

# Restklaffenverteilung mit der Natural-Neighbour-Interpolation

Jochen Hettwer und  
Wilhelm Benning, Aachen

Der Beitrag beschreibt, wie die Nachteile einer Restklaffenverteilung mit der abstandsgewichteten Interpolation durch den Einsatz der Natural-Neighbour-Interpolation vermieden werden können.

## 1 Die abstandsgewichtete Interpolation

Die abstandsgewichtete Interpolation wird häufig zur Verteilung der bei einer überstimmten Transformation auftretenden Restklaffen eingesetzt. Die Grundidee des Verfahrens besteht darin, eine an der Stelle  $x = (y, x)^T$  zu interpolierende Restklaffe  $z(x)$  als gewichtetes Mittel der Restklaffen  $z_i$  in den Sollpunkten (den Stützpunkten im Sinne der Interpolationstheorie) zu bestimmen:

$$z(x) = \frac{\sum_{i=1}^s \alpha_i z_i}{\sum_{i=1}^s \alpha_i} \quad (1)$$

$s$  bezeichnet hier die Anzahl der Stützpunkte. Zur Festlegung der Gewichte  $\alpha_i$  wird eine Funktion  $w(d_i)$  angesetzt, die das Gewicht  $\alpha_i$  der Restklaffe eines Stützpunktes  $P_i$  in Abhängigkeit der Entfernung

$$d_i = d_i(x) = \sqrt{(x - x_i)^T (x - x_i)} \quad (2)$$

zwischen dem Stützpunkt und der Interpolationsstelle  $x$  festlegt. Damit der Ansatz (1) interpoliert, muss  $w(d_i) \rightarrow \infty$  gelten, wenn  $d_i \rightarrow 0$  geht. Für wachsende  $d_i$  muss  $w(d_i)$  gegen null streben, um den Einfluss weit entfernt liegender Stützpunkte zu begrenzen. Häufig wird eine Hyperbelfunktion der Form

$$w(d_i) = d_i^{-k} \quad (3)$$

verwendet, die genau diese Eigenschaften aufweist. Für den Exponenten  $k$  empfiehlt sich nach BEUCHLE (1981) die Festsetzung  $k = 1.5$ .

Die abstandsgewichtete Interpolation kann durch die Verwendung normierter Gewichte

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\alpha_i}{\sum_{k=1}^s \alpha_k} = \frac{w(d_i)}{\sum_{k=1}^s w(d_k)}, \quad i = 1, \dots, s \quad (4)$$

in die allgemeine Gewichtsfunktionsdarstellung

$$z(x) = \sum_{i=1}^s \bar{\alpha}_i(x) z_i \quad (5)$$

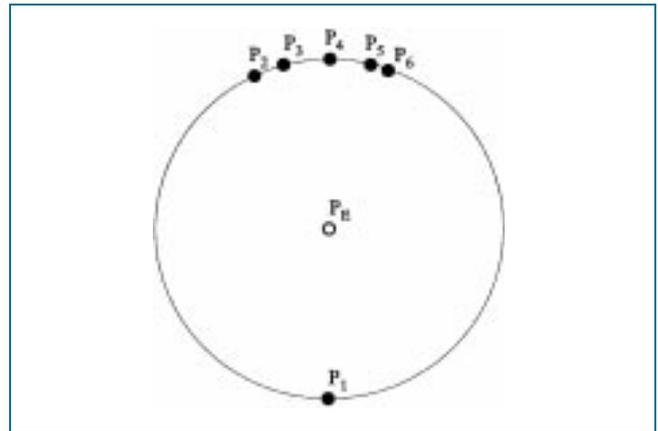


Abb. 1: Beispiel von OVERHOFF

überführt werden: Die Gewichte  $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i(x)$ , die wegen ihrer Abhängigkeit von den Entfernungen  $d_i$  Ortsfunktionen von  $x$  sind, können in dieser Darstellung als Gewichtsfunktionen betrachtet werden, die den Einfluss der jeweiligen Restklaffe  $z_i$  auf das Interpolationsergebnis an der Stelle  $x$  angeben.

Die abstandsgewichtete Interpolation weist Eigenschaften auf, die für eine Restklaffenverteilung gefordert werden. Ein Interpolationswert  $z(x)$  liegt immer zwischen der minimalen und der maximalen gegebenen Restklaffe:  $z_{\min} \leq z(x) \leq z_{\max}$ . Überschwingeffekte mit  $z(x) > z_{\max}$  oder  $z(x) < z_{\min}$  können bei dieser Methode im Gegensatz zu vielen anderen Interpolationsmethoden nicht entstehen. Hervorzuheben ist auch, dass die abstandsgewichtete Methode ein für die Aufgabe der Restklaffenverteilung geeignetes Extrapolationsverhalten aufweist: Je weiter eine Interpolationsstelle  $x$  von den Stützpunkten entfernt liegt, desto geringer sind die Unterschiede zwischen den einzelnen Stützpunktgewichten. Dieser Effekt führt dazu, dass sich die Interpolationswerte bei steigender Entfernung von den Stützpunkten immer mehr dem Mittel der Stützpunkte annähern.

Einige Eigenschaften der abstandsgewichteten Interpolation sind jedoch für eine Restklaffenverteilung störend. OVERHOFF (1981) zeigt am Beispiel der Abb. 1 zwei negative Effekte. In diesem Beispiel sind sechs Stützpunkte  $P_1$  bis  $P_6$  mit gegebenen (eindimensionalen) Restklaffen auf einem Kreis angeordnet. Die Punkte  $P_2$  bis  $P_6$  sind dabei eng benachbart, der Punkt  $P_1$  liegt ihnen gegenüber. Für den Punkt  $P_E$ , der sich im Mittelpunkt des Kreises befindet, soll eine Restklaffe interpoliert werden.

OVERHOFF gibt keinen Radius für den Kreis an, sondern nur Richtungen von  $P_E$  zu den übrigen Punkten. Nimmt man der Einfachheit halber einen Einheitskreis um den Ursprung und ein geodätisches Koordinatensystem an,



**Tab. 1: Zahlenwerte für das Beispiel von OVERHOFF**

Punkt	y	x	$z_i$
$P_1$	0.000	-1.000	-10
$P_2$	-0.454	0.891	6
$P_3$	-0.309	0.951	12
$P_4$	0.000	1.000	14
$P_5$	0.309	0.951	13
$P_6$	0.383	0.924	8
$P_E$	0.000	0.000	?

