 2K. \quad (3)$$

Hierin beschreiben θ und I den Parameter- und Beobachtungsvektor, welche die Likelihood-Funktion \mathcal{L} maximieren, und K ist die Anzahl der unbekannt Modellparameter θ . Da eine Erhöhung der Modellparameter zwangsläufig zu einer besseren Anpassung führen würde, kann der zweite Term als Strafterm interpretiert werden, der einer Überparameterisierung entgegenwirkt /Akaike 1974/.

Das Akaike-Informationskriterium (AIC) ist ein relatives Maß zur Modellbewertung, sodass die Bestimmung des AIC für einen einzelnen Modellkandidaten keine Rückschlüsse zulässt. Erst der Vergleich von k Modellkandidaten ermöglicht eine Bewertung:

$$AIC_{\min} = \min_k AIC_k. \quad (4)$$

Das Modell, welches mit AIC_{\min} den kleinsten Wert besitzt, ist unter den k bewerteten Modellen das zu bevorzugende Modell. Es hat gleichzeitig eine adäquate Anzahl von Parametern und eine hohe Anpassungsgüte.

Modelle mit einer großen Anzahl von Parametern werden durch Gl. (4) bevorzugt, wenn die Anzahl der Beobachtungen n im Vergleich zur Anzahl der Modellparameter K zu gering ist. /Burnham & Anderson 2002, S. 374 ff./ empfehlen daher die Verwendung einer Bias-korrigierten Version

$$AIC_c = AIC + \frac{2K(K+1)}{n-K-1} \quad (5)$$

anstelle der direkten Anwendung von Gl. (3). Da der zusätzliche Korrekturterm in Gl. (5) für $n \gg K$ gegen null strebt und somit Gl. (3) in Gl. (5) übergeht, ist der Einsatz von AIC_c grundsätzlich vorzuziehen.

In der Geodäsie wird das Informationskriterium zur Modelloptimierung bisher nur in wenigen Anwendungen eingesetzt, wie in der GNSS-Zeitreihenanalyse /Luo et al. 2011/. /Lehmann 2014/ untersucht die Eignung verschiedener Informationskriterien zur Optimierung der Parameteranzahl im Kontext der Koordinatentransformation. /Flach & Naterop 1999/ setzen das AIC bei der Auswertung

automatisierter Tachymetermessungen ein, um den systematischen Einfluss einer nichtrepräsentativ erfassten Meteorologie zu minimieren. /Lehmann 2015/ untersucht mögliche Verteilungsfunktionen von Beobachtungsfehlern mittels Informationskriterium. Die Eignung des AIC zum Aufdecken kontaminierter Beobachtungen untersuchen /Lehmann & Lösler 2016/. Zur Validierung der Parameteranzahl bei der Bestimmung von Freiformflächen untersuchen /Harmening & Neuner 2014/ den Einsatz von Informationskriterien. Um die optimale Anzahl von zusätzlichen Integrationsparametern bei der Bündelausgleichung in der industriellen Messtechnik abzuschätzen, greifen /Lösler et al. 2016/ auf das AIC zurück. Im Folgenden soll die Anwendung der Informationstheorie bei der geometrischen Deformationsanalyse untersucht werden.

2 METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE UND MAXIMUM-LIKELIHOOD-METHODE

Werden, wie in der Geodäsie üblich, normalverteilte Beobachtungen $I \sim N(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{C}_{II})$ unterstellt, so liefert die Schätzung der u Modellkoeffizienten \mathbf{x} nach der Methode der kleinsten Quadrate (L2-Norm) im Gauß-Markov-Modell und nach der Maximum-Likelihood-Methode bekanntermaßen dieselbe Lösung /Koch 1999, S. 161/. Das funktionale Modell des linearen bzw. linearisierten Gauß-Markov-Modells lautet

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = I + \mathbf{v} \quad (6)$$

mit der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und dem Vektor der Beobachtungsverbesserungen \mathbf{v} . Das stochastische Modell ist gegeben durch die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{II} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (7)$$

worin σ_0^2 der a priori Varianzfaktor und \mathbf{P} die Gewichtsmatrix sind. Der Lösungsvektor in Gl. (6) ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (7) zu

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} I = \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{n}, \quad (8)$$

worin $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ die Kofaktormatrix der geschätzten Modellkoeffizienten $\hat{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} I$ der Absolutgliedvektor sind. Die L2-Schätzung für den unverzerrten a posteriori Varianzfaktor ist

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n-u} = \frac{\Omega}{n-u}. \quad (9)$$

Die zu maximierende Likelihood-Funktion zur Bestimmung der Modellparameter θ , welche neben den u Modellkoeffizienten \mathbf{x} auch einen Schätzwert für den Varianzfaktor σ_0^2 enthält, ergibt sich zu

$$\mathcal{L}(\theta; I) = (2\pi \hat{\sigma}_0^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{2\hat{\sigma}_0^2} \right) \quad (10)$$

bzw.

$$\log \mathcal{L}(\theta; I) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \hat{\sigma}_0^2 - \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{2\hat{\sigma}_0^2}, \quad (11)$$

womit sich unter Berücksichtigung von $\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - I$ für $\hat{\mathbf{x}}$ die L2-Lösung nach Gl. (8) ergibt. Die Maximum-Likelihood-Schätzung für den a posteriori Varianzfaktor lautet hingegen

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n} = \frac{\Omega}{n} \quad (12)$$

und stellt eine verzerrte Schätzung für σ_0^2 dar /Koch 1999, S. 162 ff./
Das Akaike-Informationskriterium wird schließlich durch Substitution von Gl. (11) in Gl. (5) erhalten:

$$AIC_c = n \left(1 + \log \left(\frac{2\pi\Omega}{n} \right) \right) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-k-1}, \quad (13)$$

worin $K = u + 1$ die Anzahl der Modellkoeffizienten u zuzüglich der Schätzung für σ_0^2 ist /Lehmann & Lösler 2016/.

