

Modellierung und Bestimmung eines elliptischen Zylinders

Modelling and Determination of an Elliptic Cylinder

Michael Lösler

Das Bestimmen von Modellparametern von Regelgeometrien zählt zu den wesentlichen Aufgaben in der Koordinatenmesstechnik im Kontext des Reverse Engineering. Neben datumsinvarianten Eigenschaften wie Geradheit, Rundheit oder Ebenheit liefern Regelgeometrien weitere datumsbeschreibende Kenngrößen, um Lage und Orientierung eines Objekts zu spezifizieren. Sie werden daher häufig im Anlagen- und Maschinenbau, in der Bauwerksdatenmodellierung, aber auch in der Deformationsanalyse oder der Biomechanik eingesetzt. Neben Kugeln und Ebenen besitzen Zylinder einen großen Anwendungsbereich. Während für die Modellierung eines Kreiszylinders verschiedene geometrische Parametrierungen existieren, wird zur Beschreibung eines elliptischen Zylinders vornehmlich auf die algebraische Darstellung zurückgegriffen. Die hierbei resultierenden Parameter lassen sich jedoch häufig nicht direkt geometrisch interpretieren und sind für die praktische Anwendung in der Formanalyse ungeeignet. In diesem Beitrag wird für den Zylinder mit elliptischer Grundfläche eine geometrische Parametrierung vorgeschlagen, deren Modellparameter eine direkte geometrische Bedeutung aufweisen. Die gewählte Parametrierung orientiert sich hierbei an den Darstellungen der /DIN EN ISO 10360-6/ bzw. /ASME B89.4.10-2000/.

Schlüsselwörter: Kreiszylinder, elliptischer Zylinder, Formanalyse, Reverse Engineering

In coordinate metrology, the analysis of surfaces is one of the main tasks in the context of reverse engineering. The analysis of geometrical primitives yields datum-invariant parameters like straightness, roundness or flatness, but also datum parameters that describe the position and the orientation of the measured object. The analysing toolbox is commonly used in, e. g., plant and manufacturing systems engineering, building information modelling, but also in deformation analysis or biomechanical applications. Beside spheres and planes, cylinders offer a wide range of application. Whereas several geometrical models are known for parametrizing circular cylinders, elliptic cylinders are usually modelled by an algebraic representation. In general, the algebraic representation has drawbacks because the algebraic parameters cannot be geometrically interpreted. Thus, this representation is unsuitable in practical applications. In this investigation, a geometrical functional model is derived for parametrizing an elliptic cylinder. According to the specification given in /DIN EN ISO 10360-6/ and /ASME B89.4.10-2000/, the presented model and the geometric parameters have a clear geometrical meaning.

Keywords: Circular cylinder, elliptic cylinder, surface analysis, reverse engineering

1 EINLEITUNG

Das Ableiten von Parametern, die eine geometrische Form eindeutig definieren, zählt zu den wesentlichen Aufgaben in der Koordinatenmesstechnik, insbesondere im Kontext des Reverse Engineering. Zur Beschreibung dieser Form werden neben der Verwendung polynomialer Ersatzfunktionen, wie NURBS /Hennes 2009/, häufig Regelgeometrien, wie Kugeln, Ebenen oder Zylinder,

verwendet. Regelgeometrien haben hierbei den Vorteil, dass die formbeschreibenden datumsinvarianten Modellparameter, wie der Radius, geometrisch einfach zu interpretieren sind und u. a. eine direkte Prüfung mit einzuhaltenden Sollwerten ermöglichen. Weiterhin empfiehlt sich der Einsatz von bestimmten Regelgeometrien zur Definition eines Objektkoordinatensystems, da Lage- oder

Orientierungsparameter mitgeführte Modellgrößen sind /ASME B89.4.10-2000 2011/.