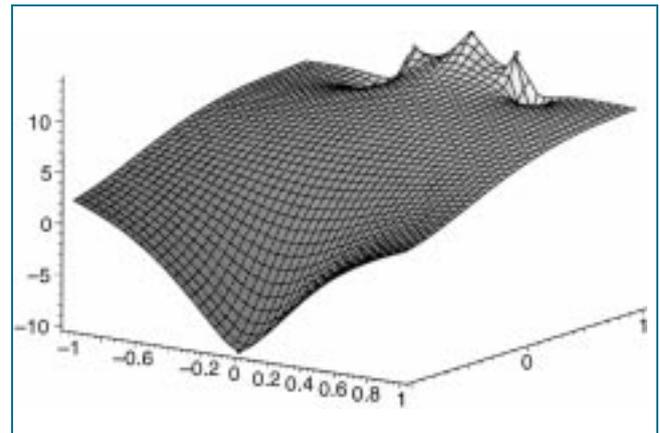
erhält man die in Tabelle 1 aufgeführten Koordinaten. Zusätzlich sind die von OVERHOFF angegebenen Restklaffen  $z_i$  aufgeführt.

Trägt man die interpolierten Restklaffen über der  $xy$ -Ebene auf, erhält man eine grafische Darstellung der mit der abstandsgewichteten Methode erzeugten Interpolationsfunktion (Abb. 2). Als Exponent wurde hierbei  $k = 1.5$  verwendet. Aus Abb. 2 kann abgeleitet werden:

1. Die Häufung der Stützpunkte  $P_2$  bis  $P_6$  führt in großen Teilen des Interpolationsgebietes zu einer Anhebung der Interpolationsfläche. Dies wird auch am Interpolationswert für den Punkt  $P_E$  deutlich, für den sich 6.83 ergibt, was angesichts der Lage der Stützpunkte und der Restklaffen aus Tabelle 1 nicht gerechtfertigt erscheint.
2. Zwischen den Stützpunkten  $P_2$  bis  $P_6$  treten unerwünschte Durchhängeeffekte auf.

Zum ersten Aspekt ist zu bemerken, dass die Punkte  $P_2$  bis  $P_6$  sich in ihrem Einfluss auf das Interpolationsergebnis gegenseitig verstärken. Auf einen Interpolationspunkt wirken fünf Stützpunkte mit positiven Restklaffen und nur einer (der Punkt  $P_1$ ) mit einer negativen Restklaffe. Die Gewichte berücksichtigen nicht die Lage der Stützpunkte zueinander und können deshalb diesem Effekt nicht entgegenwirken. Häufungen von Stützpunkten mit ähnlichen Restklaffen haben daher bei der abstandsgewichteten Interpolation einen überproportional starken Einfluss.

Die Durchhängeeffekte sind auf die Eigenschaft dieses Interpolationsverfahrens zurückzuführen, bei steigendem Abstand vom nächstgelegenen Stützpunkt Interpolationswerte zu liefern, die sich immer mehr dem Mittelwert der Stützwerte annähern. Eine Begrenzung des Wirkungsbereiches der Stützpunkte auf einen bestimmten Radius um den jeweiligen Stützpunkt herum löst dieses Problem nicht, weil nur diejenigen Stützpunkte von der Interpolation ausgeschlossen werden, die ohnehin ein sehr kleines Gewicht besitzen und somit das Ergebnis nicht wesentlich beeinflussen.



**Abb. 2: Mit der abstandsgewichteten Methode berechnete Interpolationsfunktion**

Bei einem zu klein gewählten Radius können Bereiche entstehen, für die kein einziger Stützpunkt verfügbar und somit keine Interpolation möglich ist. Außerdem treten durch die Einführung von Wirkungsradien kleinere Unstetigkeitsstellen in der Interpolationsfunktion auf.

## 2 Strategien zur Vermeidung unerwünschter Interpolationsergebnisse

Die dargestellten unerwünschten Effekte treten nur bei speziellen Anordnungen der Stützpunkte auf. Zu ihrer Vermeidung könnte man daher durch konstruktive Selektion nur gleichmäßig verteilte Stützpunkte zulassen. Dieser Ansatz ist allerdings wenig praxisgerecht, sodass er hier nicht weiter verfolgt wird.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Gewichte so zu modifizieren, dass sie sensitiv auf unterschiedliche Anordnungen der Stützpunkte reagieren. Ansätze in dieser Richtung wurden von OVERHOFF entwickelt und beru-

