



Wilhelm Caspary und  
Dieter Beineke, Neubiberg

# Robuste Helmert-Transformation

Ein robustes Schätzverfahren für die Helmert-Transformation wird vorgestellt, dessen Ergebnisse vom Koordinatensystem unabhängig sind.

## 1 Einführung

Koordinatentransformationen gehören seit jeher zu den Standardaufgaben, die im Alltag des Geodäten eine große Rolle spielen. Sie treten in zwei unterschiedlichen Formen auf:

(a) Positionen müssen von einem Bezugssystem in ein anderes umgerechnet werden, das sich hinsichtlich des geodätischen Datums und/oder der Abbildungsvorschrift vom Ausgangssystem unterscheidet. Für diese Transformation können analytische Formeln entwickelt werden. Das Ergebnis ist mathematisch streng und eindeutig.

(b) Die Beziehungen zwischen zwei Punktfeldern, deren Positionen mit unterschiedlichen Methoden und/oder zu unterschiedlichen Zeiten ermittelt worden sind, oder die unterschiedliche Bezugssysteme besitzen, zwischen denen kein mathematischer Zusammenhang herstellbar oder bekannt ist (ungleichartige Koordinaten) sollen modelliert werden. Zur Lösung dieser Aufgabe müssen einige Punkte beiden Punktfeldern angehören (identische bzw. homologe Punkte). In der Regel wird das Koordinatensystem eines der Punktfelder als Startsystem festgelegt, das in das zweite Punktfeld (Zielsystem) transformiert werden soll.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich die Transformation ungleichartiger Koordinaten, die in den letzten Jahren wieder verstärkt Aufmerksamkeit gefunden hat, da sie bei neuen Messmethoden und neuen Aufgaben, die dem Vermessungswesen zugewachsen sind, eine wichtige Rolle spielt. Als Beispiele seien die Einpassung von GPS-Positionen in ein Landeskoordinatensystem, die Deformationsanalyse durch Vergleich wiederholt gemessener Punkthaufen und der Aufbau von Geodatenbanken aus unterschiedlichen Datenquellen genannt.

Auch die Modellbildung für die Koordinatentransformation ist kürzlich erneut Gegenstand von Veröffentlichungen gewesen. Es ging dabei um die Frage der Austauschbarkeit von Start- und Zielsystem, d.h. der Unabhängigkeit der Parameterschätzung von der Transformationsrichtung. Dieses Problem scheint wohl mit dem Beitrag von KOCH (2002), der die einschlägigen Literaturhinweise enthält, weitgehend gelöst zu sein.

In eine andere Richtung zielen Beiträge, die beginnend mit CAROSIO (1982) robuste Verfahren zur Schätzung

der Transformationsparameter vorschlagen. Dadurch soll erreicht werden, dass eine Verfälschung der Schätzergebnisse durch grobe Fehler in den identischen Punkten vermieden wird. Die richtige Vorgehensweise bei der robusten Helmert-Transformation wird im Folgenden näher betrachtet.

## 2 Helmert-Transformation

Die folgenden Betrachtungen, für die wir das einfache Modell der ebenen Helmert-Transformation mit vier unbekannt Parametern ( $a, b, c, d$ ) wählen, gelten allgemein für die Transformation ungleichartiger Koordinaten. Wenn die Koordinaten  $(x, y)$  des Start- bzw. Ausgangssystems als deterministisch und die des Zielsystems  $(X, Y)$  als unabhängige gleich genaue Beobachtungen betrachtet werden, so erhält man z.B. nach NIEMEIER (2002), S. 316 die Beobachtungsgleichungen für  $p$  identische Punkte:

$$\begin{aligned} X_i + v_{X_i} &= a + x_i c - y_i d \\ Y_i + v_{Y_i} &= b + y_i c + x_i d \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (1)$$

Die Parameter  $a$  und  $b$  sind Translationen in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,  $c = m \cos \alpha$  und  $d = m \sin \alpha$  enthalten den Maßstab  $m$  und den Drehwinkel  $\alpha$ . Wenn die Zahl  $p$  der identischen Punkte größer als zwei ist, werden die Parameter durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate (MkQ) geschätzt. Dabei wird die Summe der Quadrate der Restklaffungen  $\Delta_i$  minimiert

$$\sum_{i=1}^p (v_{X_i}^2 + v_{Y_i}^2) = \sum_{i=1}^p \Delta_i^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Mit

$$\mathbf{l} = \{X_1 \ Y_1 \ X_2 \ \dots \ Y_p\}^T, \quad \mathbf{v} = \{v_{X_1} \ v_{Y_1} \ v_{X_2} \ \dots \ v_{Y_p}\}^T,$$

$$\mathbf{x} = \{a \ b \ c \ d\}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^T = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ x_1 & y_1 & x_2 & \dots & y_p \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & \dots & x_p \end{Bmatrix}$$

kann (1) auf die gewohnte Form

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (3)$$

des Gauß-Markov-Modells gebracht werden.