Neben Kugeln und Ebenen haben Zylinder einen großen Anwendungsbereich, um z. B. die geometrische Form und Ausrichtung eines Werkstücks zu prüfen (z. B. /Gröne 1995/). Rohrleitungen und Gebäudestützen weisen häufig eine zylindrische Form auf, sodass sich Zylinder zur zielzeichenlosen Verknüpfung von Laserscannerstandpunkten in industriellen Anlagen empfehlen, wie /Lichtenstein & Benning 2010/ zeigen. /Mendés et al. 2014/ rekonstruieren in ihren biomechanischen Untersuchungen aus Daten von terrestrischen Laserscannern (TLS) Baumstämme mittels Zylindern, um Struktur und Vitalität der Bäume zu analysieren. /Lösler et al. 2015/ nutzen Regressionszylinder, um den geometrisch definierten Strahlenverlauf in einem Teilchenbeschleuniger zwischen Kryostatmodulen zu beschreiben. Zur Identifikation von Deformationen modellieren /van Gosliga et al. 2006/ die Tunnelgeometrie unter Verwendung eines Zylinders aus TLS-Daten. Zur geometrischen Beschreibung des Hauptreflektors eines VLBI-Radioteleskops integrieren /Lösler et al. 2019/ einen Zylinder in ein rotationssymmetrisches Paraboloid, um die Form eines sogenannten Ring-Fokus-Paraboloids in einem geschlossenen Modell darzustellen.

Zur Parametrierung eines Kreiszyllinders existiert in der Literatur eine Reihe von geometrischen Modellen, die sich in der Anzahl der Modellparameter und den zu berücksichtigenden Restriktionen z. T. deutlich unterscheiden. Zur Modellierung eines Zylinders mit elliptischer Grundfläche wird hingegen häufig auf die algebraische Darstellung mittels Quadrik zurückgegriffen. Im Gegensatz zu den Parametern eines geometrischen Modells lassen die algebraischen Parameter i. Allg. keine eindeutige geometrische Interpretation zu, sodass diese Darstellung für praktische Anwendungen in der Koordinatenmesstechnik ungeeignet erscheint (siehe auch /Ahn 2004, Kap. 1.2.2/). Weiterhin kann bei Verwendung der algebraischen Darstellung nur in wenigen Fällen der Formtyp a priori vorgegeben werden, sodass diese Modellierung vor allem dann sinnvoll eingesetzt werden kann, wenn der zugrunde liegende Formtyp ebenfalls unbekannt ist /Jäger et al. 2005, S. 319/.

In Kapitel 2 sind zunächst gebräuchliche Modelle zur Parametrierung eines Kreiszyllinders zusammengefasst. Für Zylinder mit elliptischer Grundfläche wird anschließend in Kapitel 3 ein geometrisches Modell vorgeschlagen. Gegenüber der algebraischen Darstellung lassen sich die Modellparameter ohne den Umweg einer sich anschließenden Hauptachsentransformation direkt geometrisch interpretieren. Weiterhin ist durch diese geometrische Darstellung der gewünschte Formtyp explizit definiert. Der Bestimmung der Modellparameter widmet sich das Kapitel 4. Als mögliches Schätzverfahren wird hierbei exemplarisch die sequenzielle quadratische Programmierung eingeführt, welche in der numerischen Optimierung aufgrund seines universellen Charakters zu den Standardverfahren zählt und insbesondere bei nichtlinearen Modellen empfohlen wird (z. B. /Geiger & Kanzow 2002, S. 234/).

2 KREISZYLINDER

Zur Beschreibung eines Kreiszyllinders finden sich in der Literatur verschiedene Darstellungen, wobei im Folgenden ausschließlich

geometrische Modelle betrachtet werden, da deren Modellparameter im Kontext der Formanalyse direkt interpretierbar sind. /Kupferer 2005, S. 56/ modelliert den Kreiszyllinder in Parameterdarstellung, d. h.

$$P_i = P_0 + t_i n + r q_i. \tag{1}$$

Hierin beschreibt $P_{0,i}^\perp = P_0 + t_i n$ die Zylinderachse als Gerade in Parameterform durch einen Aufpunkt P_0 , einen Richtungsvektor n , mit

$$n^T n = 1, \tag{2}$$

und den Geradenparameter t_i , der den Abstand zwischen P_0 und $P_{0,i}^\perp$ beschreibt. Der Richtungsvektor q_i , mit

$$q_i^T q_i = 1, \tag{3}$$

steht senkrecht auf dem Achsvektor n , d. h.

$$n^T q_i = 0, \tag{4}$$

sodass der Hilfspunkt $P_{0,i}^\perp$ den kürzesten Abstand r zum Oberflächenpunkt des Zylinders P_i besitzt. Der Zylinderradius ist r .