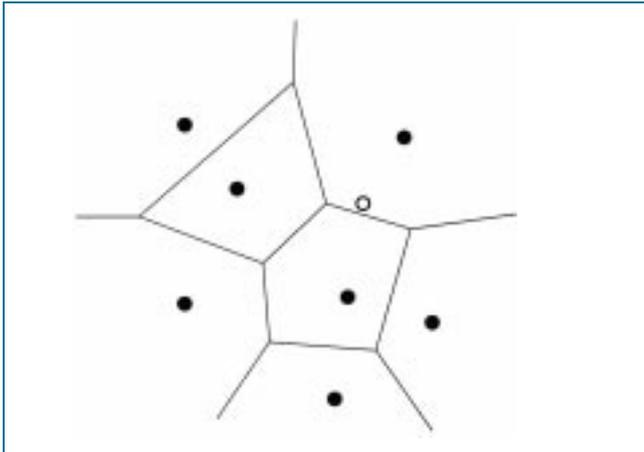


Abb. 3: Voronoi-Diagramm

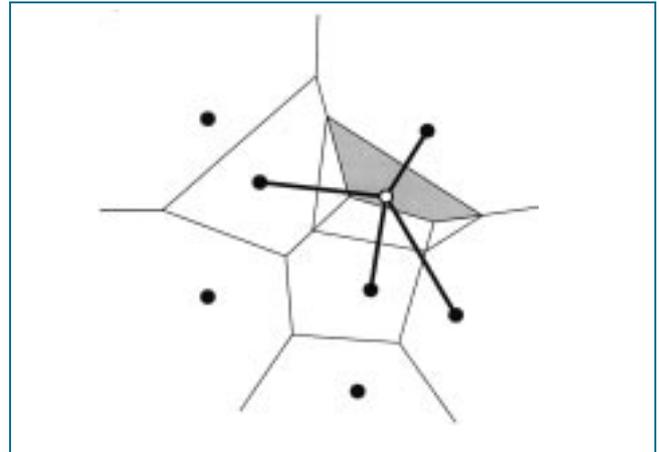


Abb. 4: Voronoi-Zellen zweiter Ordnung und Natural Neighbours

hen im Wesentlichen auf der Kombination von Abstands- und Winkelgewichten (vgl. OVERHOFF 1981, OVERHOFF und SCHWARTZ 1983, OVERHOFF 1984). Diese Verfahren sind jedoch sehr rechenaufwändig und erzeugen kleinere Unstetigkeitsstellen, die im Sinne einer nachbarschaftstreuen Restklaffenverteilung nicht erwünscht sind. Deshalb soll hier ein anderer Weg beschritten werden. Zu diesem Zweck werden zunächst die Konzepte des Voronoi-Diagramms und der Sibson-Koordinaten vorgestellt.

### 3 Voronoi-Diagramm und Sibson-Koordinaten

Gegeben sei eine Menge  $M$  von Punkten  $P_i$  in einer Ebene mit den Punktkoordinaten  $x_i \in \mathbb{R}^2$ . Das diesen Punkten zugeordnete *Voronoi-Diagramm* unterteilt die Ebene derart, dass einem Punkt  $P_i$  der Bereich der Ebene zugeordnet wird, der näher an  $P_i$  als an jedem anderen Punkt aus  $M$  liegt (Abb. 3). Der einem Punkt zugeordnete Bereich wird dann als *Voronoi-Zelle* von  $P_i$  bezeichnet. Formal lässt sich die Voronoi-Zelle  $T_i$  eines Punktes  $P_i$  folgendermaßen charakterisieren (GREEN und SIBSON 1977, SIBSON 1980):

$$T_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_i\| < \|x - x_k\| \forall k \neq i\} \quad (6)$$

Alle Voronoi-Zellen sind konvexe Polygone. Die Grenze zwischen den Voronoi-Zellen zweier benachbarter Punkte  $P_i$  und  $P_j$  wird durch die Mittelsenkrechte ihrer Verbindungsgeraden gebildet. Die Punkte auf der Grenze haben von beiden Punkten denselben Abstand. Die im Voronoi-Diagramm auftretenden Knoten sind die geometrischen Orte derjenigen Punkte, die von mindestens drei Punkten aus  $M$  gleich weit entfernt sind. Voronoi-Zellen im Innenbereich von  $M$  sind geschlossen. Die Zellen derjenigen Punkte aus  $M$ , die auf der konvexen Hülle (dem äußeren Rand) von  $M$  liegen, sind jedoch nach außen hin offen, weil der Bereich der Punkte, der näher an einem Randpunkt  $P_i$  als an jedem anderen Punkt aus  $M$  liegt, nach außen hin nicht begrenzt ist (Abb. 3). Das Voronoi-Diagramm ist eng verwandt mit der *Delaunay-Triangulation* der Punktmenge  $M$  und kann aus dieser abgeleitet werden (AURENHAMMER 1991, BENNING 1995).

Das Konzept der Voronoi-Zelle kann erweitert werden auf das Konzept der Voronoi-Zelle zweiter Ordnung. Dazu betrachte man Abb. 4. Es ist wieder das Voronoi-Diagramm aus Abb. 3 dargestellt. Der nicht ausgefüllte Punkt, der im Folgenden mit  $P_n$  bezeichnet werden soll, wurde nachträglich zur Menge  $M$  hinzugefügt. Man erkennt, dass seine – nachträglich konstruierte – Voronoi-Zelle in vier Bereiche unterteilt ist, die als *Voronoi-Zellen zweiter Ordnung* bezeichnet werden. Eine der vier Zellen ist in der Abbildung grau eingefärbt. Für die Punkte innerhalb einer solchen Zelle gilt, dass der Punkt  $P_n$  ihr nächster Punkt aus  $M$  und der entsprechende Nachbar außerhalb der Zelle ihr zweitnächster Punkt aus  $M$  ist. Eine Voronoi-Zelle zweiter Ordnung  $T_{ij}$  lässt sich daher allgemein folgendermaßen charakterisieren (SUKUMAR 1998):

$$T_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_i\| < \|x - x_j\| < \|x - x_k\| \forall k \neq i, j\} \quad (7)$$

Der Index  $i$  bezeichnet hier den zu den Punkten der Zelle nächsten Punkt aus  $M$ , der Index  $j$  den zweitnächsten Punkt aus  $M$ . Zur Unterscheidung von einer Voronoi-Zelle zweiter Ordnung aus (7) wird die Voronoi-Zelle aus (6) auch als Voronoi-Zelle erster Ordnung bezeichnet.

Eine Zelle  $T_{ij}$  ist nur dann nicht-leer, wenn die Zellen  $T_i$  und  $T_j$  benachbart sind. Auch die Voronoi-Zellen zweiter Ordnung sind konvexe Polygone, und die Vereinigungsmenge aller Zellen zweiter Ordnung zu einem gegebenen (nächsten) Punkt  $P_i$  entspricht genau der Zelle  $T_i$  erster Ordnung (vgl. Abb. 4):

$$\bigcup T_{ij} = T_i \quad (8)$$

Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten der Menge  $M$  können ebenfalls aus dem Voronoi-Diagramm abgeleitet werden: Alle Punkte aus  $M$ , deren Voronoi-Zellen an die Voronoi-Zelle eines Punktes  $P_i$  angrenzen, werden als *Natural Neighbours* von  $P_i$  bezeichnet. Der Punkt  $P_n$  in Abb. 4 besitzt z.B. vier Natural Neighbours, mit denen er in der Abbildung durch dicke schwarze Linien verbunden ist. Man erkennt außerdem, dass für jeden Natural Neighbour von  $P_n$  genau eine Voronoi-Zelle zweiter Ordnung existiert, die zusammen die Voronoi-



Zelle von  $P_n$  bilden. Einem Natural Neighbour ist dabei diejenige Zelle zweiter Ordnung zugeordnet, zu der die Grenze zwischen dem Punkt  $P_n$  und dem Natural Neighbour gehört. Die grau eingefärbte Zelle zweiter Ordnung in Abb. 4 gehört demnach zu dem darüberliegenden Natural Neighbour.

