

# Ausgleichung der Richtungsbeobachtungen unter Verwendung des äquivalenten Satzes von Schreiberschen Winkeln

## Adjustment of Directional Observations Using the Equivalent Set of Schreiber's Angles

Roman Kadaj

In diesem Beitrag wird nachgewiesen, dass Richtungsbeobachtungen mit einer Orientierungsunbekannten von jeder Station bei einer Netzausgleichung mit der Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate der sogenannten Schreiberschen Winkel äquivalent werden, unter der Voraussetzung, dass eine spezielle Methode zur Gewichtung dieser Winkel verwendet wird. Schreibersche Winkel werden a posteriori als Richtungsunterschiede berechnet. Wenn wie üblich angenommen wird, dass die Richtungsbeobachtungen nicht korreliert sind, wird der Satz der verwendeten Schreiberschen Winkel durch eine diagonale Gewichtsmatrix charakterisiert. Jedes andere Winkelsystem, das auf Richtungsbeobachtungen basiert, hat diese Eigenschaft nicht. Das vorgeschlagene Verfahren hat mehrere praktische Vorteile. Erstens reduziert es die Größe des Normalgleichungssystems, indem die Orientierungsunbekannten von Richtungsbeobachtungen eliminiert werden. Zweitens vereinfacht die diagonale Gewichtsmatrix die Computerimplementierung der Aufgabe. Drittens ist keine separate Prozedur erforderlich, um Richtungsbeobachtungen zu verarbeiten. Es kann somit eine Standardprozedur von Winkelbeobachtungen angewendet werden. Eine interessante theoretische Frage könnte selbst ein Äquivalenzsatz von Richtungsbeobachtungen und Pseudo-Beobachtungen in der Form von Schreiberschen Winkeln werden. Der Nachteil des vorgeschlagenen Verfahrens besteht darin, dass sich die Anzahl dieser Pseudobeobachtungen ( $m = r(r - 1)/2$ ) im Vergleich zur Anzahl der Richtungsbeobachtungen ( $r$ ) erhöht. Dies ändert jedoch nichts an der Größe des Normalgleichungssystems und hat bei heutigen Computerprozessoren geringe praktische Bedeutung.

**Schlüsselwörter:** Geodätisches Netz, Richtungsbeobachtungen, Schreibersches Winkelsystem, Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen

*It has been proven that the direction observations with the unknown orientation constant of each station when adjusting the network using the least squares method correspond to the so-called Schreiber's angles. The prerequisite is that a special method for the weighting of these angles is applied. Schreiber's angles are calculated a posteriori as differences of directions. If we assume (as usual) that the directional observations are not correlated, the set of Schreiber's angles calculated is characterized by a diagonal weight matrix. Every other angle system based on directional observations does not have this property. The proposed method has several practical advantages. First, it reduces the size of the normal equation system by eliminating additional unknowns in the form of the orientation constants of directional observations. Second, the diagonal weight matrix obviously simplifies the computer implementation of the task. Third, no separate procedure is required to process directional observations. So we can use a standard angle procedure. An interesting theoretical question could be the equivalence theorem itself of directional observations and pseudo-observations in the form of Schreiber's angles. The disadvantage of the proposed*

method is that the number of these pseudo-observations ( $m = r(r - 1)/2$ ) increases compared to the number of directional observations ( $r$ ). However, this does not change the size of the normal equation system and is of little practical importance with today's processors.

**Keywords:** Geodetic network, directional observations, Schreiber's angle system, adjustment of directional observations

## 1 EINLEITUNG

In der Ausgleichung geodätischer Netze werden die Richtungsbeobachtungen (Abb. 1a) normalerweise mit zwei Methoden ausgewertet:

(a) Für jede Teilmenge (für jede Station) von Richtungsbeobachtungen wird als zusätzliche Unbekannte eine konstante Richtungsorientierung eingeführt. Für jede einzelne Station erhalten wir ein singuläres System (vgl. /Hanke 1991/), aber das allgemeine Prinzip der kleinsten Quadrate bei der Ausgleichung des Netzes liefert in diesem Fall eine eindeutige Lösung. Dies erhöht jedoch die Größe des erstellten Normalgleichungssystems und erfordert in einer Computerimplementierung das Erstellen der Richtungsgleichungen mithilfe eines separaten Verfahrens.

(b) Orientierungsunbekannte von Richtungen werden durch das Gaußsche Verfahren eliminiert. Es basiert auf der Subtraktion der gemittelten Gleichung für eine gegebene Station von jeder Beobachtungsgleichung. Auf diese Weise wird ein System von Gleichungen erzeugt, welches keine konstante Orientierung mehr enthält, sondern jede Gleichung um zusätzliche Komponenten mit Unbekannten erhöht, deren Anzahl von der Anzahl aller an der Station beobachteten Richtungen abhängt. Wie in Verfahren (a) erfordern die Beobachtungsgleichungen ein separates Verfahren.

Daraus ergibt sich die Frage: Existiert ein Winkelsystem (aus Richtungs paaren erstellt), das – bei entsprechender Gewichtung – den Ergebnissen der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate gleichwertig ist?

Es stellt sich heraus, dass es einen solchen äquivalenten Satz von Winkeln gibt. Es ist ein System von speziell gewichteten Schreiberschen Winkeln (Abb. 1b). Es geht dabei nicht um die Winkel, die sich aus den Beobachtungen mit der bekannten Schreiberschen Methode /Schreiber 1878/, /Jordan et al. 1958/, /Pelzer 2005/ ergeben, sondern um die Winkel, die nach dem Schreiber-Schema (als Pseudobeobachtungen) aus Richtungen berechnet wurden. Damit diese Äquivalenz gilt, muss für die berechneten Schreiberschen Winkel ein spezifisches Gewicht angenommen werden. Darüber hinaus weist das Schreiber-Winkelsystem, wie das aus dem Äquivalenzsatz der jeweiligen unten angegebenen Beobachtungssysteme ersichtlich ist, eine diagonale Gewichtsmatrix auf. Dies ist vorteilhaft für die Algorithmen und ihre Computerimplementierungen.

Der Nachteil dieses Verfahrens ist die Zunahme der Anzahl von Pseudo-Beobachtungen (Schreiberschen Winkeln) im Vergleich zur Anzahl von Richtungsbeobachtungen. Wenn für eine bestimmte Station  $r$  Richtungsbeobachtungen vorliegen, beträgt die Anzahl der berechneten Schreiberschen Winkel  $m = r(r - 1)/2$ , obwohl – selbst in geodätischen Netzen von beträchtlicher Größe – dies heute

(in Bezug auf die Leistung der verwendeten Prozessoren) praktisch keine wesentliche Bedeutung haben sollte.

Die analoge Eigenschaft des Schreiber-Winkelsystems kann auf Beobachtungssysteme übertragen werden, in denen wir einige für die Interpretation irrelevante Parameter eliminieren. Solche Parameter sind beispielsweise die ganzzahligen Mehrdeutigkeiten in den Beobachtungsgleichungen von GNSS-Phasensignalen. Bekanntermaßen beseitigen Phasendifferenzen dritter Ordnung diese Mehrdeutigkeiten. Zu diesem Zweck wurde das Schreibersche Differentialschema bereits verwendet /Kadaj 2008/. Im vorliegenden Beitrag wird ein analoges Thema in Bezug auf das funktionale Modell der Richtungsbeobachtungen diskutiert und anhand eines numerischen Beispiels veranschaulicht.