Auf Einzelheiten der Lösung dieser Standardaufgabe soll hier nicht eingegangen werden. Es ist aber zu beachten, dass die gewählte Schätzmethode schlechte Ergebnisse liefert, wenn Punkte grobe Lagefehler aufweisen. Diese können z.B. durch grobe Messfehler, Eingabefehler, Deformationen oder falsche Zuordnung entstanden sein und sind besonders dann schwer aufzudecken, wenn sie in Helbepunkten auftreten oder so genannte kleine grobe Fehler

sind. Um sich gegen die negativen Auswirkungen grober Fehler zu schützen und ihre Aufdeckung zu erleichtern, werden robuste Schätzmethoden empfohlen, so unter anderem in CAROSIO (1982), HAHN/BILL (1984), KANANI (2000), NIEMEIER (2002). Auch zur Deformationsanalyse und für Genauigkeitsuntersuchungen in historischen Karten sind robuste Helmert-Transformationen vorgeschlagen worden, z.B. CASPARY/CHEN/KÖNIG (1983), CASPARY/BORUTTA (1986), CASPARY/HAEN/BORUTTA (1990) und BEINEKE (2001).

### 3 Robuste Schätzung

Die Methode der kleinsten Quadrate beruht bekanntlich auf der Minimierung der Summe der Verbesserungsquadrate. Solange die Verbesserungen durch zufällige Messabweichungen verursacht sind, liefert dieses Schätzprinzip optimale Ergebnisse. Treten jedoch grobe Messfehler auf, so zeigen sich diese nicht immer in großen Verbesserungen der betreffenden Beobachtungen, da durch das Schätzverfahren die Beträge der Verbesserungen tendenziell nivelliert werden. Dadurch werden grobe Abweichungen verschleiert und geschätzte Parameter verfälscht. Erste Beispiele für eine robuste Zielfunktion (auch: Verlustfunktion) und die statistischen Grundlagen des robusten Schätzens wurden von HUBER (1964) veröffentlicht. Einen Überblick über die inzwischen ausgereiften und erprobten Verfahren, Untersuchungen zu ihrer Eignung für Parameterschätzungen in der Geodäsie sowie die Darstellung der theoretischen Grundlagen und der Beziehungen zur klassischen Ausgleichsrechnung findet man u.a. in BORUTTA (1988), CASPARY (1988), KOCH (1996) und WICKI (1999).

Die robuste Zielfunktion lautet in allgemeiner Form

$$\sum \rho(v_i), \quad v_i = a_i^T x - 1_i. \quad (4)$$

Sie hat ihr Minimum für

$$\sum \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial x_j} = \sum \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum \psi(v_i) \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

mit  $j = 1, 2, \dots$  . (5)

Für das lineare Modell (3) der Ausgleichsrechnung geht (5) in die Gleichung

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\psi} = \{\psi(v_{X_i}) \ \psi(v_{Y_i}) \ \dots \ \psi(v_{Y_p})\}^T \quad (6)$$

über. Es kommt nun darauf an, die Funktion  $\rho(v_i)$  bzw. ihre Ableitung  $\psi(v_i)$  so zu wählen, dass der damit definierte Schätzer die erwünschten Eigenschaften aufweist. Die o.a. Literatur enthält dafür zahlreiche Beispiele. Für die Lösung von (6) ist es zweckmäßig, folgende Umformung durchzuführen

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{v}, \quad \mathbf{W} = \text{diag} \left( \frac{\psi(v_i)}{v_i} \right) = \text{diag}(w_i). \quad (7)$$

Wird nun  $\mathbf{v}$  aus (3) eingesetzt, so erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{l} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

mit den von  $v_i$  abhängenden „Gewichten“  $w_i$ , das iterativ gelöst werden muss. Allerdings ist bei dieser so genannten iterativ gewichteten Methode der kleinsten Quadrate Vorsicht geboten, wenn (4) nicht konvex ist. Das Minimum wird dann nur bei guten Näherungswerten erreicht. Außerdem kann der Fall auftreten, dass die Minimierung von (4) kein eindeutiges Ergebnis liefert.