Auf der Grundlage des Konzepts der Voronoi-Zellen zweiter Ordnung lassen sich lokale Koordinaten einer Position  $x$  in Bezug auf ihre Natural Neighbours definieren. Sei  $|T_x|$  der Flächeninhalt der  $x$  zugeordneten Voronoi-Zelle, die nachträglich in ein bestehendes Voronoi-Diagramm eingefügt wird, und  $|T_{xi}|$  der Flächeninhalt der Zelle zweiter Ordnung mit  $P_i$  als zugeordnetem Natural Neighbour, dann lässt sich die sogenannte *Sibson-Koordinate*  $s_i(x)$  für  $x$  in Bezug auf ihren Natural Neighbour  $P_i$  durch den Quotienten

$$s_i(x) = \frac{|T_{xi}|}{|T_x|} \quad (9)$$

angeben. In Abb. 4 entspricht die Sibson-Koordinate des Punktes  $P_n$  in Bezug auf den darüberliegenden Natural Neighbour dem Quotienten der Flächeninhalte der grau eingefärbten Voronoi-Zelle zweiter Ordnung und der gesamten Zelle von  $P_n$ .

Sibson-Koordinaten können für jede Position  $x$  innerhalb der konvexen Hülle der Punktmenge  $M$  berechnet werden, wobei die sich jeweils ergebene Voronoi-Zelle  $T_x$  und die darin befindlichen Voronoi-Zellen zweiter Ordnung zu verwenden sind. Für Positionen auf oder außerhalb der konvexen Hülle ist dies jedoch nicht möglich, weil die beteiligten Voronoi-Zellen dann nicht mehr geschlossen sind.

#### 4 Die Natural-Neighbour-Interpolation mit Sibson-Koordinaten

Sibson-Koordinaten beinhalten folgende funktionale Eigenschaften:

1. Für die Summe aller Sibson-Koordinaten einer Position  $x$  gilt

$$\sum_i s_i(x) = 1 \quad (10)$$

Diese Eigenschaft folgt direkt aus (8) und (9).

2. Für jede Sibson-Koordinate gilt

$$0 \leq s_i(x) \leq 1 \quad (11)$$

Die Beziehung  $0 \leq s_i(x)$  folgt direkt aus der Definition der Sibson-Koordinate (9). Da gleichzeitig die Summe aller Sibson-Koordinaten nach (10) eins ist, kann eine einzelne Sibson-Koordinate nicht größer als eins sein, womit sich  $s_i(x) \leq 1$  ergibt.

3. Sibson-Koordinaten sind lokal begrenzt:  $s_i(x) > 0$  gilt nur dann, wenn  $P_i$  ein Natural Neighbour von  $x$  ist. Ansonsten ist die Zelle  $T_{xi}$  leer, was mit (9) zu  $s_i(x) = 0$  führt.
4. Liegt die Position  $x$  exakt auf einem Punkt  $P_i \in M$ , sind die Zellen  $T_x$ ,  $T_i$  und  $T_{xi}$  identisch. Daher ist in diesem Fall  $s_i(x) = s_i(x_i) = 1$ . Da gleichzeitig alle anderen Voronoi-Zellen zweiter Ordnung  $T_{xj}$  mit  $j \neq i$

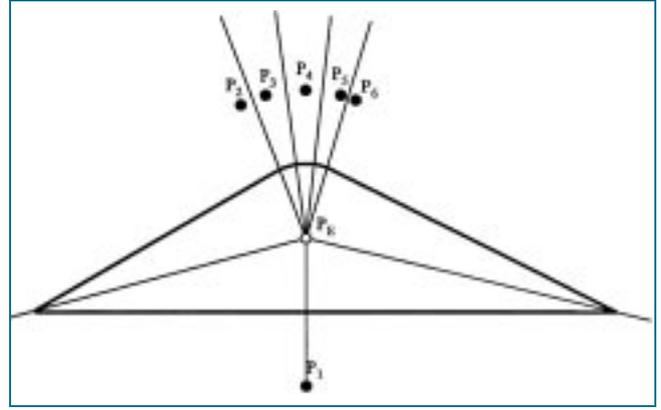


Abb. 5: Voronoi-Diagramm des OVERHOFF-Beispiels

leer sind, gilt für alle übrigen Sibson-Koordinaten  $s_j(x) = s_j(x_i) = 0$ . Dieser Sachverhalt lässt sich besonders elegant mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{ij}$  darstellen, das im Fall  $i = j$  den Wert eins und im Fall  $i \neq j$  den Wert null hat:

$$s_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (12)$$

Diese Eigenschaften der Sibson-Koordinaten sind denen der normierten Gewichte  $\bar{\alpha}_i(x)$  der abstandsgewichteten Interpolation aus (4) sehr ähnlich, sodass es sich aus dieser Sicht heraus anbietet, Sibson-Koordinaten als Gewichte in (5) zu verwenden. Sowohl normierte Abstandsgewichte als auch Sibson-Koordinaten weisen die Eigenschaften 1, 2 und 4 auf (bei den normierten Abstandsgewichten im Fall der Eigenschaft 4 zumindest im Sinne entsprechender Grenzwerte). Die Eigenschaft 4 ist dabei besonders wichtig: Besitzt ein Gewichtsansatz diese Eigenschaft, interpoliert der Gewichtsansatz (5). Gegenüber den normierten Abstandsgewichten sorgen Sibson-Koordinaten mit Eigenschaft 3 zusätzlich dafür, dass nur die Natural Neighbours als Stützpunkte zur Bestimmung des Interpolationswertes herangezogen werden. Die Sibson-Koordinaten für die übrigen Stützpunkte sind dagegen null. Aus diesem Grund wird die Interpolation mit Sibson-Koordinaten als *Natural-Neighbour-Interpolation* bezeichnet. Sie wurde erstmalig von ROSCHLAUB (1999) zur Restklaffeninterpolation eingesetzt.