## 2 ÄQUIVALENZSATZ VON BEOBACHTUNGSSYSTEMEN, RICHTUNGEN UND SCHREIBERSCHEN WINKELN, HINSICHTLICH IHRER AUSGLEICHUNG NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE

### 2.1 Richtungsbeobachtungen mit Orientierungsunbekannten

Sei

$$I = \{I_k; k = 1, \dots, q\}, I_k = \{I_{ki}; i = 1, 2, \dots, r_k\} \quad (1)$$

die Menge von Richtungsbeobachtungen (Abb. 1a) im klassischen geodätischen Netz, wobei:  $k$  = Stationsindex,  $k \leq q$ ,  $q$  = Anzahl von Stationen,  $i$  = Richtungsindex,  $i \leq r_k$ ,  $r_k$  = Anzahl von Richtungen an der Station  $k$  und  $I_k$  = Teilmenge der Beobachtungen an der

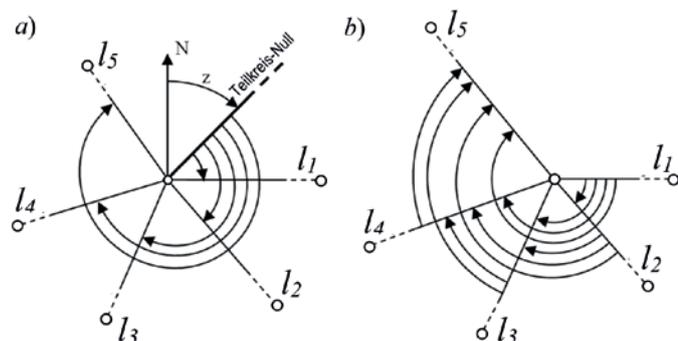


Abb. 1 | Eine Menge der beobachteten Richtungen a) und berechneter Schreiberschen Winkel b)

Station  $k$  sind. Es wird angenommen, dass in einem geodätischen Netz neben Richtungsbeobachtungen noch andere Arten von Beobachtungen existieren.

Daraus folgen zwei Arten von Verbesserungsgleichungen, geschrieben in Vektornotation als Block-Spalten-Vektoren:

$$\mathbf{V}^{(l)} + \mathbf{L}^{(l)} + \mathbf{Z} = \mathbf{F}^{(l)}(\mathbf{X}) \text{ für alle Richtungsbeobachtungen,} \quad (2)$$

$m_1 = r_1 + r_2 + \dots + r_q =$  Gesamtzahl der Richtungsbeobachtungen,

$$\mathbf{V}^{(ll)} + \mathbf{L}^{(ll)} = \mathbf{F}^{(ll)}(\mathbf{X}) \text{ für andere Beobachtungen,} \quad (3)$$

$m_2 =$  Anzahl der anderen Beobachtungen,

$n_1 =$  Anzahl von unbekanntem Punktkoordinaten,

$n_2 = q =$  Anzahl von unbekanntem Orientierungsunbekanntem,

worin für die Richtungsbeobachtungen ( $col =$  Vektor-Spalte ( $column$ )):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{(l)} &= col[\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_q], \\ \mathbf{V}_k &= col[v_{ki}: i = 1, 2, \dots, r_k] \text{ (Verbesserungsvektoren),} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(l)} &= col[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_q], \\ \mathbf{L}_k &= col[l_{ki}: i = 1, 2, \dots, r_k] \text{ (Beobachtungsvektoren),} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= col[\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_q], \\ \mathbf{Z}_k &= z_k \cdot col[1, 1, \dots, 1 \text{ (} r_k \text{ mal)}] \text{ (Orientierungsunbekannte),} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(l)}(\mathbf{X}) &= col[\mathbf{F}_k(\mathbf{X}), k = 1, 2, \dots, q], \\ \mathbf{F}_k(\mathbf{X}) &= [f_{ki}(\mathbf{X}), i = 1, \dots, r_k] \text{ (Funktionen des Vektors } \mathbf{X}). \end{aligned} \quad (7)$$

Die Gl. (2) kann daher als  $q =$  Matrixgleichung geschrieben werden:

$$\mathbf{V}_k + \mathbf{L}_k + \mathbf{Z}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{X}) \text{ (} k = 1, \dots, q \text{) (für die } k\text{-te Station in Gruppe I)} \quad (8)$$

oder als System skalarer Gleichungen:

$$v_{ki} + l_{ki} + z_k = f_{ki}(\mathbf{X}) \text{ (} k = 1, \dots, q; i = 1, \dots, r_k \text{).} \quad (8a)$$

Sei  $\varepsilon_{ki}$  ( $k = 1, 2, \dots, q; i = 1, 2, \dots, r_k$ ) die Abweichung der jeweiligen Beobachtungen  $l_{ki}$ .

Angenommen wird ein typisches stochastisches Beobachtungsmodell ( $E\{\cdot\} =$  Operator des Erwartungswerts):

$$E\{\varepsilon_{ki}\} = 0 \text{ (für alle Indexpaare } (k, i) \text{ von Beobachtungen),} \quad (9)$$

$$E\{\varepsilon_{ki}^2\} = s_{ki}^2 \text{ (angegebene Priori-Varianzen, } s_{ki} = \text{ Standardabweichung)} \quad (9a)$$

$$E\{\varepsilon_{ki} \varepsilon_{ij}\} = 0, \text{ da } i \neq j \text{ oder } k \neq l \text{ (nicht korrelierte unterschiedliche Beobachtungen).} \quad (9b)$$

Daher haben die gegebene Kovarianzmatrix und die entsprechende Gewichtsmatrix die Form ( $qdiag =$  eine quasi-diagonale (Blockdiagonale) Matrix,  $diag =$  eine diagonale Matrix):

$$\mathbf{Q}^{(0)} = qdiag[\mathbf{Q}_k: k = 1, 2, \dots, q], \quad \mathbf{Q}_k = diag[s_{ki}^2: i = 1, 2, \dots, r_k], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{(0)} &= \mathbf{Q}^{-1} = qdiag[\mathbf{P}_k: k = 1, 2, \dots, q], \\ \mathbf{P}_k &= diag[p_{ki}: i = 1, 2, \dots, r_k; p_{ki} = 1/s_{ki}^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Zielfunktion der Methode der kleinsten Quadrate für eine Netzausgleichung, die neben dem Satz von Richtungsbeobachtungen (I) auch andere Datensätze (II) enthält, kann als Summe von zwei Funktionen geschrieben werden:

$$\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \Phi^{(l)}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \Phi^{(ll)}(\mathbf{X}) = (\mathbf{V}^{(l)T} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{V}^{(l)} + (\mathbf{V}^{(ll)T} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{V}^{(ll)}), \quad (12)$$

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = (\mathbf{V}^{(l)T} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{V}^{(l)}), \quad \Phi^{(ll)}(\mathbf{X}) = (\mathbf{V}^{(ll)T} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{V}^{(ll)}). \quad (13)$$

$\mathbf{X} =$  Vektor unbekannter Koordinaten von Netzpunkten,  
 $\mathbf{Z} =$  Vektor der Orientierungsunbekannten von allen Stationen.

Die Zielfunktionskomponente für Richtungsbeobachtungen hat die folgende Form:

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = (\mathbf{V}^{(l)T} \cdot \mathbf{P}^{(0)} \cdot \mathbf{V}^{(l)}) = \sum_{k=1}^q \mathbf{V}_k^T \cdot \mathbf{P}_k \cdot \mathbf{V}_k = \sum_{k=1}^q \Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z}), \quad (14)$$

worin für die  $k$ -te Station gilt:

$$\mathbf{V}_k = col[v_{ki}, i = 1, 2, \dots, r_k]; \quad \mathbf{P}_k = diag[p_{ki}, i = 1, 2, \dots, r_k], \quad (15)$$

$$\Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{r_k} \varphi_{ki}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}); \quad \varphi_{ki}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = p_{ki} \cdot v_{ki}^2, \quad v_{ki} = f_{ki}(\mathbf{X}) - l_{ki} - z_k. \quad (16)$$

## 2.2 Schreibersche Winkel als Pseudo-Beobachtungssystem erstellt von Richtungen

Eine Menge von Schreiberschen Winkeln (*Abb. 1b*) wird wie folgt definiert:

$$\alpha_{kij} = l_{kj} - l_{ki} \text{ für alle } (i, j) \in \Omega(k) \text{ (} k = \text{ Stationsindex),} \quad (17)$$

$$\Omega(k) = \{(i, j): i = 1, 2, \dots, r_k - 1; j = i + 1, i + 2, \dots, r_k\} \quad (17a)$$

(der Plan von Schreiberschen Winkeln). Wenn z. B.  $r_k = 4$  ist, dann ist die Menge von Indexpaaren (Schreiber-Winkel-Plan)  $\Omega(k) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$  mit  $r_k(r_k - 1)/2 = 6$  Elementen.