### 4 Robuste Helmert-Transformation

Verwendet man die mit (4) gegebene robuste Zielfunktion bei der Schätzung der Transformationsparameter des Modells (1) bzw. (3), so behandelt man die Ziel-Koordinaten  $X_i$  und  $Y_i$  der Punkte  $P_i$  wie unabhängige Beobachtungen. Dies ist jedoch in der Regel nicht gerechtfertigt, da die Koordinaten als Funktionen geodätischer Messungen korreliert sind. Es ist daher sachgerechter, die Koordinaten als Komponenten von 2D-Zufallsvektoren aufzufassen, die die Positionen von Punkten in der Ebene (Zufallsobjekte) eindeutig beschreiben. Die Komponentendarstellung hängt von der im Prinzip beliebigen Wahl eines Koordinatensystems ab. Rechtwinkelige kartesische Koordinatensysteme werden durch vier Größen eingeführt. Die Parameter des Modells (3) drücken die Unterschiede dieser Größen zwischen Start- und Zielsystem aus.

Im Zielsystem sind die Punkte also als Zufallsobjekte aufzufassen, die so an die festen Punkte des Startsystems anzupassen sind, dass gewisse Funktionen der verbleibenden Positionsdifferenzen minimal werden. Wenn diese Positionsdifferenzen durch Koordinatenunterschiede ausgedrückt werden, so sind sie ebenfalls von der Wahl des Koordinatensystems abhängig. Dies ist unschädlich, solange man diese Größen als Beobachtungspaar gemeinsam betrachtet wie in KOCH (1985) oder die Methode der kleinsten Quadrate anwendet, deren Zielfunktion wegen (2) nicht vom Koordinatensystem abhängt. Wird jedoch ein robustes Schätzverfahren gewählt, und (4) mit den Koordinatenverbesserungen nach (1) gebildet, so erhält man von der Wahl des Koordinatensystems abhängige Schätzergebnisse. Besonders deutlich zeigt dies die Bestimmung der „Gewichte“  $w_i = \psi(v_i)/v_i$  nach (7). Diese Abhängigkeit der Schätzung kann vermieden werden, wenn die Zielfunktion (4) mit den Restklaffungen  $\Delta_i$  der Punkte gebildet wird. Da die  $\Delta_i$  auch ohne Koordinatensystem existieren, werden bei einer solchen Modellbildung die Punkte als die Objekte betrachtet, die möglichst gut zur Deckung gebracht werden sollen. Wie dies rechen-technisch bei der Zielfunktion

$$\sum \rho(\Delta_i) = \sum \Delta_i \quad (9)$$

gelöst werden kann, wurde bereits von CASPARY/CHEN/KÖNIG (1983) und HAHN/BILL (1984) gezeigt. Einfach und zuverlässig wird die Lösung wieder, wenn der Algorithmus der iterativ gewichteten Methode der kleinsten Quadrate eingesetzt wird. Für jeden Punkt wird dann ein „Gewicht“  $w_{X_i} = w_{Y_i}$  aus  $w_i = \psi(\Delta_i)/\Delta_i$  berechnet, das für beide Verbesserungen ( $v_{X_i}$ ,  $v_{Y_i}$ ) unabhängig von ihrer konkreten Größe gilt.