Am Beispiel von OVERHOFF (Tab. 1) soll nun demonstriert werden, dass die Natural-Neighbour-Interpolation gegenüber der abstandsgewichteten Interpolation nicht nur den Vorteil einer verfahrensinhärenten lokalen Stützpunktauswahl bietet, sondern zusätzlich in der Lage ist, den überproportionalen Einfluss von Stützpunkthäufungen sinnvoll zu begrenzen.

Abb. 5 zeigt das Voronoi-Diagramm für das Beispiel aus Abb. 1. Für den Punkt  $P_E$  sind zusätzlich die Voronoi-Zellen zweiter Ordnung eingetragen. Man erkennt, dass speziell die Flächen der Voronoi-Zellen zweiter Ordnung für die Punkte  $P_3$ ,  $P_4$  und  $P_5$  im Vergleich zu derjenigen des Punktes  $P_1$  sehr klein sind. Generell gilt, dass die Größe der einzelnen Voronoi-Zellen von der lokalen Dichte der Stützpunkte abhängig ist. In Regionen mit wenig Stützpunkten sind die einzelnen Voronoi-Zellen verhältnismäßig groß, in Regionen mit vie-

**Tab. 2: Natural-Neighbour-Interpolation für das Beispiel von OVERHOFF (gerundete Werte)**

Punkt	$s_i(x)$	$z_i$	$s_i(x)z_i$
$P_1$	0.4774	-10	-4.7744
$P_2$	0.2204	6	1.3224
$P_3$	0.0124	12	0.1488
$P_4$	0.0164	14	0.2295
$P_5$	0.0109	13	0.1414
$P_6$	0.2625	8	2.1000
Summe	1.0000		-0.8324

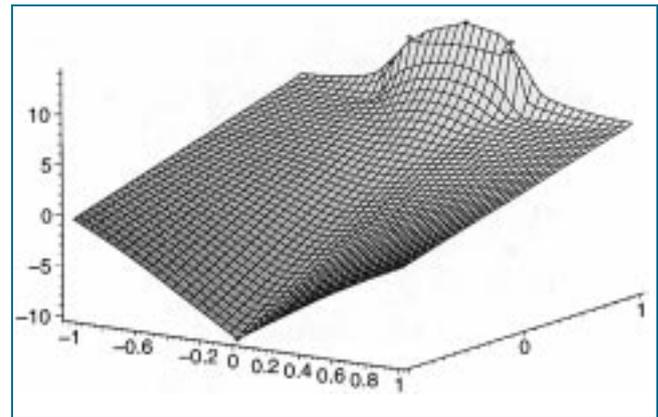
len Stützpunkten dagegen klein. Weil die entsprechenden Voronoi-Zellen zweiter Ordnung immer nur einen Teil bzw. höchstens die gesamte Voronoi-Zelle erster Ordnung abdecken, werden den in einer Stützpunkthäufung liegenden Stützpunkten automatisch geringere Gewichte zugewiesen.

Tab. 2 zeigt, welche Zahlenwerte sich bei der Natural-Neighbour-Interpolation für das OVERHOFF-Beispiel ergeben. Für den Punkt  $P_E$  erhält man einen Interpolationswert von  $-0.83$ .

Ein Nachteil der Sibson-Koordinaten besteht darin, dass sie nur innerhalb der konvexen Hülle der Stützpunkte berechenbar sind. Extrapolationen sind deshalb mit ihnen nicht ohne weiteres möglich. Um dieses Problem zu umgehen, kann jedoch die Extrapolationseigenschaft der abstandsgewichteten Methode ausgenutzt werden: Dazu werden zunächst einige Punkte auf dem Rand des gewünschten Bearbeitungsgebietes abstandsgewichtet interpoliert und dann als fingierte Stützpunkte für die Natural-Neighbour-Interpolation mitverwendet. Aufgrund der lokal begrenzten Wirksamkeit der Stützpunkte hat ein solches Vorgehen nur einen geringen Einfluss auf die Ergebnisse im Innenbereich.

Um analog zu Abb. 2 die aus der Natural-Neighbour-Interpolation abgeleitete Interpolationsfunktion darzustellen, wurden zunächst für die vier Punkte  $(1,1)$ ,  $(-1,1)$ ,  $(1,-1)$  und  $(-1,-1)$  fingierte Stützwerte berechnet. Damit ergibt sich die in Abb. 6 dargestellte Funktion. Man erkennt im Vergleich zu Abb. 2 den deutlich gleichmäßigeren Verlauf. Nach WATSON (1992) verläuft eine mit der Natural-Neighbour-Interpolation berechnete Interpolationsfunktion analog zu einem Gummistück, das über die Stützpunkte gespannt wird. Die Vorstellung von einer sich an die Stützpunkte anpassenden elastischen Membran erscheint verschiedentlich als Kriterium für eine optimale Restklaffenverteilung in der Literatur und hat auch die Entwicklung ausgleichungstechnischer Methoden zur nachbarschaftstreuen Anpassung motiviert (vgl. GIELSDORF und GRÜNDIG 1997).

Des Weiteren ist anzumerken, dass eine mit der Natural-Neighbour-Interpolation berechnete Interpolationsfunktion stetig und in allen Punkten mit Ausnahme der Stützpunkte differenzierbar ist (SIBSON 1980). Die Natural-Neighbour-Interpolation besitzt darüber hinaus die Eigenschaft der *linearen Vollständigkeit*: Sie reproduziert lineare Stützwertfelder der Form



**Abb. 6: Mit der Natural-Neighbour-Interpolation berechnete Interpolationsfunktion**

$$z(x) = a + b^T x \text{ mit } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^2 \tag{13}$$

exakt (SUKUMAR 1998). Eine weitere Eigenschaft ist auf den ersten Blick etwas überraschend: Ein Interpolationswert wird bei der Natural-Neighbour-Interpolation folgendermaßen berechnet:

$$z(x) = \sum_{i=1}^{v_x} s_i(x)z_i \tag{14}$$

Die Summe läuft hier der Einfachheit halber nicht über alle  $s$  Stützpunkte, sondern nur über die für die Interpolation relevanten  $v_x$  Natural Neighbours des jeweiligen Interpolationspunktes, weil die Sibson-Koordinaten der übrigen Stützpunkte ohnehin null sind. Ersetzt man in (14) die Stützwerte  $z_i$  und den Interpolationswert  $z(x)$  durch die jeweiligen Punktkoordinaten, bleibt die Gleichung trotzdem gültig (SIBSON 1980):

$$x = \sum_{i=1}^{v_x} s_i(x)x_i \tag{15}$$

Diese Eigenschaft wird in der Literatur als *lokale Koordinateneigenschaft* bezeichnet.