Unter Berücksichtigung der Definition (17) und Richtungsgleichungen (8a) erhält man die Verbesserungsgleichungen für Schreibersche Winkel

$$\delta_{kij} + \alpha_{kij} = f_{kj}(\mathbf{X}) - f_{ki}(\mathbf{X}), \text{ (} (i, j) \in \Omega(k), k = 1, 2, \dots, q, \text{)} \quad (18)$$

$$\delta_{kij} = v_{kj} - v_{ki} \text{ und auch, wenn } i = j, \text{ dann } \delta_{kij} = 0. \quad (18a)$$

Die Orientierungsunbekannte ( $z_k$ ) für jede  $k$ -te Station wird eliminiert. In Analogie zur Zielfunktionskomponente  $\Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$  für die Richtungen der  $k$ -ten Station wird die entsprechende Zielfunktionskomponente für die Schreiberschen Winkel an dieser Station definiert:

$$\Psi_k(\mathbf{X}) = \sum_{(i,j) \in \Omega(k)} \Psi_{kij}(\mathbf{X}), \quad \Psi_{kij}(\mathbf{X}) = w_{kij} \cdot \delta_{kij}^2, \quad (19)$$

wobei  $w_{kij}$  ein bestimmtes Gewicht der Schreiberschen Winkel ist. Um die Bedingung der Äquivalenz zwischen Richtungsbeobachtungen und Schreiberschen Winkeln zu erfüllen (siehe folgender Satz 1), sollten die Gewichte durch die folgende Formel bestimmt werden:

$$w_{kij} = p_{ki} \cdot p_{kj} \cdot c_k \text{ (} i, j = 1, 2, \dots, r_k \text{) mit } c_k = (\sum_{i=1}^{r_k} p_{ki})^{-1}. \quad (20)$$

Die Zielfunktion unter Verwendung von Winkelbeobachtungen, die nach dem Schreiber-Schema im Gegensatz zu Gl. (12) erstellt wurden, kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\Psi(\mathbf{X}) = \Psi^{(l)}(\mathbf{X}) + \Psi^{(ll)}(\mathbf{X}). \quad (21)$$

Die erste Komponente enthält Richtungsbeobachtungen:

$$\Psi^{(l)}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^q \Psi_k(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{r_k-1} \sum_{j=i+1}^{r_k} w_{kij} \cdot \delta_{kij}, \quad (22)$$

während die zweite Komponente, wie in den Gl. (12) und (13), den verbleibenden Beobachtungen im Netzwerk entspricht, also  $\Psi^{(ll)}(\mathbf{X}) = \Phi^{(ll)}(\mathbf{X})$ .

**Satz 1:** Unter Berücksichtigung der Definitionen (19), (20) und (16) (für jede Station  $k = 1, 2, \dots, q$ ), gilt die folgende Gleichheit:

$$\Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z}_k) = \sum_{i=1}^{f_k} p_{ki} \cdot v_{ki}^2 = \sum_{i=1}^{f_k-1} \sum_{j=i+1}^{f_k} w_{kij} \cdot \delta_{kij}^2 = \Psi_k(\mathbf{X}) \quad (23)$$

(Summe rechts gleichbedeutend für alle Paare  $(i, j) \in \Omega(k)$ ). Diese Gleichheit bedeutet, dass die minimierte Zielfunktion von beiden Methoden äquivalent ist.

**Beweis:** Es wird angenommen, dass  $w_{kij} = w_{kji}$ ,  $\delta_{kij}^2 = \delta_{kji}^2$  und für  $i = j$ ,  $\delta_{kij} = 0$ ,  $w_{kij} = 0$ . Die rechte Seite der Gl. (23) kann wie folgt erweitert werden:

$$\begin{aligned} \Psi_k(\mathbf{X}) &= \sum_{(i,j) \in \Omega(k)} w_{kij} \cdot \delta_{kij}^2 = (1/2) \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} w_{kij} \cdot \delta_{kij}^2 \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} p_{ki} \cdot p_{kj} \cdot \delta_{kij}^2 \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj} - v_{ki})^2 \cdot p_{ki} \cdot p_{kj} \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj}^2 + v_{ki}^2) \cdot p_{ki} \cdot p_{kj} \\ &\quad - c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj} \cdot v_{ki}) \cdot p_{ki} \cdot p_{kj}. \end{aligned} \quad (24)$$

Der zweite Bestandteil hat die Form:

$$\begin{aligned} &c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj} \cdot v_{ki}) \cdot p_{ki} \cdot p_{kj} \\ &= c_k \cdot \left( \sum_{i=1}^{f_k} v_{ki} \cdot p_{ki} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^{f_k} v_{kj} \cdot p_{kj} \right) = \left( \sum_{i=1}^{f_k} v_{ki} \cdot p_{ki} \right)^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Es wird jetzt bewiesen, dass

$$\sum_{i=1}^{f_k} v_{ki} \cdot p_{ki} = 0, \quad (26)$$

was bedeuten wird, dass die Komponente (25) in (24) verschwindet. Betrachten wir zu diesem Zweck die notwendige Bedingung für das Minimum der Funktion (12) unter Berücksichtigung der GLn. (13) bis (16). Die notwendige Bedingung für das Minimum der Zielfunktion der Methode der kleinsten Quadrate ist das Nullstellen des Gradienten der Zielfunktion:

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = 0 \Rightarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (27)$$

worin:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}(\mathbf{X}) & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21}(\mathbf{X}) & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad (28)$$

(Matrix  $\mathbf{A}$  als Funktion des Vektors  $\mathbf{X}$ ) eine Blockmatrix ist mit den Elementen:

$$\mathbf{A}_{11}(\mathbf{X}) = \partial \Phi^0(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{X}, \quad \mathbf{A}_{12} = \partial \Phi^0(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) / \partial \mathbf{Z}, \quad (29)$$

$$\mathbf{A}_{21}(\mathbf{X}) = \partial \Phi^0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}, \quad \mathbf{A}_{22} = \partial \Phi^0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{Z} = \mathbf{0}_{(m_2 \times n_2)},$$

und

$$\mathbf{P} = q \text{diag}[\mathbf{P}^0, \mathbf{P}^0], \quad \mathbf{V} = \text{col}[\mathbf{V}^0, \mathbf{V}^0] \quad (30)$$

(die quasidiagonale Gewichtsmatrix und der Verbesserungsvektor).

Die Gradientenform (27) führt zu zwei Beziehungen – Normalgleichungen, die mit entsprechenden Blockmatrizen ausgedrückt werden (siehe Abb. 2):

$$\mathbf{A}_{11}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V}^0 + \mathbf{A}_{21}^T(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V}^0 = \mathbf{0}_{(n_1 \times 1)}, \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_{12}^T \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V}^0 + \mathbf{A}_{22}^T \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V}^0 = \mathbf{0}_{(n_2 \times 1)}, \quad (31a)$$

$n_1$  = Anzahl von Komponenten des Vektors  $\mathbf{X}$ ,

$n_2 = q$  = Anzahl von Orientierungsunbekannten – Komponenten des Vektors  $\mathbf{Z}$ ,

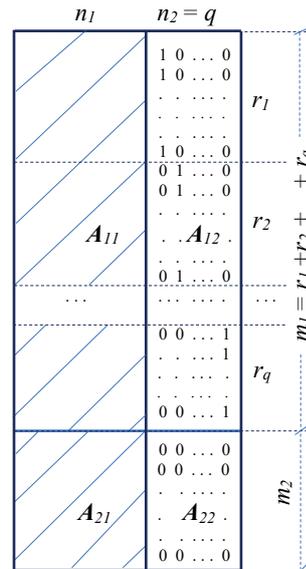


Abb. 2 | Aufbau der Matrix  $\mathbf{A}$  für ein geodätisches Netz mit Richtungsbeobachtungen ( $n_1$  = Anzahl der  $\mathbf{X}$ -Vektorkomponenten;  $n_2 = q$  = Anzahl der  $\mathbf{Z}$ -Vektorkomponenten, d. h. Anzahl der Orientierungsunbekannten und Anzahl der Stationen der Richtungsbeobachtungen;  $m_1$  = Gesamtzahl aller Richtungsbeobachtungen,  $m_2$  = Anzahl der verbleibenden Beobachtungen im Netzwerk)