Da für den Aufpunkt P_0 eine beliebige Position auf der Zylinderachse gewählt werden kann, ist zur eindeutigen Positionierung eine weitere Bedingung notwendig. O. B. d. A. wird

$$n^T P_0 = 0 \tag{5}$$

gewählt, sodass P_0 den kürzesten Abstand zum Koordinatenursprung aufweist /Kupferer 2005, S. 56/. Abb. 1 stellt den Kreiszyllinder in Parameterdarstellung schematisch dar.

Für n Oberflächenpunkte ergeben sich mit Gl. (1) $3n$ Bestimmungsgleichungen, $7 + 4n$ zu bestimmende Modellparameter

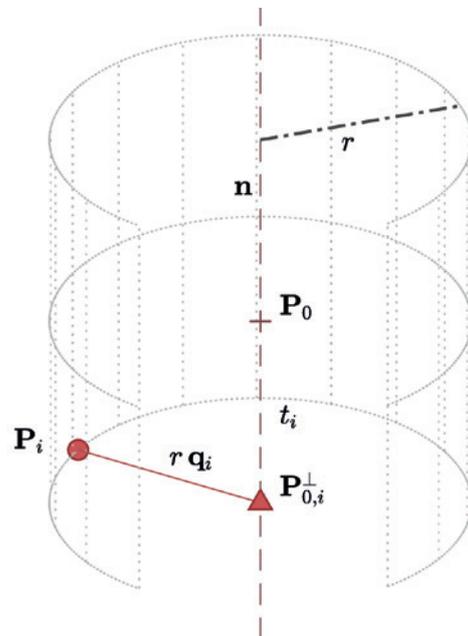


Abb. 1 | Schematische Darstellung eines Kreiszyllinders. Die Zylinderachse ist durch den Aufpunkt P_0 und den Richtungsvektor n parametrisiert. $P_{0,i}^\perp$ ist der Lotfußpunkt des Oberflächenpunkts P_i auf der Zylinderachse. Der Richtungsvektor und der Abstand (Zylinderradius) zwischen P_i und $P_{0,i}^\perp$ sind q_i bzw. r .

sowie $2 + 2n$ zusätzliche Bedingungen. Die effektive Anzahl an unabhängigen Modellparametern beträgt somit fünf für den Kreiszyylinder, sodass mit $n = 5$ Punkten der Kreiszyylinder eindeutig bestimmt ist.

/Späth 2000/ nutzt zur Modellierung des Kreiszyinders aus, dass dessen Grundfläche einem Kreis entspricht. Verläuft die Zylinderachse parallel zur Z -Achse des Koordinatensystems (kanonische Form), ergeben sich die Punkte $\tilde{\mathbf{p}}_i$ auf der Mantelfläche aus der Parameterdarstellung des Kreises zu

$$\begin{aligned}\tilde{x}_i &= x_0 + r \cos \omega_i, \\ \tilde{y}_i &= y_0 + r \sin \omega_i, \\ \tilde{z}_i &= z_i^\perp.\end{aligned}\quad (6)$$

Hier ist $\mathbf{p}_i^\perp = (x_0 \ y_0 \ z_i^\perp)^\top$ der Lotfußpunkt von $\tilde{\mathbf{p}}_i$, ω_i der korrespondierende Flächenparameter und r wiederum der Zylinderradius. Eine gemessene Position \mathbf{p}_i liegt demnach auf dem Zylindermantel, wenn diese die Bedingung

$$\|\mathbf{p}_i - \tilde{\mathbf{p}}_i\|_2 = 0 \quad (7)$$

erfüllt, worin $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm beschreibt. Im Allgemeinen verläuft die Zylinderachse nicht parallel zur Z -Achse des Koordinatensystems und die Achsorientierung ist zusätzlich zu berücksichtigen, vgl. /Späth 2000/:

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_y(\alpha) \mathbf{P}_i, \quad (8)$$

worin $\mathbf{R}_x(\beta)$ und $\mathbf{R}_y(\alpha)$ Basisrotationsmatrizen beschreiben, die jeweils eine Rotation mit dem in Klammern angegebenen Winkel um die im Index angegebene Koordinatensystemachse beschreiben. Aufgrund der Flächenparameter z_i^\perp , ω_i ergeben sich für n Punkte $5 + 2n$ unbekannte Parameter. Die Anzahl der Bestimmungsgleichungen nach Gl. (6) beträgt $3n$, sodass sich wiederum eine effektive Anzahl an unabhängigen Modellparametern von fünf ergibt.