## 5 Berechnung des Natural-Neighbour-Interpolanten

Zur Berechnung der Sibson-Koordinaten für die Natural-Neighbour-Interpolation kann z.B. der Algorithmus von WATSON verwendet werden (SUKUMAR 1998) – allerdings mit dem Nachteil, dass es hiermit nicht möglich ist, Interpolationswerte für Punkte auf den Dreiecksseiten der zum Voronoi-Diagramm der Stützpunkte dualen Delaunay-Triangulation zu berechnen. Deshalb wird hier ein modifiziertes Verfahren angegeben, das die Eckpunkte der benötigten Voronoi-Zellen zweiter Ordnung explizit berechnet:

1. Zu Beginn wird eine Delaunay-Triangulation der Stützpunkte durchgeführt. Die Eckpunkte der gebildeten Dreiecke, die Radien ihrer Umkreise sowie die Mittelpunktkoordinaten der Umkreise werden im weiteren Verlauf benötigt und müssen daher gespeichert



- werden. Alle weiteren Schritte werden für jede zu interpolierende Stelle  $x$  durchgeführt.
2. Die Natural Neighbours von  $x$  müssen bestimmt werden. Dazu bietet sich die Verwendung des lokalen Umkreiskriteriums nach LAWSON an (LAWSON 1977): Die Eckpunkte der Dreiecke, in deren Umkreis  $x$  liegt, sind Natural Neighbours von  $x$ . Da ein Stützpunkt gleichzeitig Eckpunkt mehrerer Delaunay-Dreiecke ist, werden die Natural Neighbours mehrfach gefunden, sodass überflüssige Mehrfachverweise aussortiert werden müssen. Die Natural Neighbours sowie die gefundenen Dreiecke werden gespeichert.
  3. Die gefundenen Natural Neighbours werden im Uhrzeigersinn sortiert. Dazu können Richtungswinkel von  $x$  zu den Natural Neighbours benutzt werden: Paralleles Sortieren der Richtungswinkel und der zugehörigen Natural Neighbours erzeugt die gewünschte Reihenfolge.
  4. In einer Schleife über die sortierten Natural Neighbours werden die zugehörigen Voronoi-Zellen zweiter Ordnung konstruiert. Für jeden Natural Neighbour wird zunächst sein Vorgänger und sein Nachfolger im sortierten Feld der Natural Neighbours bestimmt. Die Endpunkte der dem aktuellen Natural Neighbour zugewandten Seite der Voronoi-Zelle zweiter Ordnung können als Mittelpunkte von Kreisen durch drei gegebene Punkte bestimmt werden: Der erste Endpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises durch  $x$ , den vorhergehenden und den aktuellen Natural Neighbour. Der zweite Endpunkt ist der Mittelpunkt des Kreises durch  $x$ , den aktuellen und den folgenden Natural Neighbour.
  5. Die Eckpunkte der Zelle zweiter Ordnung werden bestimmt, die innerhalb der Voronoi-Zelle von  $x$  liegen. Zu diesem Zweck werden die in Schritt 2 gefundenen Dreiecke erneut durchsucht. Wenn ein solches Dreieck den aktuellen Natural Neighbour als Eckpunkt enthält, ist der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ein Eckpunkt der zu konstruierenden Voronoi-Zelle zweiter Ordnung.
  6. Alle Eckpunkte der gesuchten Zelle zweiter Ordnung sind nun bekannt. Um die Fläche der Zelle aus den Punktkoordinaten berechnen zu können, müssen die Punkte vorher im Uhrzeigersinn sortiert werden. Dies kann analog zu Schritt 3 über Richtungswinkel erfolgen, wobei als Bezugspunkt der Mittelpunkt der äußeren Kante der Voronoi-Zelle verwendet werden kann, der durch die Mittelung der Eckpunktkoordinaten aus Schritt 4 berechenbar ist. Paralleles Sortieren der Richtungswinkel und der Punktkoordinaten liefert die Koordinaten in der richtigen Reihenfolge.
  7. Der Flächeninhalt  $|T_{xi}|$  der Voronoi-Zelle zweiter Ordnung kann aus den Koordinaten ihrer Eckpunkte berechnet werden. Dieser Flächeninhalt wird für die weitere Verwendung gespeichert. Anschließend geht man zu Schritt 4 zurück und berechnet die Zelle zweiter Ordnung für den nächsten Natural Neighbour. Wenn die Flächeninhalte aller Zellen zweiter Ordnung berechnet sind, geht es weiter mit Schritt 8.
  8. Der Flächeninhalt der Voronoi-Zelle erster Ordnung  $|T_x|$  ergibt sich als Summe der Flächeninhalte der Voronoi-Zellen zweiter Ordnung. Die Division der Flä-

cheninhalte der Zellen zweiter Ordnung durch  $|T_x|$  liefert die benötigten Sibson-Koordinaten, mit denen der Interpolationswert aus dem Schema (14) berechnet werden kann.