aber  $\mathbf{A}_{22} = \partial \Phi^0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{Z}$  ist die  $(m_2 \times n_2)$ -Nullmatrix, da die Gleichungen der anderen Beobachtungen keine Orientierungsunbekannten enthalten. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12}^T \cdot \mathbf{P}^0 \cdot \mathbf{V}^0 &= \text{col} \left[ \sum_{i=1}^{f_k} v_{li} \cdot p_{li}, \dots, \sum_{i=1}^{f_k} v_{qi} \cdot p_{qi} \right] \\ &= \text{col} [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ (n_2 \text{ mal})] = \mathbf{0}_{(n_2 \times 1)}; \end{aligned} \quad (32)$$

somit wird für jede  $k$ -te Station die Bedingung (26) erfüllt. Daher ergibt sich für den Ausdruck (24) die Form:

$$\begin{aligned} \Psi_k(\mathbf{X}) &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj}^2 + v_{ki}^2) \cdot p_{ki} \cdot p_{kj} \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj}^2 \cdot p_{ki} \cdot p_{kj}) \\ &\quad + (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{ki}^2 \cdot p_{ki} \cdot p_{kj}) \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{i=1}^{f_k} p_{ki} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj}^2 \cdot p_{kj}) \\ &\quad + (1/2) \cdot c_k \cdot \sum_{j=1}^{f_k} p_{kj} \sum_{i=1}^{f_k} (v_{ki}^2 \cdot p_{ki}) \\ &= (1/2) \cdot c_k \cdot c_k^{-1} \sum_{j=1}^{f_k} (v_{kj}^2 \cdot p_{kj}) \\ &\quad + (1/2) \cdot c_k \cdot c_k^{-1} \sum_{i=1}^{f_k} (v_{ki}^2 \cdot p_{ki}) \\ &= \sum_{i=1}^{f_k} (v_{ki}^2 \cdot p_{ki}) \end{aligned} \quad (33)$$

Damit wurde der Satz 1 bewiesen.

Nehmen wir zwei der einfachsten Beispiele für die Gewichte von Schreiberschen Winkeln (Gl. (20)). Wenn  $r = 2$  (der Stationsindex wird weggelassen), dann ist per Definition  $\Omega = \{(1, 2)\}$  (nur ein Element) und der entsprechende Winkel  $\alpha_{12}$  hat das folgende Gewicht:

$$\begin{aligned} w_{12} &= p_1 \cdot p_2 / (p_1 + p_2) = (1/s_1^2) \cdot (1/s_2^2) / (1/s_1^2 + 1/s_2^2) \\ &= 1 / (s_1^2 + s_2^2). \end{aligned}$$

Wenn  $r = 3$ , dann enthält das Schreibersche System drei Winkel:  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{23}$  mit entsprechenden Gewichten:

$$\begin{aligned} w_{12} &= p_1 \cdot p_2 / (p_1 + p_2 + p_3), \\ w_{13} &= p_1 \cdot p_3 / (p_1 + p_2 + p_3), \\ w_{23} &= p_2 \cdot p_3 / (p_1 + p_2 + p_3). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass  $s_1 = s_2 = \dots = s_r = s \Rightarrow p_1 = p_2 = \dots = p_r = p = 1/s^2$ , dann ist das Gewicht eines einzelnen Schreiberschen Winkels

$$w_{ij} = p^2 / (r \cdot p) = p/r.$$

Zum Beispiel:  $r = 2 \Rightarrow w_{ij} = p/2$ ,  $r = 3 \Rightarrow w_{ij} = p/3$ .

### 2.3 Lösung des Beobachtungssystems mit Schreiberschen Pseudobeobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate

Nach dem Schreiber-Schema werden die Orientierungsunbekannten der Richtungen eliminiert. Die Ausgleichung eines Netzes unter Verwendung der Methode der kleinsten Quadrate führt zur Minimierung der Funktion  $\Psi(\mathbf{X}) = \Psi^0(\mathbf{X}) + \Psi^0(\mathbf{X})$ . Sei  $\mathbf{X}_0$  ein Vektor mit Näherungskoodinaten von Netzpunkten. Unter Verwendung der notwendigen Bedingung für das Extremum nehmen wir an, dass der Gradient der Zielfunktion der Nullvektor sein sollte:

$$(\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{0}_{(n \times 1)}, \quad (34)$$

$$\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{a}^{(0)} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{l}^{(0)}, \quad \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{a}^{(0)} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{l}^{(0)} \text{ (Verbesserungsgleichungen)}, \quad (35)$$

$$\mathbf{a}^{(0)} = \partial \Psi^0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}, \quad \mathbf{a}^{(0)} = \partial \Psi^0(\mathbf{X}) / \partial \mathbf{X}, \text{ für } \mathbf{X} = \mathbf{X}^{(0)}, \quad (36)$$

$$\mathbf{l}^{(0)} = \text{col} \left\{ (\alpha_{kij}^{(0)} - \alpha_{kij}) : k = 1, 2, \dots, q; (i, j) \in \Omega(k) \right\}_{(m_1 \times 1)} \quad (37)$$

(Vektor der gekürzten Beobachtungswerte).

$$\alpha_{kij}^{(0)} = f_{kij}(\mathbf{X}^{(0)}) = \text{Winkelmaß, berechnet aus Näherungskoodinaten}, \quad (38)$$

$\alpha_{kij}$  = entsprechendes Maß für den Schreiberschen Winkel, berechnet aus Richtungsunterschieden,

$\mathbf{l}^{(0)}$  = Differenz zwischen dem Näherungswert und dem Messergebnis für andere Beobachtungen,

$\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$  = Vektor unbekannter Korrekturen zu Näherungskoodinaten (gekürzter Parametervektor), (39)

$\mathbf{w}^{(0)} = \text{qdiag} [w_1, w_2, \dots, w_q]$  = Gewichtsmatrix für die Schreibersche Pseudobeobachtungen, (40)

$$\mathbf{w}_k = \text{diag} [w_{kij}, (i, j) \in \Omega(k)], \quad w_{kij} = p_{ki} \cdot p_{kj} \cdot \left( \sum_{l=1}^{r_k} p_{kl} \right)^{-1}, \quad (40a)$$

$\mathbf{w}^{(0)}$  = Gewichtsmatrix der übrigen Beobachtungen. (41)

Setzt man Gl. (35) in Gl. (34), dann erhält man das Normalgleichungssystem:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{g}, \quad (42)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)} + \mathbf{b}^{(0)}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^{(0)} + \mathbf{g}^{(0)}, \quad (42a)$$

$$\mathbf{b}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)}, \quad \mathbf{b}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)}, \quad (42b)$$

$$\mathbf{g}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{l}^{(0)}, \quad \mathbf{g}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{l}^{(0)}. \quad (42c)$$

Wenn das ausgeglichene Netz bestimmbar ist (Matrix  $\mathbf{b}$  ist nicht singular), wird die Lösung durch eine klassische Matrixinversion bestimmt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{g}. \quad (43)$$

Da das grundlegende Funktionsmodell des Netzwerks jedoch nicht linear ist, wird normalerweise ein iterativer Gauß-Newton-Prozess verwendet (z.B. /Deutsch 1965/), um den numerischen Koordinatenfehler vollständig zu beseitigen:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{b}_k^{-1} \cdot \mathbf{g}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (44)$$

wobei  $\lambda_k$  der sogenannte Relaxationsparameter ist, der die Konvergenz des Prozesses zum Minimalpunkt der quadratischen Zielfunktion garantiert:  $\lim \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{\min}$  (für  $k \rightarrow \infty$ ),  $k$ -iterativer Zyklusindex. Bei typischen Netzwerkausgleichsproblemen reicht es für die quadratische Konvergenz aus,  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda = 1$  zu verwenden.