3 AUFSTELLEN VON MODELLKANDIDATEN

Die Modellbewertung mittels Akaike-Informationskriterium basiert auf dem Vergleich der $AIC_{c,k}$ von k Modellkandidaten. Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass das Initialmodell die geringste Anzahl von Modellparametern K besitzt und lediglich zu prüfen ist, ob das Hinzufügen von weiteren Modellparametern zu einer signifikanten Verbesserung führt. Die Erweiterung des Initialmodells (Gl. (6)) lautet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}, \quad (14)$$

worin \mathbf{B} die zusätzliche Designmatrix des erweiterten funktionalen Modells und $\hat{\mathbf{v}}$ der Vektor der zusätzlichen Parameter sind. Das resultierende Normalgleichungssystem ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Liegt bereits eine initiale Lösung für Gl. (8) vor, so können die Zusatzparameter und deren Unsicherheiten $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}$ durch Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahren ohne das explizite Lösen von Gl. (15) direkt bestimmt werden /Jäger et al. 2005, S. 185 f./, /Lehmann & Lösler 2016/:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &= -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{v}, \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} &= \left(\mathbf{B}^T \mathbf{P} (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T) \mathbf{P} \mathbf{B} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Die Verbesserungsquadratsumme des erweiterten Modells $\Omega_{\hat{\mathbf{v}}}$ reduziert sich durch das Hinzufügen von $\hat{\mathbf{v}}$ und ergibt sich zu /Heck 1981/

$$\Omega_{\hat{\mathbf{v}}} = \Omega - \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}. \quad (17)$$

Das Aufstellen von potenziellen Modellkandidaten ist, da eine vollständige Invertierung des jeweils erweiterten Gauß-Markov-Modells (Gl. ((15))) für die Modellbewertung mittels AIC_c nicht notwendig ist, ressourcenschonend. Das Bilden der Inverse in Gl. (16) lässt sich durch die partielle Überlappung der k Designmatrizen \mathbf{B} mittels Blockmatrixinvertierung optimieren /Koch 1999, S. 33 f./.

4 KONGRUENZANALYSE

Zu den Kernaufgaben der Ingenieurgeodäsie zählt das Prüfen von Veränderungen an Objekten durch eine Deformationsanalyse.

Häufig ist es ausreichend, Veränderungen des Objektzustands zu detektieren, ohne deren Ursache näher zu analysieren. Die Deformationsanalyse beschränkt sich in diesem Fall auf einen reinen geometrischen Vergleich epochaler Daten und wird als deskriptive Kongruenzanalyse bezeichnet /Heunecke et al. 2013, Kap. 2.6.1/.

Die Bewertung möglicher Punktverschiebungen $\hat{\mathbf{v}}$ in einem epochal beobachteten Netz erfolgt in der Geodäsie üblicherweise mittels Hypothesentests. Die hierbei angewandte Vorgehensweise entspricht einer Verallgemeinerung des sogenannten Data-Snoopings, welche auf /Baarda 1968, S. 27 ff./ zurückgeht und die Standardmethode im Kontext der Ausreißersuche in geodätischen Netzen ist. Das klassische Data-Snooping modelliert hierbei nur eine einzelne Störgröße $\hat{\mathbf{v}}$ zum Aufdecken eines Beobachtungsfehlers und sieht eine konsekutive Vorgehensweise beim Vorhandensein von mehreren kontaminierten Daten vor, die aus statistischer Sicht inexakt ist. Eine angenommene Alternativhypothese impliziert, dass nur eine einzelne kontaminierte Beobachtung im Datensatz vermutet wird. Es ist paradox, die Entscheidung für diese Alternativhypothese im konsekutiven Test später wieder zu verwerfen, aber die Ergebnisse der Entscheidung zu akzeptieren. Auch im Kontext der geometrischen Deformationsanalyse wird i. d. R. eine konsekutive Einzelpunktanalyse propagiert, wenn mehrere deformierte Punkte im Netz vorliegen. Eine rigorose Analyse mündet in einem multiplen Test /Klein et al. 2016/, /Lehmann & Lösler 2016/.

Aus Sicht der Modellbewertung lassen sich Punktverschiebungen als eine unzureichende Parametrisierung im funktionalen Modell interpretieren. Durch die Integration von zusätzlichen Modellkoeffizienten zur Behebung der Modellstörungen lässt sich folglich das funktionale Modell richtigstellen. Mittels Gl. (14) lassen sich verschiedene Modellkandidaten formulieren, deren Anpassungsgüte mit Gl. (13) zu bewerten ist.

Die Anzahl der zusätzlichen Modellkoeffizienten m_{\max} ist begrenzt durch den Grad der Überbestimmung des Gleichungssystems. Die Forderung nach $n > u + m_{\max}$ ist zwingend. Wenn im Vorfeld nicht bekannt ist, ob und wie viele Modellstörungen im funktionalen Modell vorliegen, sind alle möglichen k Modellkandidaten zu bewerten. Die mitunter hohe Anzahl an Modellkandidaten kann in der Kongruenzanalyse häufig durch Vorinformationen oder -analysen bezüglich stabiler Netzteile zugunsten der Laufzeit eingegrenzt werden /Neitzel 2004, S. 109 ff./.

Sind in einem Überwachungsnetz keine Punktveränderungen aufgetreten, so können die epochal erhobenen und ggf. zuvor bereinigten Daten in einer gemeinsamen Ausgleichung im Modell Gl. (6) prozessiert werden /Lösler et al. 2017/:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{p,1} & \mathbf{A}_{z,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{p,2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{z,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_p \\ \hat{\mathbf{x}}_{z,1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{z,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Hierin ist \mathbf{A}_p die Designmatrix der gemeinsamen Punkte $\hat{\mathbf{x}}_p$ in beiden Epochen und \mathbf{A}_z ist die Designmatrix der epochenspezifischen Zusatzparameter $\hat{\mathbf{x}}_z$ wie Orientierungsunbekannte oder Parameter zur Berücksichtigung eines geänderten Netzdesigns, die für die eigentliche Kongruenzanalyse nicht von Bedeutung sind. Punktveränderungen zwischen den Epochen sind als ein unzureichend formuliertes funktionales Modell zu interpretieren und durch Integration von Zusatzparametern $\hat{\mathbf{v}}$ in den Beobachtungsgleichungen

richtigzustellen. Die Erweiterung der Koeffizientenmatrix in Gl. (15) ergibt sich für den i -ten Punkt zu

$$B_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ A_{p,2} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

worin $A_{p,2}$ die zum i -ten Punkt korrespondierenden Koeffizienten der Designmatrix $A_{p,2}$ der zweiten Epoche enthält. Die Designmatrix B zur Beschreibung von Veränderungen im i -ten und j -ten Punkt ergibt sich analog und lautet

$$B_{i,j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ A_{p,2} & A_{p,2} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Das so formulierte Kongruenzmodell wird auch als Beobachtungsmethode bezeichnet, weil es zum einen die originären Beobachtungen bei der Modellbildung in Gl. (18) verwendet und zum anderen die Deformationsparameter \hat{v} direkt in den Beobachtungsgleichungen modelliert und auf zusätzliche Bedingungsgleichungen verzichtet /Jäger et al. 2005, S. 276/, /Lösler et al. 2017/.