Zur Berechnung der Koordinaten eines Kreismittelpunktes  $(y_m, x_m)$  aus drei gegebenen Punkten in Schritt 4 können nach SUKUMAR (1998) folgende Formeln verwendet werden:

$$D = 2[(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)]$$

$$y_m = \frac{(x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(x_1 - x_3) - (x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)(x_2 - x_3)}{D}$$

$$(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)(x_2 - x_3) \tag{16}$$

$$x_m = \frac{(x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2)(y_2 - y_3) - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(y_1 - y_3)}{D}$$

$$(x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(y_1 - y_3) \tag{17}$$

Der Flächeninhalt einer Voronoi-Zelle zweiter Ordnung aus ihren Eckpunktkoordinaten in Schritt 7 kann z.B. mit der Gaußschen Dreiecksformel berechnet werden:

$$2|T_{xi}| = \sum_{i=1}^n y_i(x_{i-1} - x_{i+1}) = \sum_{i=1}^n x_i(y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{18}$$

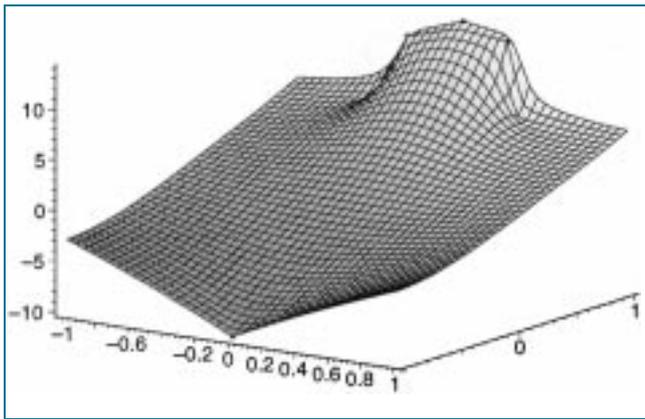
$n$  bezeichnet hier die Anzahl der Eckpunkte der Zelle. Der Rechenaufwand für die Natural Neighbour-Interpolation wird im Wesentlichen durch die Schritte 1 und 2 festgelegt. Die in Schritt 1 verwendete Delaunay-Triangulation weist mit dem divide-and-conquer-Algorithmus (SHAMOS und HOEY 1975, GUIBAS und STOLFI 1985) oder dem plane-sweep-Algorithmus (FORTUNE 1987) eine Komplexität von  $O(n \log n)$  auf. Bei den Geschwindigkeiten heutiger Rechner ist jedoch auch der Einsatz einer relativ langsamen incremental-insertion-Triangulation mit  $O(n^2)$  (GREEN und SIBSON 1977) bei einigen Tausend Stützpunkten kein Problem.

Der Aufwand für eine lineare Suche nach Natural Neighbours in den Triangulationsdreiecken in Schritt 2 wächst quadratisch mit der Zahl der gebildeten Dreiecke. Bei einer sehr großen Zahl von Stützpunkten und damit auch von Dreiecken bietet sich daher an Stelle einer linearen Suche die Verwendung des walking-triangle-Algorithmus (LAWSON 1977) an, bei dem der Rechenaufwand nur linear mit der Zahl der Dreiecke steigt. Bei einigen Tausend Stützpunkten ist jedoch auch die lineare Suche noch ausreichend schnell.

Die übrigen Rechenschritte sind für jeden Interpolationspunkt durchzuführen und beinhalten im Wesentlichen algebraische Operationen oder Sortiervorgänge über i.d.R. einige wenige Elemente. Der Aufwand für diese Schritte steigt linear mit der Zahl der Interpolationspunkte.

## 6 Vergleich mit der multiquadratischen Interpolation

Auch die multiquadratische Interpolation (HARDY 1972, GÖPFERT 1977) wird häufig zur Restklaffenverteilung ein-



**Abb. 7:** Mit der multiquadratischen Methode berechnete Interpolationsfunktion

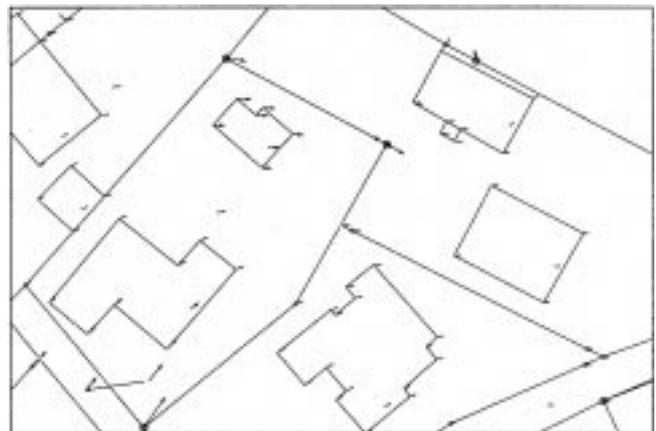
gesetzt (vgl. z.B. WIENS 1986). Deshalb soll an dieser Stelle ein kurzer Vergleich zwischen der Natural-Neighbour-Interpolation und der multiquadratischen Interpolation erfolgen. Abb. 7 zeigt die mit einer linearen Kernfunktion berechnete (ungeglättete) Interpolationsfunktion für das OVERHOFF-Beispiel. Da die multiquadratische Interpolation generell ein für die Restklaffenverteilung ungeeignetes Extrapolationsverhalten aufweist, wurden hier ebenfalls zusätzlich die bei der Natural-Neighbour-Interpolation eingeführten fingierten Stützpunkte verwendet. Man erkennt, dass diese Interpolationsfunktion derjenigen aus Abb. 6 sehr ähnlich ist.

Allgemein ergab sich aus einer Reihe von Testbeispielen, dass die Natural-Neighbour-Interpolation prinzipiell ähnliche Interpolationsfunktionen liefert wie die multiquadratische Interpolation. Die multiquadratischen Interpolationsfunktionen besitzen einen etwas harmonischeren Verlauf; der bei der Natural-Neighbour-Interpolation auftretende starke lokale Bezug ist bei ihnen weniger stark ausgeprägt. Dies ist dadurch zu erklären, dass die multiquadratische Interpolation ebenso wie die abstandsgewichtete ein globales Interpolationsverfahren ist, das alle Stützwerte zur Berechnung eines Interpolationswertes verwendet.

Wesentliche Unterschiede zwischen beiden Verfahren ergeben sich im Rechenaufwand und im Speicherplatzbedarf. Bei der multiquadratischen Interpolation muss ein Gleichungssystem gelöst werden, dessen Unbekanntenzahl durch die Anzahl der Stützpunkte gegeben ist und dessen Koeffizientenmatrix zwar symmetrisch, aber vollbesetzt ist. Der Rechenaufwand steigt daher kubisch, der Speicherplatzbedarf quadratisch mit der Zahl der Stützpunkte. Bei Interpolationsaufgaben mit vielen Stützpunkten ist die multiquadratische Interpolation daher schon aus rein rechentechnischen Gründen nicht geeignet, sodass hier die Natural-Neighbour-Interpolation eine sinnvolle Alternative bietet.