### 2.4 Varianz- und Kovarianzanalyse im vorgeschlagenen funktionalen Modell der Richtungsbeobachtungen

Obwohl die Gewichtsmatrix der berechneten Schreiberschen Winkel eine diagonale Matrix ist, hat die Kovarianzmatrix dieser Winkel diese Eigenschaft nicht mehr. Gemäß der Winkeldefinition und dem angenommenen stochastischen Modell werden die Varianzen (*Var*) und Kovarianzen (*Cov*) des Schreiber-Winkelsystems wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\alpha_{kij}) &= \text{Var}(e_{kij}) = E \{ e_{kij}^2 \} = E \{ (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{ki})^2 \} \\ &= E \{ \varepsilon_{kj}^2 - 2 \cdot \varepsilon_{kj} \cdot \varepsilon_{ki} + \varepsilon_{ki}^2 \} \\ &= E \{ \varepsilon_{kj}^2 \} - 2 \cdot E \{ \varepsilon_{kj} \cdot \varepsilon_{ki} \} + E \{ \varepsilon_{ki}^2 \} \\ &= \mu_{kj}^2 - 0 + \mu_{ki}^2 = \mu_{kj}^2 + \mu_{ki}^2, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\alpha_{kij}, \alpha_{kgh}) &= \text{Cov}(e_{kij}, e_{kgh}) \\ &= E \{ (\varepsilon_{kj} - \varepsilon_{ki}) \cdot (\varepsilon_{kh} - \varepsilon_{kg}) \} \\ &= E \{ \varepsilon_{kj} \cdot \varepsilon_{kh} - \varepsilon_{kj} \cdot \varepsilon_{kg} - \varepsilon_{ki} \cdot \varepsilon_{kh} + \varepsilon_{ki} \cdot \varepsilon_{kg} \}. \end{aligned} \quad (46)$$

Im Allgemeinen wird es:

$$\text{Cov}(\alpha_{kij}, \alpha_{kgh}) = \begin{cases} s_{kj}^2 + s_{ki}^2, & \text{wenn } (i = g) \wedge (j = h), \\ s_{ki}^2, & \text{wenn } (i = g) \wedge (j \neq h), \\ s_{kj}^2, & \text{wenn } (j = h) \wedge (i \neq g), \\ -s_{ki}^2, & \text{wenn } (i = h) \wedge (j \neq g), \\ -s_{kj}^2, & \text{wenn } (j = g) \wedge (i \neq h), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (47)$$

Somit bilden die Unterschiede der Beobachtungen gemäß dem Schreiberschen Schema für jede  $k$ -te Station ein korreliertes Pseudobeobachtungssystem, d.h. mit einer bestimmten nichtdiagonalen Kovarianz-Submatrix  $\mathbf{C}_k$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k &= E \{ \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T \} = [E \{ e_{kij} \cdot e_{kgh} \}] - (m_k \times m_k) \text{ Matrix,} \\ m_k &= r_k \cdot (r_k - 1) / 2, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\mathbf{e}_k = \text{col} [e_{ki,j}] - (m_k \times 1)$$

Vektor von Winkelabweichungen  $e_{ki,j} = \varepsilon_{kj} - \varepsilon_{ki}$ .

Zum Beispiel sei  $r_k = 4$ ,  $s_{k1} = s_{k2} = s_{k3} = s_{k4} = s$ . Die Struktur der entsprechenden Kovarianz-Submatrix für  $s^2 = 1$  ist in *Tab. 1* dargestellt.

Die vollständige Kovarianz-Submatrix für Schreibersche Winkel kann in quasi-diagonaler Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^0 &= \text{qdiag} [\mathbf{C}_k : k = 1, 2, \dots, q] = \mathbf{E} \{ \mathbf{e}^0 \cdot (\mathbf{e}^0)^T \}, \\ q &= \text{Anzahl von Stationen,} \end{aligned} \quad (49)$$

(g,h) \ (i,j)	1-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-4
1-2	2	1	1	-1	-1	0
1-3	1	2	1	1	0	-1
1-4	1	1	2	0	1	1
2-3	-1	1	0	2	1	-1
2-4	-1	0	1	1	2	1
3-4	0	-1	1	-1	1	2

Tab. 1 | Struktur der Schreiber-Winkel-Kovarianz-Submatrix, berechnet aus  $r/k = 4$  homogenen Richtungsbeobachtungen mit Standardabweichung  $s = 1$ .

$\mathbf{e}^{(0)} = \text{col}[\mathbf{e}_k, k = 1, 2, \dots, q] =$  Block-Abweichungsvektor von Schreiberschen Winkeln. (49a)

Es wird angenommen, dass für das gesamte Beobachtungssystem die Kovarianzmatrix auch eine quasi-diagonale Gestalt hat:

$$\mathbf{C} = \text{qdiag}[\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{C}^{(0)}], \quad \mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{E}\{\mathbf{e}^{(0)} \cdot (\mathbf{e}^{(0)})^T\}, \quad (50)$$

$\mathbf{e}^{(0)}$  = Abweichungsvektor von anderen Beobachtungen als Richtungen.

$\mathbf{e} = \text{col}[\mathbf{e}^{(0)}, \mathbf{e}^{(0)}] =$  Gesamtabweichungsvektor von Schreiberschen Winkeln und anderen Beobachtungen.

Um die Kovarianzmatrix des Ergebniskoordinatenvektors zu erstellen, wird die Beziehung zwischen dem Abweichungsvektor  $\mathbf{e}$  und dem Abweichungsvektor  $\mathbf{e}_X$  der Ergebniskoordinaten, die mit der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt wurden, wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbf{e}_X = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}. \quad (51)$$

(Wir nehmen an, dass das Problem nicht singulär ist.) Durch Definition der Kovarianzmatrix und der Erwartungswerteigenschaft ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_X &= \mathbf{E}(\mathbf{e}_X \cdot \mathbf{e}_X^T) \\ &= (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T) \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} \\ &= (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1}, \end{aligned} \quad (52)$$

worin  $\mathbf{E}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T) = \mathbf{C}$  die gegebene A-priori-Kovarianzmatrix der Beobachtungen ist.

**Satz 2:** Die theoretische Kovarianzmatrix für den Parametervektor  $\mathbf{X}$  eines Netzes, unter Anwendung von Schreiberschen Pseudobeobachtungen, erfüllt die folgende Gleichheit:

$$\mathbf{C}_X = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} \cdot \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1} = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a})^{-1}. \quad (53)$$

**Beweis:** Bezeichnen wir

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}. \quad (54)$$

Wir beweisen, dass  $\mathbf{f} = \mathbf{b}$  ist, also  $\mathbf{C}_X = \mathbf{b}^{-1}$ . Die Matrizen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{b}$  können unter Berücksichtigung aller Gruppenbeobachtungen vom Schreiberschen Typ als Summen geschrieben werden:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^{(0)} + \mathbf{f}^{(0)} = \sum \mathbf{f}_k + \mathbf{f}^{(0)}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{(0)} + \mathbf{b}^{(0)} = \sum \mathbf{b}_k + \mathbf{b}^{(0)}. \quad (55)$$

Es wird zuerst gezeigt, dass  $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{b}^{(0)}$ , wobei  $\mathbf{f}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)}$  und  $\mathbf{b}^{(0)} = (\mathbf{a}^{(0)})^T \cdot \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{a}^{(0)}$  sind. Weil  $\mathbf{w}^{(0)} = (\mathbf{C}^{(0)})^{-1}$  gilt, ist  $\mathbf{f}^{(0)} = \mathbf{b}^{(0)}$ . Es bleibt zu beweisen, dass  $\mathbf{f} = \mathbf{b}$  ist. Nun genügt der Beweis, dass für jede  $k$ -te Gruppe  $\mathbf{f}_k = \mathbf{b}_k$  ist. Wenn der Einfachheit halber der Index  $k$  vernachlässigt wird, ändert sich die  $\mathbf{f}$ -Matrix gegenüber der Definition wie folgt ( $\mathbf{E}$  = Operator des Erwartungswerts für eine Matrix):

$$\mathbf{f} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T) \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{E}(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{a}) \quad (\text{für eine einzelne Station}). \quad (56)$$

Sei  $\mathbf{d} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}$  (die Zufallsvektorvariable), dann ist  $\mathbf{f} = \mathbf{E}(\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{a})$ . Aus den Definitionen von  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{e}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \text{col}[\mathbf{w}_{ij} \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_i): (i, j) \in \Omega] \\ &= 1/\sum p_i \cdot \text{col}[\rho_i \cdot p_j \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_i): (i, j) \in \Omega]. \end{aligned}$$