4.1 Untersuchungsbeispiel 1: Trilaterationsnetz

In /Neitzel 2004, S. 100 ff./ ist ein Deformationsnetz mit zehn Punkten gegeben, welches an /Reinking 1994, S. 53 f./ angelehnt ist. Es handelt sich um ein reines Trilaterationsnetz, für das Daten von zwei Messepochen vorliegen. Vorinformationen bezüglich eines stabilen Subnetzes sind nicht gegeben. Die synthetischen Daten sind so simuliert worden, dass nur die Punkte 7, 8 und 9 eine kongruente Punktgruppe bilden. Ausreißer und Maßstabsunterschiede sind nicht vorhanden. Aufgrund der Netzkonfiguration, der extremen Punktveränderungen und dem hohen Anteil von 70 % deformierter Punkte scheitern konsekutive Verfahren /Reinking 1994, S. 54/, /Neitzel 2004, S. 102/. Abb. 1 zeigt die Konfiguration des Netzes. Zur besseren Visualisierung sind die stabilen Punkte 7, 8 und 9 hervorgehoben. Im Rahmen der Auswertung wurde diese Information jedoch nicht berücksichtigt.

Mit den gegebenen Näherungskoodinaten der ersten Epoche (vgl. Tab. 1), wird gemäß Gl. (18) eine gemeinsame Ausgleichung beider Epochen durchgeführt. Da die Normalgleichungsmatrix einen Rangdefekt von $d = 3$ aufweist, wird eine freie Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung durchgeführt. Die hierbei geschätzten Koordinaten sind in Tab. 1 zusammengefasst.

Da a priori keine Eingrenzung bezüglich stabiler Punkte getroffen wurde, kann die Anzahl möglicher Modellkandidaten durch Kombinatorik abgeschätzt werden:

$$k_{\max} = \sum_{m=0}^{m_{\max}} \binom{p}{m}. \quad (21)$$

Für zehn Punkte mit jeweils zwei Koordinatenkomponenten beträgt $p = 20$. Da für eine eindeutige Datumsfestlegung in einem maßstabsbestimmten

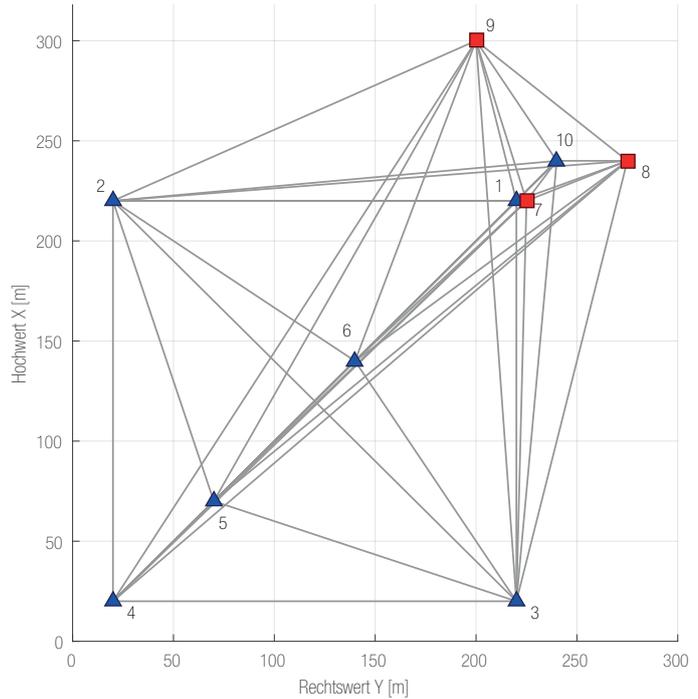


Abb. 1 | Plot der Netzkonfiguration des Deformationsnetzes: Während blaue Dreiecke deformierte Objektpunkte symbolisieren, sind die nichtdeformierten Referenzpunkte durch rote Vierecke dargestellt

Horizontalnetz drei Koordinatenkomponenten nötig sind, beträgt $m_{\max} = 17$ und es ergeben sich $k_{\max} = 1\,048\,365$ Modellkandidaten. Werden jedoch nur Modellkandidaten zugelassen, bei denen ausschließlich $p = 10$ Punkte mit vollständigem Koordinatenpaar auftreten, reduziert sich die Anzahl auf lediglich $k_{\max} = 1\,013$.

Punkt	Y_0 in m	X_0 in m	\hat{Y} in m	\hat{X} in m
1	220,0	220,0	220,5557	219,1534
2	20,0	220,0	20,8272	219,6281
3	220,0	20,0	220,3895	19,1166
4	20,0	20,0	19,5702	21,0740
5	70,0	70,0	70,0911	70,3486
6	140,0	140,0	140,3973	139,8154
7	225,0	220,0	224,6300	220,4108
8	275,0	240,0	274,3881	240,9295
9	200,0	300,0	198,7606	300,1682
10	240,0	240,0	240,3904	239,3555

Tab. 1 | Näherungskoodinaten der 1. Epoche /Neitzel 2004, S. 100/ und Resultate der gemeinsamen Ausgleichung beider Messepochen

m	0	2	4	6	8	10	12	14	16
min $AIC_{c,m}$	1045,6	1025,4	990,6	950,0	891,8	825,6	663,5	525,4	531,4

Tab. 2 | Gegenüberstellung des jeweils kleinsten AIC_c in Relation zur Anzahl der zusätzlichen Deformationsparameter m der Kongruenzanalyse

Punkt	\tilde{v}_y in m	\tilde{v}_x in m	\tilde{v}_y in m	\tilde{v}_x in m
1	-2,0	2,5	-1,999	2,457
2	-2,5	-2,5	-2,461	-2,536
3	2,5	2,5	2,474	2,510
4	4,0	-5,5	4,064	-5,467
5	2,0	-3,0	2,039	-2,988
6	0,0	-0,5	0,020	-0,504
10	-2,0	2,5	-2,008	2,474

Tab. 3 | Simulierte Punktveränderung \tilde{v} der Objektpunkte /Reinking 1994, S. 53/ und geschätzte Punktverschiebungen \tilde{v} im Deformationsnetz

Hierbei erfolgt die Datumsfestlegung durch zwei Punkte, sodass $m_{\max} = 8$ beträgt.