In Abhängigkeit des Aufnahmeverfahrens können bei der Datenerfassung sehr große Datenmengen entstehen, z. B. beim terrestrischen Laserscanning. Da die Anzahl der unbekanntem Modellparameter sowohl beim Einsatz von Gl. (7) als auch bei der Verwendung von Gl. (8) direkt von der Punktzahl n abhängt, sind diese Modellierungsansätze ohne weitere Maßnahmen nur bedingt für den universellen praktischen Einsatz empfehlenswert. Um die Abhängigkeit zwischen der Punktzahl und der Anzahl der Modellparameter aufzulösen, nutzt /Ahn 2004, S. 119/ anstelle der Parameterdarstellung in Gl. (6) die korrespondierenden Vektorkomponenten, d. h.

$$\begin{aligned}\cos \omega_i &= \frac{\Delta \tilde{x}_i}{\sqrt{\Delta \tilde{x}_i^2 + \Delta \tilde{y}_i^2}}, \\ \sin \omega_i &= \frac{\Delta \tilde{y}_i}{\sqrt{\Delta \tilde{x}_i^2 + \Delta \tilde{y}_i^2}},\end{aligned}\quad (9)$$

wodurch keine zusätzlichen Hilfsparameter benötigt werden. Hierin sind $\Delta \tilde{x}_i$ und $\Delta \tilde{y}_i$ die Koordinatendifferenzen zwischen dem i -ten Punkt der Mantelfläche $\tilde{\mathbf{p}}_i$ und dem korrespondierenden Lotfußpunkt \mathbf{p}_i^\perp .

Die wohl gebräuchlichste Parametrierung für einen Kreiszyylinder ergibt sich aus der Abstandsgleichung eines Punkts zu einer Raumgeraden (z. B. /Muralikrishnan & Raja 2009, S. 143/, /Herrmann et al. 2015/):

$$\|(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0) \times \mathbf{n}\|_2 = r, \quad (10)$$

welche sich über die Flächeninhaltsberechnung eines Dreiecks sehr anschaulich herleitet. Die Anzahl der unbekanntem Modellparameter beträgt hierbei sieben und ist nicht von der Anzahl der Punkte abhängig. Analog zur Darstellung von /Kupferer 2005, S. 56/ sind zusätzlich die Gl. (2) und Gl. (5) als Bedingungsgleichungen zur eindeutigen Parametrierung zu berücksichtigen. Somit beträgt die effektive Anzahl unabhängiger Modellparameter wiederum fünf. Gl. (10) enthält mit dem Aufpunkt \mathbf{P}_0 , der Achsorientierung \mathbf{n} und dem Zylinderradius r alle notwendigen Referenzparameter zur eindeutigen geometrischen Beschreibung des Zylinders /DIN EN ISO 10360-6 2009/, /ASME B89.4.10-2000 2011/, siehe auch *Abb. 1*.

Unabhängig von der gewählten Parametrierung ergeben sich für alle hier zusammengestellten Modelle stets identische Zylindergeometrien. Gegenüber den Darstellungen nach Gl. (7) bzw. Gl. (6) resultiert jedoch bei Verwendung von Gl. (10) ein deutlich kompakteres Normalgleichungssystem, wodurch ein geringerer Ressourcenverbrauch und numerischer Aufwand beim Lösen zu erwarten sind. Weiterhin ist das Bereitstellen von geeigneten Startwerten aufgrund des hohen Anschauungsgrads der Modellparameter in Gl. (10) vergleichsweise einfach, sodass diese Darstellung hier empfohlen und im Folgenden auf den elliptischen Fall übertragen wird.