Gemäß der Gln. (18), (29), (36), die Elemente der Matrix  $\mathbf{a}$  sind den Differenzen der entsprechenden Elemente der Matrix  $\mathbf{A}_{1,1}$ , also  $\mathbf{a} = [(a_{ju} - a_{iu}): (i, j) \in \Omega \text{ und } u = 1, 2, \dots, n]_{(r \times n)}$ , wobei  $\rho_i = 1/s_i^2$  (Gewicht der einfachen Richtung),  $n$  = Anzahl der Spalten der Matrix  $\mathbf{a}$  ( $n$  ist gleich der Anzahl der geschätzten Systemparameter  $- n$  ist gleich der Anzahl der angegebenen Systemparameter-Komponenten des Vektors  $\mathbf{X}$ ) erhalten wir die Matrix  $\mathbf{f}$  als  $[f_{gh}]_{(n \times n)}$  entsprechend der Matrix  $\mathbf{b} = [b_{gh}]_{(n \times n)}$ , wobei

$$\begin{aligned} f_{gh} &= (1/\sum \rho_i)^2 \cdot \mathbf{E} \left\{ \sum_{(i,j) \in \Omega} [\rho_i \cdot p_j \cdot (a_{ig} - a_{ig}) \cdot (\varepsilon_j - \varepsilon_i)] \right. \\ &\quad \left. \sum_{(k,l) \in \Omega} [\rho_k \cdot p_l \cdot (a_{lh} - a_{lh}) \cdot (\varepsilon_l - \varepsilon_k)] \right\} \\ &= (1/\sum \rho_i)^2 \sum_{(i,j) \in \Omega} \sum_{(k,l) \in \Omega} [\rho_i \cdot p_j \cdot \rho_k \cdot p_l \cdot (a_{ig} - a_{ig}) \\ &\quad \cdot (a_{lh} - a_{lh}) \cdot \mathbf{E} \{ (\varepsilon_j - \varepsilon_i) \cdot (\varepsilon_l - \varepsilon_k) \}]. \end{aligned} \quad (57)$$

Aufgrund der Formeln (45) bis (47) führt der Erwartungswert  $\mathbf{E}\{(\varepsilon_j - \varepsilon_i) \cdot (\varepsilon_l - \varepsilon_k)\}$  zu entsprechenden Werten:  $s_i^2 + s_j^2 = \rho_i^{-1} + \rho_j^{-1}$ ,  $s_i^2 = \rho_i^{-1}$ ,  $s_j^2 = \rho_j^{-1}$ ,  $-s_i^2 = -\rho_i^{-1}$ ,  $-s_j^2 = -\rho_j^{-1}$  oder null für unterschiedliche Beziehung der Paar-Indizes  $(i, j)$ ,  $(k, l)$  und nach Reduktion von ähnlichen Komponenten – in der Form  $f_{gh}$  gleich  $b_{gh}$ :

$$\begin{aligned} f_{gh} &= (1/\sum \rho_i)^2 \cdot (\sum \rho_i) \cdot \sum_{(i,j) \in \Omega} [\rho_i \cdot p_j \cdot (a_{ig} - a_{ig}) \cdot (a_{jh} - a_{ih})] \\ &= (1/\sum \rho_i) \sum_{(i,j) \in \Omega} [\rho_i \cdot p_j \cdot (a_{ig} - a_{ig}) \cdot (a_{jh} - a_{ih})] = b_{gh}. \end{aligned} \quad (58)$$

Damit ist der Beweis vom Satz 2 beendet.

Der Satz zeigt, dass bei Anwendung des vorgeschlagenen funktionalen Modells zur Ausgleichung von Richtungsbeobachtungen (Umwandlung von Richtungen in Winkel gemäß dem Schreiberschen Schema) die theoretische Kovarianzmatrix die Umkehrung der Normalmatrix ist. Es zeigt, dass trotz der speziellen Gewichtung von Schreiberschen Pseudobeobachtungen die Algorithmen der Methode der kleinsten Quadrate gültig bleiben.

In der Praxis verwenden wir empirische Kovarianzmatrizen, die wir durch Multiplikation der theoretischen Kovarianzmatrix (Kofaktor-Matrix) mit dem empirischen Varianzkoeffizienten erstellen (Varianz der Gewichtseinheit  $s_g^2 = \Psi(\mathbf{X})/(m - n)$ , wobei  $m$  = Anzahl von allen Beobachtungen und Pseudobeobachtungen,  $n$  = Anzahl von unbekanntem Parametern des Netzes (Punktkoordinaten) sind.

### 2.5 Konvertieren von Verbesserungen für Schreibersche Winkel in Verbesserungen für Richtungsbeobachtungen

Die Übereinstimmung der Verbesserungen für Winkel (bei der Methode der Schreiberschen Winkel) und der Verbesserungen für Richtungen (bei der Methode mit Orientierungsunbekannten) kann überprüft werden, indem beispielsweise eine Teilmenge der Verbesserungen der Schreiber-Winkel in Verbesserungen der Richtungen umgewandelt wird. Bei der Annahme der Platzierung der Bedingung der kleinsten Quadrate bezeichnen wir die Verbesserungen für Richtungen an einer beliebigen Station  $v_1, v_2, \dots, v_r$  ( $r = \text{Anzahl von Richtungen}$ ) und die entsprechenden Gewichte  $p_1, p_2, \dots, p_r$  sowie die berechneten Verbesserungen für anfängliche  $r - 1$  Schreiber-Winkel an dieser Station,  $v_{12}, v_{13}, \dots, v_{1r}$ . Sei  $v_{11} = 0$ , dann können die Größen  $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1r}$  als Richtungsverbesserungen betrachtet werden. Natürlich ändern sich die Richtungsabweichungen (als Winkel) nicht, wenn eine konstante Zahl  $x$  für die Richtungen hinzugefügt wird, aber gemäß der Methode der kleinsten Quadrate sollten die endgültigen Verbesserungen der Richtungen dem Postulat entsprechen:

$$p_1 \cdot v_1^2 + p_2 \cdot v_2^2 + \dots + p_r \cdot v_r^2 = p_1 \cdot (v_{11} + x)^2 + p_2 \cdot (v_{12} + x)^2 + \dots + p_r \cdot (v_{1r} + x)^2 = \min. \quad (59)$$

Aus der notwendigen Bedingung im Extremfall einer Funktion ergibt sich:

$$x \cdot \sum p_j = p_1 \cdot v_{11} + p_2 \cdot v_{12} + p_3 \cdot v_{13} + \dots + p_r \cdot v_{1r} = \sum_{j=1}^r p_j \cdot v_{1j}, \quad (60)$$

$$x = \left( \frac{\sum_{j=1}^r p_j \cdot v_{1j}}{\sum p_j} \right).$$

So sind die Richtungsverbesserungen als Funktionen von den ersten  $r - 1$  Schreiberschen Winkeln bestimmt:

$$v_1 = v_{11} + x = x, \quad v_2 = v_{12} + x, \quad \dots, \quad v_r = v_{1r} + x. \quad (61)$$

Die obigen Formeln werden in dem unten angegebenen numerischen Beispiel verwendet.

### 3 NUMERISCHES BEISPIEL

Abb. 3 zeigt ein Testnetz mit Richtungsbeobachtungen an vier Stationen und zusätzlich drei Distanzmessungen. Das Netz besteht aus 4 Festpunkten und 2 Neupunkten. Die numerischen Daten des Netzes, die unter Verwendung eines Zufallsgenerators künstlich erzeugt wurden, sind in Tab. 2 und in Tab. 3 dargestellt. Für die Punkte 1 und 2 wurden Näherungskoodinaten mit einer Kürzung von bis zu 1 m angenommen.

Die Ausgleichung des Netzes wurde in zwei Varianten durchgeführt (die Berechnungen wurden unter Verwendung der geodätischen Software GEONET durchgeführt, Quelle: www.geonet.net.pl):

- Umrechnung von Richtungsbeobachtungen in die Form von Schreiber-Winkeln, gemäß der in dieser Arbeit beschriebenen Methodik (I),
- Ausgleichung der ursprünglichen Richtungsbeobachtungen unter Verwendung zusätzlicher Unbekannten (Orientierungsunbekannten der Richtungen) (II).