In Tab. 2 sind die nach Gl. (13) ermittelten minimalen AIC_c in Abhängigkeit von der Anzahl der modellierten Deformationsparameter m dargestellt. Die für den Strafterm in Gl. (3) bzw. Gl. (5) notwendige Anzahl von Modellparametern wurde um den Defekt der Normalgleichung auf $K = u + 1 - d$ reduziert, da jede Nebenbedingung die Anzahl der effektiv schätzbaren Modellparameter um eins reduziert. Das minimale AIC_c , welches von allen getesteten k Modellkandidaten das optimale Modell darstellt, ergibt sich für $m = 14$ und identifiziert die Punkte 7, 8 und 9 als kongruent. Die geschätzten Deformationen der übrigen sieben Punkte ergeben sich mittels Gl. (16) und sind in Tab. 3 den simulierten Punktverschiebungen \tilde{v} gegenübergestellt.

Trotz dieser recht großen bzw. eindeutigen Punktverschiebungen von zum Teil über 5 m können die deformierten Punkte mit einer konsekutiven Einzelpunktanalyse nicht aufgedeckt werden. Das AIC_c identifiziert im Rahmen der Deformationsanalyse die kongruente Punktgruppe korrekt. Auch die Größen der geschätzten Punktveränderungen entsprechen den in /Reinking 1994, S. 53/ gegebenen Deformationen.

4.2 Untersuchungsbeispiel 2: Mehrepochenauswertung eines Deformationsnetzes

Im vorherigen Beispiel wurde das AIC_c zum Aufdecken von Deformationen in einem Trilaterationsnetz erfolgreich demonstriert. Die auftretenden Punktverschiebungen sind jedoch untypisch groß und sollten in Realnetzen nur äußerst selten vorkommen. Im Folgenden soll daher die Eignung des AIC_c zum Aufdecken kleiner Punktdeformationen näher untersucht werden. Für diese Untersuchung empfiehlt sich ein Netz, für welches Datensätze von mehreren Epochen vorliegen und das Punktverschiebungen aufweist, die sich als Funktion der Zeit t darstellen lassen.

In /Caspary & Welsch 1979, S. 3/ findet sich ein Deformationsnetz, welches an das Design des Überwachungsnetzes der Montsalvens-Staumauer angelehnt ist. Das Netz besteht aus vier Referenzpunkten (Punkte 1 bis 4) und fünf Sicherungspunkten (Punkte 5 bis 9) sowie weiteren fünf Objektpunkten auf der Dammkrone (Punkte 10 bis 14), siehe Abb. 2. In Tab. 4 sind die registrierten Punktverschiebungen für die Objektpunkte und den Referenzpunkt 4 angegeben. Näherungskoodinaten der Netzpunkte sind in /Caspary & Welsch 1979, S. 3/ nicht publiziert, sodass diese anhand der gegebenen Grafik rekonstruiert wurden (vgl. Tab. 4).

Punkt	Type	Y_0 in m	X_0 in m	$\tilde{v}_{\max, y}$ in mm	$\tilde{v}_{\max, x}$ in mm
1	R	87,845	91,886	0,0	0,0
2	R	100,000	100,000	0,0	0,0
3	R	136,550	98,761	0,0	0,0
4	R	157,513	85,848	0,5	0,9
5	S	184,216	63,072	0,0	0,0
6	S	116,160	69,230	0,0	0,0
7	S	90,040	79,359	0,0	0,0
8	S	69,613	97,578	0,0	0,0
9	S	155,825	100,000	0,0	0,0
10	O	79,220	97,388	-1,0	-1,0
11	O	93,304	118,192	-2,0	4,0
12	O	116,817	128,481	-1,0	6,0
13	O	140,714	122,172	0,0	3,0
14	O	158,279	103,454	-1,0	-1,0

Tab. 4 | Abgeleitete Näherungskoodinaten der Referenzpunkte (R), Sicherungspunkte (S) und Objektpunkte (O) des Überwachungsnetzes sowie die auftretenden Verschiebungsbeträge \tilde{v}_{\max} der Punkte /Caspary & Welsch 1979, S. 3/

Das Messkonzept sieht eine kombinierte Erfassung von Richtungen und horizontalen Strecken vor, wobei Streckenmessungen nur zwischen den vier Referenzpunkten ausgeführt werden /Caspary & Welsch 1979, S. 84 ff./ Um das AIC_c hinsichtlich der Sensitivität bezüglich kleiner Punktdeformationen zu untersuchen, wird von einem kontinuierlichen (linearen) Deformationsverhalten der Punkte ausgegangen. Die in Tab. 4 angegebenen Verschiebungen \tilde{v}_{\max} entsprechen dabei den Deformationen zwischen der Nullepoche und der letzten Kontrollepoche. Die Punktverschiebungen möglicher Zwischenepochen ergeben sich durch lineare Interpolation in Abhängigkeit vom zeitlichen Abstand t zur Nullepoche mittels

$$\tilde{v}_t = \frac{t}{t_{\max}} \tilde{v}_{\max}, \quad (22)$$

wobei $t_{\max} = 10$ hier die letzte Messepoche repräsentieren soll. Für $t > 0$ liegen demnach Punktverschiebungen vor.

Zur Bewertung des AIC_c beim Aufdecken von Punktdeformationen kann auf Prinzipien zur Planung und Optimierung von Überwachungsnetzen zurückgegriffen werden /Jäger et al. 2005, S. 284 ff./ Durch die Vorgabe der Koordinaten der Netzpunkte, des Beobachtungsplans und der Beobachtungsgenauigkeiten liegt das Netzdesign a priori auch ohne konkrete Messdaten vor. Die Koeffizientenmatrizen A und B in Gl. (15) können somit aufgestellt und $Q_{\tilde{v}}$ berechnet werden. Zur Bewertung einer Modellstörung \tilde{v} lässt sich die F -verteilte Teststatistik formulieren:

$$\frac{\tilde{\nabla}^T \mathbf{Q}_{\tilde{\nabla}}^{-1} \tilde{\nabla}}{m \sigma_0^2} \sim F_{m, \infty} | H_0, \quad (23)$$

wobei σ_0^2 der a priori Varianzfaktor und $m = 2$ im Lagernetz sind /Lehmann & Lösler 2016/. Ist diese Teststatistik größer als das F -Quantil, so ist die Nullhypothese in Gl. (23) zugunsten der Alternativhypothese zu verwerfen und $\tilde{\nabla}$ weicht signifikant vom Erwartungswert $E\{\tilde{\nabla}\} = 0$ ab. Die Teststatistik der Alternativhypothese folgt mit $E\{\tilde{\nabla}\} = \tilde{\nabla} \neq 0$ der nichtzentralen F_λ -Verteilung mit dem Nichtzentralitätsparameter

$$\lambda = \frac{\tilde{\nabla}^T \mathbf{Q}_{\tilde{\nabla}}^{-1} \tilde{\nabla}}{\sigma_0^2}. \quad (24)$$

Der wahre Wert der Modellstörung $\tilde{\nabla}$ ist i.d.R. nicht bekannt /Pelzer 1971, S. 56 ff/.