## 7 Anwendung auf reale Daten

Die Abbildungen 8 bis 10 zeigen die Restklaffenverteilungen, die sich mit der abstandsgewichteten, der multiquadratischen und der Natural-Neighbour-Interpolation



**Abb. 8:** Mit der abstandsgewichteten Interpolation berechnete Restklaffen



**Abb. 9:** Mit der multiquadratischen Interpolation berechnete Restklaffen



**Abb. 10:** Mit der Natural-Neighbour-Interpolation berechnete Restklaffen

in einem realen Datenbeispiel ergeben. Die fünf vorhandenen Sollpunkte sind dabei zur Unterscheidung von den übrigen Punkten durch eine aus zwei Kreisen bestehende Signatur dargestellt. Zur Berechnung der Restklaffen wurde das am Geodätischen Institut der RWTH Aachen entwickelte Homogenisierungsprogramm KATHOM verwendet, in dem alle drei Ansätze implementiert sind.

Zwischen den mit der multiquadratischen Interpolation (Abb. 9) und den mit der Natural-Neighbour-Interpolation (Abb. 10) interpolierten Restklaffen besteht in diesem Beispiel praktisch kein Unterschied. Es ergibt sich ein sehr homogenes und gut an die Sollpunktrestklaffen angepasstes Vektorfeld.

Bei der abstandsgewichteten Interpolation (Abb. 8) nimmt der Betrag der interpolierten Restklaffen mit steigender Entfernung vom jeweiligen Sollpunkt schnell ab. Hier zeigen sich deutlich die für die Methode typischen Durchhängeeffekte. Im Gegensatz zu den beiden anderen Verfahren liefert die abstandsgewichtete Interpolation in diesem Beispiel nur eine unzureichende Restklaffenverteilung.

## Literatur

- AURENHAMMER, F.: Voronoi diagrams – a survey of a fundamental geometric data structure. *ACM Computing Surveys*, 23: 345–405, 1991
- BENNING, W.: Nachbarschaftstreue Restklaffenverteilung für Koordinatentransformationen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 120: 16–25, 1995
- BEUCHLE, E.: Untersuchungen zur Anwendung der freien Stationierung in der Grundstücksvermessung. Dissertation, Universität Stuttgart, 1981
- FORTUNE, S.: A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2: 153–174, 1987
- GIELSDORF, F.; GRÜNDIG, L.: Nachbarschaftstreue Anpassung auf der Basis des Membranmodells. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 122: 208–218, 1997
- GÖPFERT, W.: Interpolationsergebnisse mit der Multiquadratischen Methode. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 102: 457–460, 1977
- GREEN, P. J.; SIBSON, R.: Computing Dirichlet tessellations in the plane. *The Computer Journal*, 21: 168–173, 1977
- GUIBAS, L.; STOLFI, J.: Primitives for the Manipulation of General Subdivisions and the Computation of Voronoi Diagrams. *ACM Transactions on Graphics*, 4: 74–123, 1985
- HARDY, R. L.: Geodetic applications of multiquadric analysis. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, 79: 398–406, 1972.
- LAWSON, C. L.: Software for  $C^1$  surface interpolation. In: RICE, J. R. (Herausgeber): *Mathematical Software III*, Band 3. N. Y. Academic Press, New York, 1977
- OVERHOFF, W.: Zum Problem der Umformung mit Abstandsgewichten (Restklaffenbeseitigung). *Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen*, 14: 110–115, 1981.
- OVERHOFF, W.; SCHWARTZ, W.: Umformung mit Abstandsgewichten. *Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen*, 16: 44–52, 1983
- OVERHOFF, W.: Fehlerverteilung nach Winkel- und Abstandsgewichten bei der Koordinatentransformation. *Vermessungswesen und Raumordnung*, 46: 210–215, 1984
- ROSCHLAUB, R.: Klassifikation und Interpolation mittels affin invarianter Voronoidiagramme auf der Basis eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in großmaßstäbigen Geoinformationssystemen. Reihe C 509, Deutsche Geodätische Kommission, 1999.

SHAMOS, M.; HOEY, D.: Closest-point problems. In: *Proceedings of the 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, Seiten 151–162, New York, 1975. IEEE

SIBSON, R.: A vector identify for the Dirichlet tessellation. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 87: 151–155, 1980

SUKUMAR, N.: *The Natural Element Method in Solid Mechanics*. Dissertation, Northwestern University, Evanston, IL, 1998

WATSON, D. F.: *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*. Pergamon Press, Oxford, 1992

WIENS, H.: Flurkartenerneuerung mittels Digitalisierung und numerischer Bearbeitung unter besonderer Berücksichtigung des Zusammenschlusses von Inselkarten zu einem homogenen Rahmenkartenwerk. Nummer 17 in Schriftenreihe des Instituts für Kartographie und Topographie der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn. Kirschbaum Verlag, Bonn, 1986

Anschrift der Verfasser:

Dipl.-Ing. JOCHEN HETTWER und Univ.-Prof. Dr.-Ing. WILHELM BENNING, Geodätisches Institut der RWTH Aachen, Templergraben 55, 52056 Aachen.

## Zusammenfassung

**Dieser Aufsatz beschreibt die Nachteile der abstandsgewichteten Interpolation beim Einsatz zur Restklaffenverteilung und zeigt, wie sie durch die Verwendung von Sibson-Koordinaten als Gewichten (Natural-Neighbour-Interpolation) umgangen werden können. Ein Vergleich mit der multiquadratischen Interpolation ergibt, dass die Natural-Neighbour-Interpolation speziell bei Problemen mit einer großen Zahl von Stützpunkten einen geringeren Rechenaufwand erfordert. Beide Methoden liefern dennoch quasi identische Ergebnisse.**

## Summary

**This paper describes the disadvantages of inverse distance weighting for the interpolation of residuals arising at control points and shows how better results can be obtained by using Sibson coordinates as weights (natural neighbour interpolation). A comparison with Hardy's multiquadric method yields lower computational costs for the natural neighbour interpolation especially for big numbers of data points. The results of both methods are nevertheless quasi identical.**