Tab. 4 enthält:

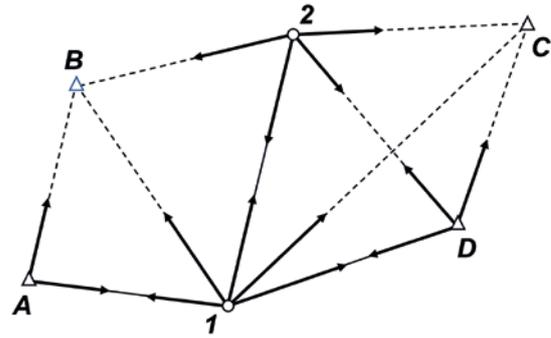


Abb. 3 | Skizze eines geodätischen Netzes mit:  $p_u = 2$  unbekanntem Punkten (1, 2),  $p_s = 4$  Festpunkten (A, B, C, D),  $r = 14$  Richtungsbeobachtungen an  $s = 4$  Stationen und  $l = 3$  Distanzmessungen

Die Koordinaten der Festpunkte		
Punkt	X	Y
A	45 620,645 m	12 879,351 m
B	47 895,809 m	13 207,330 m
C	48 708,142 m	17 530,564 m
D	46 678,077 m	17 121,005 m
Die genäherten Koordinaten der Neupunkte (auf 1 m gerundet)		
Punkt	X	Y
1	45 413 m	14 906 m
2	48 278 m	15 321 m

Tab. 2 | Koordinaten

R: Richtung s: Standardabweichung			
Station	Ziel	R	s
1 (r = 5)	A	325,23850 gon	1 <sup>cc</sup>
	B	380,52520 gon	1 <sup>cc</sup>
	2	27,91160 gon	1 <sup>cc</sup>
	C	61,56570 gon	1 <sup>cc</sup>
2 (r = 4)	C	185,81620 gon	1 <sup>cc</sup>
	D	244,32820 gon	1 <sup>cc</sup>
	1	307,20580 gon	1 <sup>cc</sup>
	B	386,61510 gon	1 <sup>cc</sup>
A (r = 2)	B	39,23980 gon	1 <sup>cc</sup>
	1	136,60890 gon	1 <sup>cc</sup>
D (r = 3)	1	268,16620 gon	1 <sup>cc</sup>
	2	347,48610 gon	1 <sup>cc</sup>
	C	13,87650 gon	1 <sup>cc</sup>
d: horizontale Strecken s: Standardabweichungen (a priori)			
Nr. (I)	Nr. (J)	d	s
1	2	2 895,161 m	0,001 m
1	A	2 037,861 m	0,001 m
1	D	2 550,097 m	0,001 m

Tab. 3 | Beobachtungen (1<sup>cc</sup> = 0,01 gon)

- Werte der Schreiberschen Winkel mit den entsprechenden Gewichten nach Gl. (20),
- Verbesserungen von Schreiberschen Winkeln und gemessenen Entfernungen infolge der Netzausgleichung,

Schreibersche Winkel und Gewichten ( $w$ ),					
Ziel Links	Station	Ziel Rechts	Winkel	$w$	$d$
A	1	B	55,28670 gon	0,20	-1,29 <sup>cc</sup>
A	1	2	102,67310 gon	0,20	0,06 <sup>cc</sup>
A	1	C	136,32720 gon	0,20	-1,80 <sup>cc</sup>
A	1	D	160,47570 gon	0,20	-0,13 <sup>cc</sup>
B	1	2	47,38640 gon	0,20	1,35 <sup>cc</sup>
B	1	C	81,04050 gon	0,20	-0,52 <sup>cc</sup>
B	1	D	105,18900 gon	0,20	1,16 <sup>cc</sup>
2	1	C	33,65410 gon	0,20	-1,86 <sup>cc</sup>
2	1	D	57,80260 gon	0,20	-0,19 <sup>cc</sup>
C	1	D	24,14850 gon	0,20	1,67 <sup>cc</sup>
C	2	D	58,51200 gon	0,25	-0,36 <sup>cc</sup>
C	2	1	121,38960 gon	0,25	-2,28 <sup>cc</sup>
C	2	B	200,79890 gon	0,25	-0,02 <sup>cc</sup>
D	2	1	62,87760 gon	0,25	-1,92 <sup>cc</sup>
D	2	B	142,58690 gon	0,25	0,34 <sup>cc</sup>
1	2	B	79,40930 gon	0,25	2,26 <sup>cc</sup>
B	A	1	9736910 gon	0,50	0,68 <sup>cc</sup>
1	D	2	79,31990 gon	0,333	1,11 <sup>cc</sup>
1	D	C	145,71030 gon	0,333	-1,07 <sup>cc</sup>
2	D	C	66,39040 gon	0,333	-2,18 <sup>cc</sup>

Verbesserungen für Strecken			$s_0 = 1,0159$ (empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit)
Nr. (I)	Nr. (J)	$v$ in m	
1	2	-0,00028 m	
1	A	0,00015 m	
1	D	-0,00031 m	

Tab. 4 | Krierte Schreibersche Winkel, Schreibersche Gewichte und Ausgleichungsergebnisse

■ empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit.  
 Nach Satz 1 über die Äquivalenz der auf der Grundlage von Schreiberschen Winkeln konstruierten Zielfunktion und der Zielfunktion von Richtungsbeobachtungen (Ausgleichung mit der Verwendung von Orientierungsunbekannten) sind die Ergebnisse beider

Beobachtungsplan		Ausgleichung mit Orientierungskonstanten ( $z$ ) als Unbekannten, $v$ = Verbesserung $s_0 = 1.0159$ (empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit)		Vergleichbare Verbesserungen konvergieren von Schreiberschen Winkeln
Station	Ziel	$z$	$v$	$v$
1 ( $r = 5$ )	A	381,24904	0,63 <sup>cc</sup>	0,63 <sup>cc</sup>
	B		-0,65 <sup>cc</sup>	-0,65 <sup>cc</sup>
	2		0,69 <sup>cc</sup>	0,69 <sup>cc</sup>
	C		1,17 <sup>cc</sup>	-1,17 <sup>cc</sup>
2 ( $r = 4$ )	D	301,95507	0,50 <sup>cc</sup>	0,50 <sup>cc</sup>
	C		0,66 <sup>cc</sup>	0,66 <sup>cc</sup>
	D		0,31 <sup>cc</sup>	0,31 <sup>cc</sup>
A ( $r = 2$ )	1	369,87867	-1,62 <sup>cc</sup>	-1,62 <sup>cc</sup>
	B		0,65 <sup>cc</sup>	0,65 <sup>cc</sup>
	1		-0,34 <sup>cc</sup>	-0,34 <sup>cc</sup>
D ( $r = 3$ )	2	398,79709	0,34 <sup>cc</sup>	0,34 <sup>cc</sup>
	1		-0,01 <sup>cc</sup>	-0,01 <sup>cc</sup>
	C		1,10 <sup>cc</sup>	1,10 <sup>cc</sup>
			-1,08 <sup>cc</sup>	-1,08 <sup>cc</sup>

Tab. 5 | Vergleich der Ausgleichungsergebnisse beider Methoden

Methoden konsistent (im Rahmen von Rundungsgenauigkeiten). Die Endkoordinaten der Punkte 1 und 2 zusammen mit den Genauigkeitsparametern in beiden Methoden entsprechen den in Tab. 6 angegebenen Werte. Die empirische Standardabweichung der Gewichtseinheit ( $\sim 1,02$ ) zeigt die Konsistenz in beiden Methoden auf der Ebene von neun signifikanten Stellen.

Die Werte der Verbesserungen an den gemessenen Strecken sind bei beiden Ansätzen im Zehntel-Millimeterbereich identisch. Die Übereinstimmung der Verbesserungen der Winkel (bei der Methode der Schreiberschen Winkel) und der Verbesserungen der Richtungen (bei der Methode mit Orientierungsunbekannten) kann überprüft werden, indem beispielsweise eine Teilmenge der Verbesserungen



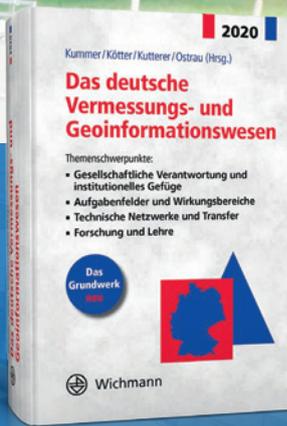


# Wichmann

**Technikwissen punktgenau:**  
**Einzigartiger Gesamtüberblick der Themenfelder Vermessung, Geoinformation und Landmanagement**

Ein unentbehrliches Nachschlagewerk für alle, die sich mit raumbezogenen Themen auseinandersetzen. Das deutsche Vermessungs- und Geoinformationswesen 2020 bietet eine einzigartige Zusammenfassung der Themenbereiche Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement.

Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten. Sowohl das E-Book als auch das Kombiangebot (Buch + E-Book) sind ausschließlich auf [www.vde-verlag.de](http://www.vde-verlag.de) erhältlich.



**2020**  
**1.280 Seiten**  
**159,- €** (Buch/E-Book)  
**222,60 €** (Kombi)

**Bestellen Sie jetzt: (030) 34 80 01-222 oder [www.vde-verlag.de/buecher/537676](http://www.vde-verlag.de/buecher/537676)**



Verb-Nr. 2103060

Nr.	X	Y	$s_x$ a	$s_y$ b	$s_p$ $\varphi$ in g
1	45413,3320	14906,6393	0,0013 0,0014	0,0008 0,0007	0,0015 183,75
2	48278,5707	15321,8052	0,0014 0,0031	0,0031 0,0014	0,0034 107,67

Tab. 6 | Berechnete Koordinaten und empirische Genauigkeitsparameter, die Standardabweichungen der berechneten Koordinaten,  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi$  = Fehlerellipsenparameter

der Schreiberschen Winkel in Verbesserungen der Richtungen nach den Gln. (60) und (61) umgewandelt werden. Beispielweise erhalten wir für die erste Station:

$$x = -(0,0 - 1,3 + 0,1 - 1,0 - 0,1)/5 = 0,6^{cc},$$

$$v_A = x, \quad v_B = -1,3 + x, \quad v_C = 0,1 + x, \quad v_D = -1,0, \quad v_0 = -0,1 + x.$$

(Alle Ergebnisse in Zentigon ( $^{cc}$ )). Unter Berücksichtigung dieses Ansatzes erhalten wir die in der letzten Spalte der Tab. 5 angegebenen Werte neben den Verbesserungswerten der Methode unter Verwendung zusätzlicher Unbekannter. Ähnliche Umformungen wurden für alle vier Stationen durchgeführt. Wie aus Tab. 5 ersichtlich ist, liegt eine Übereinstimmung der Verbesserungswerte mit einer Genauigkeit von  $0,01^{cc}$  Rundungsfehler vor.

Für jede Richtungsmessstation kann auch die These (23) von Satz 1 überprüft werden, d. h. die Gleichheit:

$$\Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \sum_{i=1}^{r_k} p_{ki} \cdot v_{ki}^2 = \Psi_k(\mathbf{X}) = \sum_{(i,j) \in \Omega(k)} w_{kij} \cdot \delta_{kij}^2.$$

Zum Beispiel ergeben sich für die Station  $k = 1$  ( $r_k = 5$ ) die Gewichte  $p_{11} = p_{12} = p_{13} = p_{14} = p_{15} = 1$  und die in Tab. 5 angegebenen Verbesserungen (die verwendeten Indizes  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  entsprechen den nächsten Zielpunkten  $B, 2, C, D$ ). Die Berechnung ergibt

$$\Phi_k(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = 0,63^2 + (-0,65)^2 + 0,69^2 + (-1,17)^2 + 0,5^2 \approx 2,91.$$

In ähnlicher Weise werden die Daten aus Tab. 4 behandelt

$$\Psi_k(\mathbf{X}) = 0,20 \cdot [(-1,29)^2 + 0,06^2 + (-1,80)^2 + 0,13^2 + 1,35^2 + (-0,52)^2 + 1,16^2 + (-1,86)^2 + (-0,19)^2 + 1,67^2] \approx 2,93$$

(das Ergebnis enthält kumulative Rundungsfehler), wobei gilt:  $w_{112} = w_{113} = \dots = w_{145} = 0,20$ ; Gewichte berechnet nach Gl. (20).

Tab. 6 zeigt die geschätzten Koordinatenwerte und die Genauigkeitsparameter. Die Ergebnisse wurden nach drei Iterationen unter Verwendung des Gauß-Newton-Algorithmus erzielt. Die Ergebnisse sind für beide Methoden nach Umrechnung der Richtungen in der Größenordnung der Rundungsgenauigkeit identisch.

## 4 SCHLUSSFOLGERUNGEN

Analytische Beweise und numerische Tests bestätigen die Richtigkeit der vorgeschlagenen alternativen Methode zur Ausgleichung der Richtungsbeobachtungen. Diese Methode konvertiert Richtungen in Winkel, gebildet nach dem Schreiber-Schema bei der Verwendung einer speziellen Methode ihrer Gewichtung, gemäß Gl. (20). Das vorgeschlagene Verfahren hat die folgenden Vorteile:

- Die Methode eliminiert zusätzliche Unbekannte (Orientierungsunbekannte), die im funktionalen Modell der Richtungsbeobachtungen auftreten.

- Das funktionale Modell der erzeugten Schreiberschen Winkel (als Pseudo-Beobachtungen) bewahrt die diagonale Gewichtsmatrix.
- In der Softwareimplementierung (Erstellen eines Netzausgleichungsprogramms unter Berücksichtigung verschiedener Arten von Beobachtungen) kann sowohl für Winkel- als auch für Richtungsbeobachtungen die gleiche Prozedur verwendet werden.

Der Nachteil der Methode besteht darin, dass die Anzahl der Pseudobeobachtungen (Schreiberschen Winkel) in Bezug auf Anzahl der ursprünglichen Richtungsbeobachtungen wesentlich größer ist. An einer einzelnen Station sind es  $m = r \cdot (r + 1)/2$ , wobei  $r$  die Anzahl der Richtungsbeobachtungen ist. Berücksichtigen wir die Leistung der aktuellen Computerprozessoren, so spielt die größere Anzahl der Beobachtungen jedoch keine wesentliche Rolle.

Die Methode wurde 1996 im geodätischen Berechnungssystem GEONET (<http://www.geonet.net.pl>) implementiert, um das ehemalige polnische Netzwerk der 1. Klasse auf dem Ellipsoid WGS84 auszugleichen. Die Ergebnisse der Ausgleichung wurden mit der alternativen Ausgleichung verglichen, die unter Verwendung einer anderen Software durchgeführt wurde, wodurch die Validität der Berechnungsergebnisse bestätigt wurde /Kozakiewicz 1998/.

## DANKSAGUNG

Die Publikation wurde in der Abteilung für Geodäsie und Geotechnik der Technischen Universität Rzeszów (PL) im Rahmen des gesetzlichen Forschungsprogramms erstellt.

## LITERATUR

- Deutsch, R. (1965): Estimation Theory. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hanke, K. (1991): Ein erweitertes Modell zur Ausgleichung von satzweisen Richtungsbeobachtungen. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 98(1991)10, 305–309.
- Jordan, W.; Eggert, O.; Kneissl, M. – neue Ausgabe: Kneissl, M. (1958): Handbuch der Vermessungskunde. Band IV: Mathematische Geodäsie (Landesvermessung). Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Kadaj, R. (2008): New algorithms of GPS post-processing for multiple base-line models and analogies to classic geodetic networks. In: Geodesy and Cartography (PL) 57(2008)2, 61–79.
- Kozakiewicz, W. (1998): Wyrównanie pierwsza klasa (PL). In: GEODETA 33(1998)2.
- Pelzer, H. (2005): Von der Schreiberschen Regel zum Schreiberschen Satz. In: Wiss. Arb. Fachr. Geodäsie und Geoinformatik, Univ. Hannover, 257, 31–42.
- Schreiber, O. (1878): Anordnung von Horizontalwinkelbeobachtungen auf der Station. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV) 1878, 209.

Prof. Dr. habil. Roman Kadaj

RZESZÓW UNIVERSITY OF TECHNOLOGY  
DEPARTMENT OF GEODESY AND  
GEOTECHNICS

12 Powstańców Warszawy St. | 35-959 Rzeszów  
kadaj@prz.edu.pl