Durch die Festlegung einer Irrtumswahrscheinlichkeit α für den Fehler 1. Art und einer Spezifizierung für den Nichtzentralitätsparameter λ , welcher sich direkt aus der Größe einer Modellstörung (Gl. (24)) ergibt, ließe sich die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art berechnen /Hahn et al. 1989/. Aufgrund der funktionalen Abhängigkeit zwischen α , β und λ lässt sich durch Vorgabe von α und β auf den Nichtzentralitätsparameter zurückschließen /Hahn et al. 1989/, /Aydin & Demirel 2004/:

$$\lambda(\alpha, \beta, m) = \frac{\nabla_0^T \mathbf{Q}_{\tilde{\nabla}}^{-1} \nabla_0}{\sigma_0^2}. \quad (25)$$

Eine Modellstörung ∇_0 kann somit quantifiziert werden, die mit diesem Test gerade noch aufdeckbar wäre /Heck 1983/, /Koch 2015/. Die Bestimmung von ∇_0 mittels Gl. (25) ist für $m > 1$ mehrdeutig und kann ohne Zusatzbedingung nicht aufgelöst werden. Übliche Werte für den Fehler 1. und 2. Art sind $\alpha = 0,1 \%$, $\alpha = 1 \%$ bzw. $\alpha = 5 \%$ und $\beta = 10 \%$, $\beta = 20 \%$ bzw. $\beta = 30 \%$ /Baarda 1968/, /Hahn et al. 1989/.

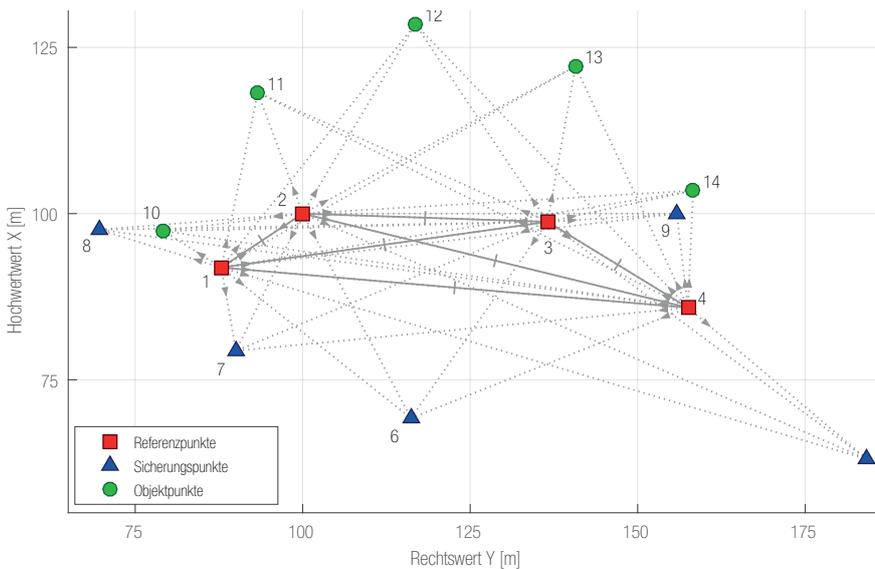


Abb. 2 | Design des Überwachungsnetzes: Referenzpunkte, von denen aus terrestrische Beobachtungen durchgeführt wurden, sind durch rote Vierecke dargestellt. Sicherungspunkte sind blaue Dreiecke und Objektpunkte auf der Dammkrone werden durch grüne Punkte symbolisiert.

Punkt	$\nabla_{0,y}$ in mm	$\nabla_{0,x}$ in mm	t_0
4	0,16	0,30	3,3
10	-0,18	-0,18	1,8
11	-0,41	0,81	2,0
12	-0,15	0,87	1,5
13	0,00	0,96	3,2
14	-0,38	-0,38	3,8

Tab. 5 | Minimal aufdeckbare Modellstörung ∇_0 für die deformierten Punkte und Zeitpunkt t_0 , für den der Grenzwert ∇_0 erreicht wird

Mit den in Tab. 4 gegebenen Punktdeformationen liegen die Verschiebungsrichtungen fest, sodass zur eindeutigen Bestimmung der minimal aufdeckbaren Modellstörung ∇_0 zusätzlich

$$\frac{\tilde{\nabla}^T \nabla_0}{\|\tilde{\nabla}\| \|\nabla_0\|} = 1 \quad (26)$$

gefordert werden kann (vgl. auch /Lösler et al. 2017/).

Für $\alpha = 1 \%$ und $\beta = 20 \%$ ergibt sich der Nichtzentralitätsparameter zu $\lambda(\alpha, \beta, 2) = 13,88$. Die mittels Gl. (25) abgeleiteten minimal aufdeckbaren Modellstörungen ∇_0 sind in Tab. 5 zusammengefasst, wobei von einer Standardabweichung für die Richtungs- bzw. Streckenmessung von 0,3 mgon bzw. 0,2 mm ausgegangen wurde /Caspary & Welsch 1979/. Mittels Gl. (22) und den Modellstörungen in Tab. 4 lässt sich somit der Zeitpunkt t_0 bestimmen, für den die jeweilige Punktverschiebung den Grenzwert ∇_0 der Aufdeckbarkeit erreicht.

Die Zeitpunkte werden aufgrund der unterschiedlichen $\mathbf{Q}_{\tilde{\nabla}}$ und der differierenden Verschiebungsbeträge $\tilde{\nabla}$ nicht gleichzeitig erreicht. Während für den Punkt 12, der mit 6,1 mm die größte absolute Verschiebung besitzt, bereits für $t_0 = 1,5$ der Grenzwert erreicht wird, ergibt sich dies für den Punkt 14 erst bei $t_0 = 3,8$. Zu beachten ist, dass t_0 nach Gl. (25) vom Nichtzentralitätsparameter und somit von der Wahl für α und β abhängt. Eine Verringerung der Irrtumswahrscheinlichkeit α bei gleichbleibender Teststärke $(1 - \beta)$ führt beispielsweise zu einer Vergrößerung des Nichtzentralitätsparameters λ bzw. der minimal aufdeckbaren Modellstörung ∇_0 , sodass nach Gl. (22) die Zeitspanne, die zur Erreichung dieses Grenzwerts verstreichen muss, ansteigt.