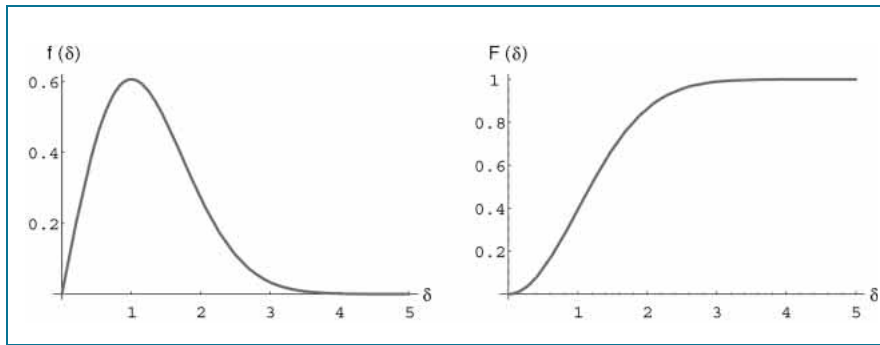


Abb. 1: Dichte- und Verteilungsfunktion der  $\chi_2$ -Verteilung

Etwas diffiziler wird die Situation bei robusten M-Schätzern (z.B. HUBER), die durch Festlegung von Abstimmkonstanten (auch: Tuningkonstanten) an die Varianz der Beobachtungen angepasst werden müssen. Diese Abstimmkonstanten haben unter der Annahme von  $v_i \sim N(0, \sigma^2)$  die Form  $c = k \sigma$  und sind Bestandteil der Definition der Funktion  $\rho(v_i)$  in (4). Der Faktor  $k$  wird meist so festgelegt, dass normalverteilte Verbesserungen mit der Wahrscheinlichkeit  $P$  (z.B.  $P = 95\%$ ), dem Betrage nach kleiner als  $c$  ausfallen. Werden die Residuen  $v_i$  durch die Restklaffungen  $\Delta_i$  ersetzt, so müssen die Abstimmkonstanten angepasst werden, da die  $\Delta_i$  eine  $\chi_2$ -Verteilung besitzen, deren Erwartungswert ungleich Null ist, vgl. CASPARY/HAEN/PLATZ (1990).

Nach PROHOROV/ROZANOV (1969) besitzt die aus  $m$  unabhängig normiert normalverteilten Variablen  $u_i \sim N(0, 1)$  gebildete Zufallsvariable  $x = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2}$  eine zentrale  $\chi_m$ -Verteilung mit  $m$  Freiheitsgraden. Die Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktion von  $x$  hat die Form

$$f(x) = \left[ 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \right]^{-1} x^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (10)$$

Mit  $m = 2$  folgen daraus für die normierten Klaffungen  $\delta_i = \Delta_i / \sigma = \sqrt{v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2} / \sigma$  Dichte und Verteilung, die als Grundlage für die Festlegung der Abstimmkonstanten benötigt werden (siehe Graphen in Abb. 1).

$$f(\delta) = \delta e^{-\frac{\delta^2}{2}}, \quad F(\delta) = \int_0^\delta f(x) dx = 1 - e^{-\frac{\delta^2}{2}} \quad (11)$$

Für den Mittelwert und die Varianz der  $\chi_2$ -Verteilung erhält man:

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \int_0^\infty \delta f(\delta) d\delta = \sqrt{\pi/2} = 1.2533 \\ \sigma_\delta^2 &= \int_0^\infty (\delta - \bar{\delta})^2 f(\delta) d\delta = 2 - \pi/2 = 0.4292. \end{aligned} \quad (12)$$

Soll nun die Abstimmkonstante so festgelegt werden, dass mit Wahrscheinlichkeit  $P$  die Klaffungen kleiner als  $k\sigma$  ausfallen, so kann  $k$  durch Umkehrung der Verteilungsfunktion berechnet werden:

$$k = F^{-1}(P) = \sqrt{-2 \ln(1 - P)} \quad \text{für } 0 \leq P < 1. \quad (13)$$

In der Praxis wird die Standardabweichung  $s$  nicht bekannt sein. Sie muss dann simultan mit den Parametern iterativ geschätzt werden. Dazu empfiehlt es sich, die einfach zu berechnende äußerst robuste Medianabweichung ( $\bar{m}$ ) zu ermitteln, die anschließend noch durch den Erwartungswert von für die normierte Verteilung von  $x$  zu dividieren ist, um eine erwartungstreue Schätzung ( $s$ ) für die Standardabweichung zu halten:

$\bar{m} = \text{med}|x - \text{med}(x)|$   
 $\sigma \rightarrow s = \bar{m} / E(\bar{m})$

$$\bar{m} = \text{med}|x - \text{med}(x)| \quad (14)$$

Für  $x \sim N(\xi, 1)$  erhält man  $E(\bar{m}) = \Phi^{-1}(0.75) = 0.6745$ . Für  $x \sim \chi_2$  gilt der Wert  $E(\bar{m}) = \varepsilon = 0.4485$ , den man durch numerische Näherungsverfahren (z.B. Newton Iteration) aus der Gleichung

$$F(\bar{x} + \varepsilon) - F(\bar{x} - \varepsilon) = 0.5 \quad (15)$$

gewinnt, wobei  $\bar{x} = F^{-1}(0.5) = \sqrt{\ln(4)} = 1.1774$  der Median von  $x$  ist.