Für die Analyse werden daher Zeitpunkte

$$\mathbf{t}^T = (0 \ 1 \ 1,5 \ 2 \ 2,5 \ 3 \ 3,5 \ 4 \ 5 \ 10)$$

gewählt, die in der Nähe der präzidierten Zeitpunkte liegen. Für alle Zeitpunkte werden die Punktverschiebungen nach Gl. (22) bestimmt und anhand des vorgegeben Beobachtungsplans die fehlerfreien Richtungs- und Streckenbeobachtungen zusammen mit den Beobachtungen der Nullepoche bestimmt. Alle Beobachtun-

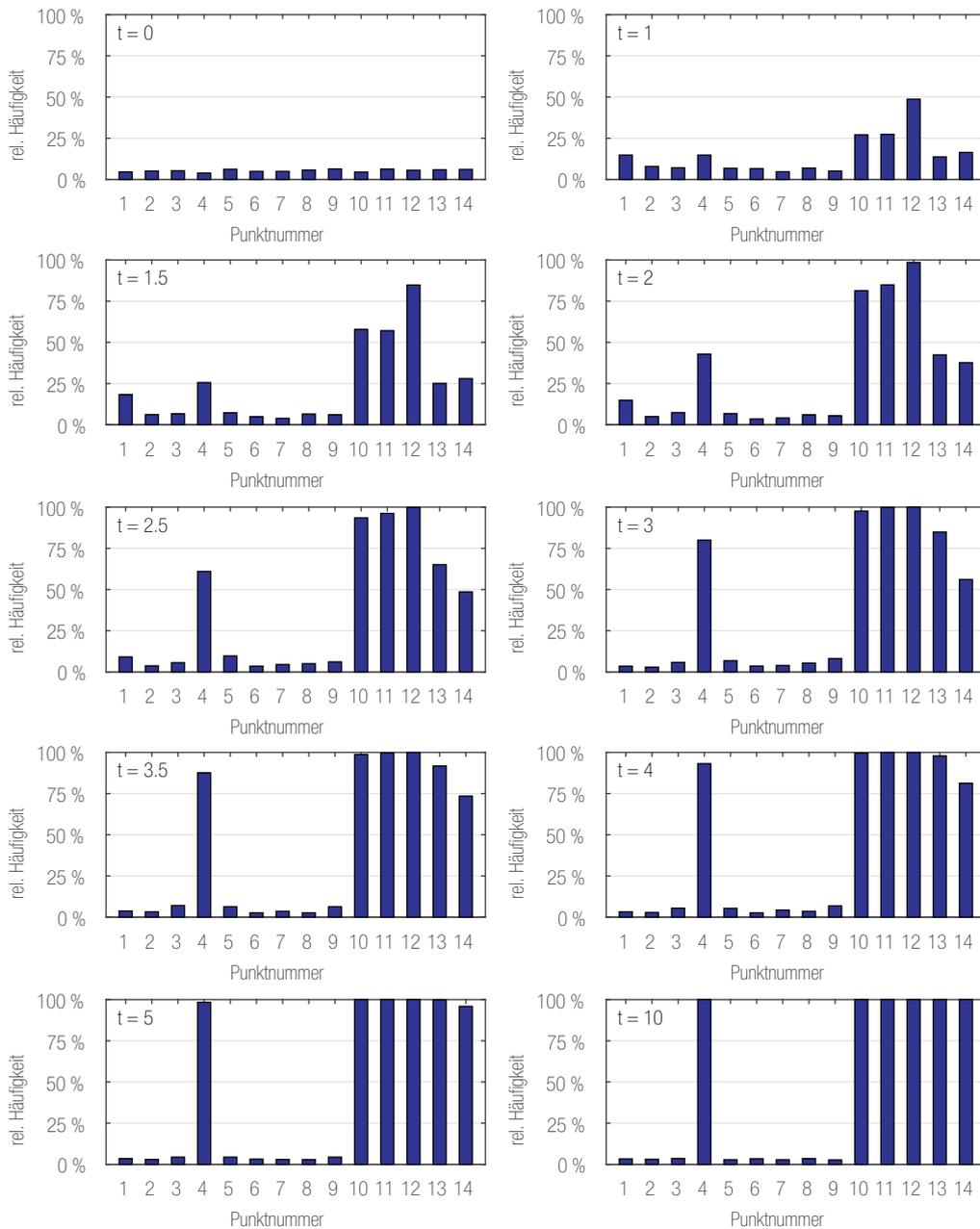


Abb. 3 | Relative Häufigkeiten der mittels AIC_c identifizierten instabilen Punkte in Abhängigkeit des Epochenzeitpunkts. Für jeden Zeitpunkt t wurden 1 000 Wiederholungen mit jeweils 16 368 Modellkandidaten berücksichtigt

gen werden mit einem normalverteilten Rauschen mit einer Standardabweichung von 0,3 mgon für Richtungsbeobachtungen bzw. 0,2 mm für Streckenmessungen versehen. Für jede Kombination aus Null- und Zwischenepoche sind $k_{\max} = 16\,368$ Modellkandidaten mittels AIC_c zu bewerten. Hierbei werden wiederum nur Modelle berücksichtigt, die ausschließlich vollständige Koordinatenpaare aufweisen. Von allen untersuchten Modellkandidaten lässt sich das optimale Modell anhand des minimalen AIC_c identifizieren. Um den Einfluss eines zufällig gewählten Beobachtungsvektors auf die Ergebnisse zu minimieren, wird jede Kombination aus Null- und Zwischenepoche 1 000-mal wiederholt. Für jedes Sample dieser Monte-Carlo-Simulation erfolgt die vollständige Bewertung aller

$k = 16\,368$ Modellkandidaten mittels AIC_c entsprechend Gl. (4). Die hierbei als instabil klassifizierten Punkte wurden gespeichert.

Abb. 3 stellt die Ergebnisse der einzelnen Epochenausgleichungen in zehn Histogrammen dar. Für $t = 0$ wurden Datensätze simuliert, bei denen keine Punktverschiebungen vorliegen. Die fälschlich aufgedeckten Punktverschiebungen sind demnach allein auf die simulierten Messabweichungen zurückzuführen. Für $t = 1,5$ ist ein leichter Anstieg für den Punkt 1 zu erkennen, der in den übrigen Epochen wieder abflacht. Für den Punkt 1 werden nach Tab. 4 keine Punktverschiebungen simuliert. Die Ursache für das Anzeigen dieses Punkts liegt im Netzdesign und der Nähe zum deformierten Punkt 10. Wie in Abb. 2 zu erkennen ist, werden die Objektpunkte nur durch Richtungsmessungen beobachtet. Der

Punkt 10 verschiebt sich gleichmäßig in Rechts- und Hochwert. Richtungsmessungen von den Referenzpunkten 2, 3 und 4 sind jedoch aufgrund der schleifenden Schnitte nicht geeignet, kleine Deformation im Rechtswert dieses Objektpunkts 10 zuverlässig abzubilden, sodass die Messungen vom Referenzpunkt 1 bei kleinen Deformationsbeträgen nur ungenügend durch die übrigen Messungen gestützt werden, die unter Umständen zu Fehlentscheidungen führen.

Erwartungsgemäß zeigen sich im Lauf der Zeit t die tatsächlich verschobenen Punkte deutlicher. Vergleicht man in *Abb. 3* die Identifikationsquote der einzelnen Punkte in Abhängigkeit von t mit den prädizierten Werten t_0 in *Tab. 5*, so zeigt sich eine sehr hohe Übereinstimmung. Für $t = 3,5$ liegt die Identifikationsquote für alle deformierten Punkte zum Teil deutlich über 75 %. Für $t \geq 5$ werden praktisch alle deformierten Punkte korrekt identifiziert, was den halben Verschiebungsbeträgen in *Tab. 4* entspricht.

Das AIC_c ist ein relatives Maß und bewertet nur Modelle, die bei der Untersuchung auch mit einbezogen wurden. Das ausgewiesene optimale Modell besitzt daher nur gegenüber den getesteten Modellen eine hohe Anpassungsgüte bei gleichzeitig adäquater Parameteranzahl. Ein Rückschluss auf ein möglicherweise besser optimiertes Modell ist aus der Größe des AIC_c nicht möglich. Im Rahmen einer Kongruenzanalyse sind Blockverschiebungen oder Verformungen von Teilnetzen denkbar /Heunecke et al. 2013, Kap. 11.4/. Gegenüber einer Modellierung mit individueller Punktverschiebung lässt sich in einem Netz, welches beispielsweise eine Blockverschiebung in einem Teilnetz aufweist, das Deformationsverhalten mit einer deutlich geringeren Anzahl von Parametern beschreiben. Die Berücksichtigung dieser spezifischen Modelle erscheint jedoch nur sinnvoll, wenn eine Voranalyse konkrete Indizien liefert, wie beispielsweise gleichgerichtete Punktverschiebungen. Betrachtet man die Verschiebungsrichtung des Punkts 13 in *Tab. 4* bzw. *Tab. 5*, so liegt ausschließlich eine Veränderung in X -Richtung für diesen Punkt vor. Da bei den Modellkandidaten a priori Einzelkoordinatenkomponentenverschiebungen ausgeschlossen wurden, ist das wahre Modell nicht bewertet worden. Die geschätzten Deformationen nach Gl. (16) liefern hier jedoch den Indikator, diesem Umstand in einer weiteren Analyse Rechnung zu tragen.

5 ZUSAMMENFASSUNG

In der Geodäsie erfolgt die Selektion von Ausgleichungsmodellen üblicherweise mittels Hypothesentests. In der Informationstheorie sind verschiedene Informationskriterien zur Modellbewertung entwickelt worden. Eines der ältesten ist das hier vorgestellte Akaike-Informationskriterium (AIC), welches aus einer Anzahl gegebener Modellkandidaten das optimale Modell auswählt. Dieses ausgewählte Modell zeichnet sich durch eine hohe Anpassungsgüte aus und besitzt gleichzeitig eine adäquate Anzahl von Modellparametern. Bisher existieren nur wenige Applikationen in der Geodäsie, die das AIC einsetzen.

In diesem Beitrag wurde der Einsatz des AIC für Fragestellungen in der geometrischen Deformationsanalyse diskutiert. Nach einer kurzen Einführung wurde das Informationskriterium an einem synthetischen Trilaterationsnetz demonstriert. Bedingt durch die

extremen Punktveränderungen und dem hohen Anteil an deformierten Punkten scheitern übliche konsekutive Verfahren beim Aufdecken der Stabilpunktgruppe in diesem Netz. Die Eignung des AIC in der Kongruenzanalyse zum Aufdecken kleiner Punktdeformationen wurde anhand eines weiteren Datensatzes evaluiert, für den lineare Punktverschiebungen simuliert wurden. Als Bewertungsmaßstab wurden Verfahren aus der Netzplanung und -optimierung herangezogen. Die Analyse zeigt, dass das AIC die prädizierten Punktverschiebungen der Netzplanung aufdeckt, auch wenn sich das wahre Modell nicht unter den Modellkandidaten befindet.

Der Einsatz des Informationskriteriums besitzt gegenüber dem multiplen Hypothesentest zwei wesentliche Vorteile. Zum einen entfällt die subjektive Festlegung eines Grenzwerts beispielsweise in Form einer Irrtumswahrscheinlichkeit α . Zum anderen sind die Hypothesen beim multiplen Test i. d. R. nicht unabhängig voneinander. Die strenge Behandlung dieser Korrelationen zur Ableitung der kritischen Werte würde eine multidimensionale numerische Integration erfordern und wird daher häufig vernachlässigt /Lehmann 2012/. Das Informationskriterium bewertet hingegen die Modellkandidaten auf der Basis der Kullback-Leibler-Divergenz mittels Gl. (4) und bietet eine Alternative zum Hypothesentest bei der Modelloptimierung. Der Rechenaufwand beider Verfahren ist vergleichbar, da für jeden Modellkandidaten die Parameterschätzung zu berechnen ist.

LITERATUR

- Akaike, H. (1974): A new look at the statistical model identification. In: IEEE Transactions on Automatic Control, 19(1974)6, 716–723. doi:10.1109/TAC.1974.1100705.
- Aydin, C.; Demirel, H. (2004): Computation of Baarda's lower bound of the non-centrality parameter. In: Journal of Geodesy, 78(2004)7, 437–441. doi:10.1007/s00190-004-0406-1.
- Baarda, W. (1968): A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Publications on Geodesy, New Series, Vol. 2, No. 5. Netherlands Geodetic Commission, Delft.
- Burnham, K. P.; Anderson, D. R. (2002): Model selection and multimodel inference: A practical information-theoretic approach. Springer, Berlin/Heidelberg/New York.
- Caspary, W.; Welsch, W. M. (1979): Seminar über Deformationsanalysen. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, (1979)4.
- Claeskens, G.; Hjort, N. L. (2008): Model selection and model averaging. Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics. Cambridge University Press, Cambridge. doi:10.1017/CBO9780511790485.
- deLeeuw, J. (1992): Introduction to Akaike (1973): Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In: Kotz, S.; Johnson, N. L. (Hrsg.): Breakthroughs in Statistics I. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 599–609. doi:10.1007/978-1-4612-0919-5_37.
- Flach, P.; Naterop, D. (1999): Neue Analysetechniken für Deformationsmessungen in permanenten Robotertachymeter-Netzen. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 106(1999)8-9, 284–291.
- Hahn, M.; Heck, B.; Jäger, R.; Scheuring, R. (1989): Ein Verfahren zur Abstimmung der Signifikanzniveaus für allgemeine $F_{m,n}$ -verteilte Teststatistiken, Teil I: Theorie. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (zfv), 114(1989)5, 234–248.