Um die Abstimmkonstanten vergleichbar zu machen (siehe Beispiel im nächsten Abschnitt), muss für  $|v_i| \leq k\sigma$  und  $\Delta_i \leq k'\sigma$  dieselbe Wahrscheinlichkeit gewählt werden. Wird zum Beispiel  $k = 1$  festgelegt (bei Normalverteilung entspricht das einer Wahrscheinlichkeit von  $P = 68\%$ ), so muss  $k' = F^{-1}(0.68) = 1.5$  nach Formel (13) gesetzt werden.

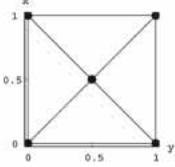
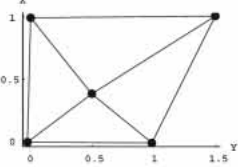
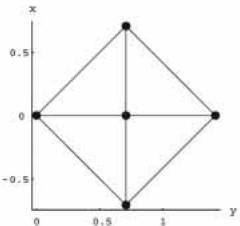
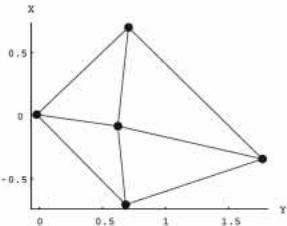
## 5 Beispiel

Um das Verhalten verschiedener Schätzer für die Transformationsparameter des Modells (1) zu vergleichen, wurde eine umfangreiche numerische Studie durchgeführt. Deutliche Unterschiede in den Ergebnissen treten vor allem dann auf, wenn der Anteil grob fehlerhafter Punkte hoch ist. An einem überschaubaren Beispiel soll dies demonstriert werden.

Dazu wurde ein **Test-Punktfeld A** aus fünf identischen Punkten konstruiert (siehe **Tab. 1**), das aus einem als fehlerfrei unterstelltem Startsystem und einem in den Punkten 2 und 5 grob fehlerhaften Zielsystem besteht. Außerdem wurden zu den Koordinaten des Zielsystems normalverteilte Abweichungen mit  $\sigma = 0.01$  addiert. Die Koordinaten des **Test-Punktfeldes B** wurden durch eine einfache Drehung um  $45^\circ$  (jeweils Start- und Zielsystem) aus dem Test-Punktfeld A abgeleitet. Die Punktconstellation beider Test-Punktfelder ist somit – bis auf die absolute Lage in den Koordinatensystemen, bzw. der unterschiedlichen Wahl des Koordinatensystems – identisch.

Die Schätzung der Parameter erfolgte zunächst mit der Methode der kleinsten Quadrate (**MkQ**), dann durch Minimierung der  $L_1$ -Norm in den Varianten  $\sum |v_i| \rightarrow \min$

Tab. 1: Koordinaten und Anordnung der Test-Punktfelder A und B, wobei B gleich A um 45° gedreht entspricht.

| Nr. | Test-Punktfeld A  |     |   |           | Test-Punktfeld B   |           |   |           |
|-----|---|-----|---|-----------|--|-----------|---|-----------|
|     | Startkoordinaten  |     | Zielkoordinaten   |           | Startkoordinaten   |           | Zielkoordinaten   |           |
|     | y   | x   | Y   | X         | y  | x         | Y   | X         |
| 1   | 0.0   | 1.0 | 0.004709  | 0.993808  | 0.707107   | 0.707107  | 0.706058  | 0.699399  |
| 2   | 1.0   | 1.0 | 1.493057  | 1.007303  | 1.414214   | 0.0       | 1.768022  | -0.343480 |
| 3   | 1.0   | 0.0 | 0.981590  | -0.015174 | 0.707107   | -0.707107 | 0.683359  | -0.704818 |
| 4   | 0.0   | 0.0 | -0.021163   | -0.009153 | 0.0  | 0.0       | -0.021437   | 0.008493  |
| 5   | 0.5   | 0.5 | 0.498160  | 0.381458  | 0.707107   | 0.0       | 0.621984  | -0.082521 |
|     |  |     |  |           |  |           |  |           |

(L1-V),  $\sum \Delta \rightarrow \min$  (L1-D), sowie mit dem **Huber-Schätzer** für  $k = 1.0$  (HU-V) und  $k' = 1.5$  (HU-D)

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| < c \\ c \cdot \text{sign}(x) & \text{für } |x| \geq c \end{cases} \quad c = ks \quad (16)$$

und dem **Hampel-Schätzer** für  $k_i = 1.0, 2.0, 4.0$  (HA-V) und  $k'_i = 1.5, 2.5, 4.5$  (HA-D)

$$\psi(x) = \begin{cases} x & \text{für } |x| < c_1 \\ c_1 \cdot \text{sign}(x) & \text{für } c_1 \leq |x| < c_2 \\ c_1 \cdot \frac{c_3 - |x|}{c_3 - c_2} \cdot \text{sign}(x) & \text{für } c_2 \leq |x| < c_3 \\ 0 & \text{für } |x| \geq c_3 \end{cases} \quad c_i = k_i s \quad (17)$$

Auch hier wurden (jeweils für den Huber- und Hampel-Schätzer) die Varianten  $x = v$  (HU-V bzw. HA-V) und  $x = \Delta$  (HU-D bzw. HA-D) berechnet. Die als unbekannt betrachtete Standardabweichung ( $\sigma$ ) wurde in jedem Iterationsschritt aus den Residuen ( $v_i$ ) für HU-V und HA-V bzw. aus den Klaffungen ( $\Delta_i$ ) für HU-D und HA-D mit Hilfe der Medianabweichung (14) neu geschätzt.

Den Abstimmkonstanten  $k_i$  wurden relativ niedrige Werte gegeben, da der Anteil grober Fehler in dem Beispiel sehr hoch ist (2 von 5 Punkten = 40%). Alle Berechnungen nach der iterativ gewichteten Methode der kleinsten Quadrate wurden mit der Einheits-Gewichtsmatrix (**I**) gestartet und mussten ca. 30 mal iteriert werden.

Die in **Tab. 2** zusammengestellten Ergebnisse zeigen sehr deutlich den Einfluss der Wahl des Koordinatensystems auf die robuste Schätzung, wenn die Residuen-Zielfunktion  $\sum \rho(v_i)$  eingesetzt wird. Sowohl die Transformati-

onsparameter Maßstab ( $m$ ) und Drehwinkel ( $\alpha$ ) als auch die Restklaffungen differieren stark für die Schätzungen L1-V und HU-V zwischen den Versionen A und B desselben Punktfeldes. Weniger ausgeprägt ist dieser Effekt bei der Lösung HA-V. Wird dagegen die Abstands-Zielfunktion  $\sum \rho(\Delta_i)$  für die Schätzung angewandt, so ergeben sich für beide Versionen des Punktfeldes exakt identische Ergebnisse.

Ferner kann an den Ergebnissen abgelesen werden, dass der Huber-Schätzer für das gewählte Beispiel weniger gut geeignet ist. Wegen der geringen Punktzahl und des hohen Verschmutzungsgrades kann die  $\psi$ -Funktion den Einfluss der Ausreißer hier zwar dämpfen, aber nicht völlig beseitigen. Die extrem großen Fehler, die eingeführt wurden, werden nicht genügend herabgewichtet und verändern von Iterationsschritt zu Iterationsschritt die geschätzte Varianz so, dass das Verfahren schließlich einen Konvergenzpunkt in der Nähe der MkQ-Lösung findet. Das Beispiel ist natürlich nicht typisch für die Praxis. Dort hat man es meist mit mehr identischen Punkten und weniger, sowie kleineren groben Fehlern zu tun. Die Effekte treten dann nicht so klar zutage sind aber gleichwohl, wenn auch abgeschwächt, vorhanden.