Harmening, C.; Neuner, H.-B. (2014): Raumkontinuierliche Modellierung mit Freiformflächen. In: Beiträge zum 139. DVW-Seminar „Terrestrisches Laser-scanning 2014“ (TLS 2014). Wißner, Augsburg, 105–122.

Heck, B. (1981): Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in den Beobachtungen. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 88(1981)1, 17–34.

Heck, B. (1983): Das Analyseverfahren des geodätischen Instituts der Universität Karlsruhe, Stand 1983. In: Welsch, W. M. (Hrsg.): Deformationsanalysen '83 – Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, (1983)9, 153–182.

Heunecke, O.; Kuhlmann, H.; Welsch, W. M.; Eichhorn, A.; Neuner, H. (2013): Handbuch Ingenieurgeodäsie – Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. 2. Auflage. Wichmann, Berlin/Offenbach.

Jäger, R.; Müller, T.; Saler, H.; Schwäble, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Wichmann, Heidelberg.

Klein, I.; Matsuoka, M. T.; Guzzato, M. P.; Nievinski, F. G. (2016): An approach to identify multiple outliers based on sequential likelihood ratio tests. In: Survey Review, 1–9. doi:10.1080/00396265.2016.1212970.

Koch, K. R. (1999): Parameter estimation and hypothesis testing in linear models. 2. Auflage. Springer, Berlin/Heidelberg/New York.

Koch, K. R. (2015): Minimal detectable outliers as measures of reliability. In: Journal of Geodesy, 89(2015)5, 483–490. doi:10.1007/s00190-015-0793-5.

Kullback, S.; Leibler, R. A. (1951): On information and sufficiency. In: Annals of Mathematical Statistics, 22(1951)1, 79–86. doi:10.1214/aoms/117729694.

Lehmann, R. (1994): Über die Quantifizierung von Information in der Geodäsie. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (zfv), 119(1994)8, 401–416.

Lehmann, R. (2012): Improved critical values for extreme normalized and studentized residuals in Gauss-Markov models. In: Journal of Geodesy, 86(2012)16, 1137–1146. doi:10.1007/s00190-012-0569-0.

Lehmann, R. (2014): Transformation model selection by multiple hypotheses testing. In: Journal of Geodesy, 88(2014)12, 1117–1130. doi:10.1007/s00190-014-0747-3.

Lehmann, R. (2015): Observation error model selection by information criteria vs. normality testing. In: Studia Geophysica et Geodaetica, 59(2015)4, 489–504. doi:10.1007/s11200-015-0725-0.

Lehmann, R.; Lösler, M. (2016): Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests versus Model Selection by Information Criteria. In: Journal of Surveying Engineering, 142(2016)4. doi:10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000189.

Lösler, M.; Haas, R.; Eschelbach, C. (2016): Terrestrial monitoring of a radio telescope reference point using comprehensive uncertainty budgeting – Investigations during CONT14 at the Onsala Space Observatory. In: Journal of Geodesy, 90(2016)5, 467–486. doi:10.1007/s00190-016-0887-8.

Lösler, M.; Eschelbach, C.; Haas, R. (2017): Kongruenzanalyse auf der Basis originärer Beobachtungen. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv), 142(2017)1, 41–52. doi:10.12902/zfv-0147-2016.

Luo, X.; Mayer, M.; Heck, B. (2011): Verification of ARMA identification for modelling temporal correlations of GNSS observations using the ARMASA toolbox. In: Studia Geophysica et Geodaetica, 55(2011)3, 537–556. doi:10.1007/s11200-011-0033-2.

Neitzel, F. (2004): Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, 565. München.

Pelzer, H. (1971): Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, 164. München.

Reinking, J. (1994): Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformationsfunktionen. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, 413. München.

Dipl.-Ing. (FH) Michael Lösler

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
LABOR FÜR INDUSTRIELLE MESSTECHNIK

Nibelungenplatz 1 | 60318 Frankfurt am Main
michael.loesler@fb1.fra-uas.de



Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND WIRTSCHAFT DRESDEN
FAKULTÄT GEOINFORMATION

Friedrich-List-Platz 1 | 01069 Dresden
ruediger.lehmann@htw-dresden.de



Prof. Dr.-Ing. Cornelia Eschelbach

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES
LABOR FÜR INDUSTRIELLE MESSTECHNIK

Nibelungenplatz 1 | 60318 Frankfurt am Main
cornelia.eschelbach@fb1.fra-uas.de



Manuskript eingereicht: 16.02.2017 | Im Peer-Review-Verfahren begutachtet

Wir machen Schifffahrt möglich.



Das **Wasserstraßen-Neubauamt Berlin** sucht zum nächstmöglichen Zeitpunkt, befristet für die Dauer von **5 Jahren im Rahmen einer Projektbefristung**, einen/eine

Assessor/in des Vermessungs- und Liegenschaftswesens als Projektleiter/in im vermessungstechnischen Bereich

Der Dienort ist Berlin.

Referenzcode der Ausschreibung 20170657_9561

Den vollständigen Ausschreibungstext mit ausführlichen Informationen zu dem Aufgabengebiet und den Anforderungen erhalten Sie über das Internet unter <http://www.wna-berlin.de> und <http://www.bav.bund.de>

Sollte Ihr Interesse geweckt worden sein, bewerben Sie sich bitte **bis zum 26.05.2017** über das Elektronische Bewerbungsverfahren (EBV) auf der Einstiegsseite <http://www.bav.bund.de/Einstieg-EBV> Hier geben Sie bitte den oben genannten Referenzcode ein.

Für Fragen im Zusammenhang mit dem Elektronischen Bewerbungsverfahren steht Ihnen die Bundesanstalt für Verwaltungsdienstleistungen unter der Rufnummer 04941 602-240 zur Verfügung.

Für weitere Informationen zur Ausschreibung stehen Ihnen für fachliche Fragen der Amtsleiter Herr Dietrich unter der Telefonnummer 030 695 80-400 und Herr Heyer für Fragen zum Bewerbungsverfahren unter der Telefonnummer 030 695 80-410 zur Verfügung.