## 6 Schlussfolgerungen

Wenn bei der Schätzung der Parameter eines Modells für die Transformation ungleichartiger Koordinaten robuste Verfahren eingesetzt werden, so ist zu entscheiden, ob die Zielfunktion mit den Verbesserungen der Koordina-

Tab. 2: Gegenüberstellung der Ergebnisse der Parameterschätzungen für die beiden Test-Punktfelder A und B. Erläuterungen zur farblichen Hervorhebung:  
 A ≠ B → Ungleiche Parameterschätzungen für  $\alpha$  und  $m$  (bei HAMPEL-V nur rechnerisch zu erkennen).  
 A = B → Exakt gleiche Parameterschätzung für  $\alpha$  und  $m$ .  
 A = B ≈ MKQ → Gleiche Parameterschätzung, für  $\alpha$  und  $m$ , aber Annäherung an MKQ.

|  | Methode der kleinsten Quadrate | L1-NORM        |                | HUBER - Schätzer |                 | HAMPEL - Schätzer  |  |
|--|--------------------------------|----------------|----------------|------------------|-----------------|--|--|
|  |                                | L1-V           | L1-D           | HU-V<br>k = 1.0  | HU-D<br>k = 1.5 | HA-V<br>k <sub>1</sub> = 1.0, k <sub>2</sub> = 2.0, k <sub>3</sub> = 4.0 | HA-D<br>k <sub>1</sub> = 1.5, k <sub>2</sub> = 2.5, k <sub>3</sub> = 4.5 |
| <b>A</b>   | $x_0$                          | -0.00915       | -0.00915       | -0.00770         | -0.02482        | -0.00414   | -0.01705   |
|  | $y_0$                          | -0.02113       | -0.02112       | -0.01619         | -0.02596        | -0.01490   | -0.01534   |
|  | $\alpha^\circ$                 | 1.46194        | 1.47764        | 1.00987          | 4.02224         | 0.91529  | 1.32324  |
|  | $m$                            | 1.01281        | 1.00329        | 1.01055          | 1.05455         | 0.99941  | 0.99216  |
|  | $\Sigma\rho(\cdot)$            | <b>0.14426</b> | <b>0.60489</b> | <b>0.00859</b>   | <b>0.05150</b>  | <b>0.00052</b>   | <b>0.00859</b>   |
|  | $\Sigma v $                    | 0.97637        | 0.64765        | 0.65219          | 0.79389         | 0.65631  | 0.70641  |
| $\Sigma d$   | 0.74851                        | 0.60489        | 0.61959        | 0.65388          | 0.61728         | 0.63717  |  |
| $\Sigma d^2$   | 0.14426                        | 0.23847        | 0.24716        | 0.17802          | 0.25494         | 0.25523  |  |
| Restklaffungsvektoren  |                                |                |                |                  |                 |  |  |
| <b>B</b>   | $x_0$                          | 0.00908        | 0.00819        | -0.01674         | 0.00081         | 0.00857  | -0.00121   |
|  | $y_0$                          | -0.04682       | -0.02144       | -0.03733         | -0.03591        | -0.01442   | -0.02290   |
|  | $\alpha^\circ$                 | 6.69116        | 6.53601        | 4.23482          | 4.02224         | 0.91849  | 1.32324  |
|  | $m$                            | 1.13688        | 1.11123        | 1.04935          | 1.05455         | 0.99802  | 0.99216  |
|  | $\Sigma\rho(\cdot)$            | <b>0.14426</b> | <b>0.85301</b> | <b>0.04682</b>   | <b>0.05150</b>  | <b>0.00067</b>   | <b>0.00859</b>   |
|  | $\Sigma v $                    | 0.89814        | 0.85301        | 0.88479          | 0.87454         | 0.87074  | 0.89268  |
| $\Sigma d$   | 0.74851                        | 0.72401        | 0.65544        | 0.65388          | 0.61886         | 0.63717  |  |
| $\Sigma d^2$   | 0.14426                        | 0.14594        | 0.17990        | 0.17802          | 0.25756         | 0.25523  |  |
| Restklaffungsvektoren<br>(Zum besseren Vergleich mit A um 45° zurückgedreht) |                                |                |                |                  |                 |  |  |

tenunterschiede der identischen Punkte oder mit denen ihrer Abstände gebildet wird. Nur wenn die Residuen der Punktabstände eingesetzt werden, ist das Schätzergebnis vom Koordinatensystem unabhängig und damit im Einklang mit der Vorstellung des Punktes als Objekt im Raum, der auch ohne Koordinatensystem existiert.

## Literatur

- BEINEKE, D.: Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten. Schriftenreihe UniBwM, Heft 71, 2001
- BORUTTA, H.: Robuste Schätzverfahren für geodätische Anwendungen. Schriftenreihe UniBwM, Heft 33, 1988
- CAROSIO, A.: Robuste Ähnlichkeitstransformation und Interpolation nach dem arithmetischen Mittel. Verm. Photogr. Kulturt. 80, S. 196–200, 1982
- CASPARY, W.; CHEN, Y.Q.; KÖNIG, R.: Kongruenzuntersuchungen in Deformationsnetzen durch Minimierung der Summe der Klaffungsbeträge. Schriftenreihe HSBW M, Heft 9, 1983
- Caspary, W.; BORUTTA, H.: Geometrische Deformationsanalyse mit robusten Schätzungsverfahren. AVN 93, S. 315–326, 1986
- CASPARY, W.: Fehlerverteilungen. Methode der kleinsten Quadrate und robuste Alternativen. ZfV 113, S. 123–133, 1988
- CASPARY, W.; HAEN, W.; BORUTTA, H.: Deformation Analysis by Statistical Methods. Technometrics 32, S. 49–57, 1990
- CASPARY, W.; HAEN, W.; PLATZ, V.: The distribution of length and direction of two-dimensional random vectors. In: VYSKOCIL, P., REIGBER, C. and CROSS, P.A. (Ed.): Global and Regional Geodynamics, S. 232–240, Springer, New York, 1990
- HAHN, M.; BILL, R.: Ein Vergleich der L1- und L2-Norm am Beispiel der Helmerttransformation. AVN 91, S. 440–450, 1984
- HUBER, P.J.: Robust Estimation of a Location Parameter. Annals of Mathematical Statistics, 35, S. 73–101, 1964
- KANANI, E.: Robust Estimators for Geodetic Transformations and GIS. Inst. f. Geodäsie u. Photogr. Mittlg. ETH., Nr. 70, Zürich, 2000
- KOCH, K.-R.: Test von Ausreißern in Beobachtungspaaren. ZfV 110, S. 34–38, 1985
- KOCH, K.-R.: Robuste Parameterschätzung. AVN 103, S. 1–18, 1994
- KOCH, K.-R.: Räumliche Helmert-Transformationen variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und im Gauß-Markoff-Modell. ZfV 127, S. 147–152, 2002
- NIEMEIER, W.: Ausgleichungsrechnung. de Gruyter Lehrbuch, Berlin-New York, 2002
- PROHOROV, Y. V.; ROZANOV, Y. A.: Probability Theory. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1969
- WICKI, F.: Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen. Inst. f. Geodäsie u. Photogr. Mittlg. ETH, Nr. 67, Zürich, 1999

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. WILHELM CASPARY,  
Institut für Geodäsie,  
Universität der Bundeswehr München,  
D-85577 Neubiberg,  
Tel.: ++ 49-89/60 04-34 24,  
Fax: ++ 49-89/60 04-39 06,  
E-Mail: wilhelm.caspary@unibw-muenchen.de

Dr.-Ing. DIETER BEINEKE,  
Institut für Photogrammetrie und Kartographie,  
Lehrstuhl für Topographie und Kartographie,  
Universität der Bundeswehr München,  
D-85577 Neubiberg,  
Tel.: ++ 49-89/60 04-34 50,  
Fax: ++ 49-89/60 04-40 90,  
E-Mail: dieter.beineke@unibw-muenchen.de

## Zusammenfassung

**Zur Transformation ungleichartiger Koordinaten wird ein lineares Modell gebildet, das die Beziehungen zwischen zwei Referenzsystemen approximiert. Werden die Modellparameter nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt, so ist die Zielfunktion wegen  $v_x^2 + v_y^2 = \Delta^2$  eindeutig. Bei robusten Zielfunktionen, die mit Koordinatenverbesserungen  $(v_x, v_y)$  gebildet werden, ist dies jedoch nicht der Fall. Die Autoren schlagen deshalb vor, robuste Zielfunktionen stets mit Positionsabständen  $(\Delta)$  zu formulieren.**

## Abstract

**For the transformation of inhomogeneous coordinates a linear model is formulated, which approximates the relation between the two reference systems. The method of least squares for estimating the model parameters yields on account of  $v_x^2 + v_y^2 = \Delta^2$  an unique objective function. But this is not true for objective functions of robust estimators if they are based on coordinate differences  $(v_x, v_y)$ . Therefore the authors recommend to form objective functions always with position differences  $(\Delta)$ .**