3 ELLIPTISCHER ZYLINDER

Während für den Kreiszyylinder verschiedene geometrische Modellierungen existieren, werden zur Beschreibung des elliptischen Zylinders fast ausnahmslos algebraische Darstellungen verwendet (z. B. /Drixler 1993/, /Lehmann 2019/), d. h.

$$\mathbf{P}_i^\top \mathbf{Q} \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_i^\top \mathbf{q} + q_0 = 0, \quad (11)$$

worin

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & q_4/\sqrt{2} & q_5/\sqrt{2} \\ q_4/\sqrt{2} & q_2 & q_6/\sqrt{2} \\ q_5/\sqrt{2} & q_6/\sqrt{2} & q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_7 \\ q_8 \\ q_9 \end{pmatrix} \quad (12)$$

die algebraischen Parameter der Quadrik sind. Sowohl die räumliche Position und Orientierung als auch die datumsinvarianten Formparameter werden implizit durch die zehn algebraischen Parameter beschrieben. Von diesen zehn Parametern sind jedoch nur neun unabhängig, sodass eine zusätzliche Parameterrestriktion zu berücksichtigen ist. /Drixler 1993/ empfiehlt die Normierung

$$\sum_{i=1}^6 q_i^2 = 1, \quad (13)$$

da diese unabhängig von der Wahl des übergeordneten Koordinatensystems ist. Zur Bestimmung der algebraischen Parameter einer allgemeinen Quadrik sind folglich $n = 9$ Punkte nötig (z. B. /Jäger et al. 2005, Kap. 8.2.1/).

Die algebraischen Parameter sind i. Allg. für eine Interpretation der geometrischen Form ungeeignet /Ahn 2004, Kap. 1.2.2/. Aus diesem Grund wird die algebraische Darstellung üblicherweise

mittels Hauptachsentransformation in ihre erste bzw. zweite Normalform überführt, welche das Klassifizieren des Formtyps sowie das Ableiten der zugehörigen geometrischen Modellparameter erst ermöglicht /Drixler 1993/, /Kutterer & Schön 1999/. In der Koordinatenmesstechnik, insbesondere im Anwendungsbereich des Reverse Engineering, besteht die Aufgabe häufig darin, aus einer gegebenen Punktmenge die Parameter des eingemessenen Geometrielements zu bestimmen. Die Verwendung der algebraischen Darstellung führt hierbei zu dem Problem, dass der gewünschte Formtyp bis auf wenige Ausnahmen nicht explizit vorgegeben werden kann, sondern sich erst im Rahmen der Hauptachsentransformation ergibt. Hierdurch kann nicht sichergestellt werden, dass die resultierende Geometrie der erwarteten Geometrie entspricht /Drixler 1993/, /Lösler & Nitschke 2010/.

Im Folgenden wird eine geometrische Darstellung für den elliptischen Zylinder in allgemeiner Raumlage angegeben. Da insbesondere die Parametrierung nach Gl. (10) alle notwendigen Referenzparameter zur eindeutigen geometrischen Beschreibung des Kreiszyinders beinhaltet /DIN EN ISO 10360-6 2009/, /ASME B89.4.10-2000 2011/ und in einem vergleichsweise kompakten Normalgleichungssystem mündet, orientiert sich die nachfolgende Verallgemeinerung für Zylinder mit elliptischer Grundfläche an dieser Darstellung.

In Gl. (10) sind alle Punkte P_i , die den festen orthogonalen Abstand r von der durch P_0 und n gegebenen Zylinderachse besitzen, Oberflächenpunkte des Kreiszyinders. Innerhalb der jeweiligen Schnittebene, die durch n und P_i aufgespannt wird, entspricht dies der Kreisdefinition. Zur Modellierung eines elliptischen Zylinders lässt sich auf die Ellipsendefinition (z. B. /Lösler & Nitschke 2010/)

$$\|p_i - f_1\|_2 + \|p_i - f_2\|_2 = 2a \tag{14}$$

zurückgreifen. Hierin sind f_1 und f_2 die Brennpunkte und a die große Halbachse der Ellipse. Jeder Punkt, dessen Abstände zu den beiden Ellipsenbrennpunkten der doppelten Länge der großen Halbachse entsprechen, ist ein Punkt der Ellipse. In Analogie zu Gl. (10) ergibt sich hieraus unmittelbar die erweiterte Modellgleichung für den elliptischen Zylinder,

$$\|(P_i - F_1) \times n\|_2 + \|(P_i - F_2) \times n\|_2 = 2a, \tag{15}$$

worin F_1 und F_2 Aufpunkte der parallelen Brenngeraden sind, die in Richtung des Normalenvektors n orientiert sind. F_1 und F_2 sind hierbei beliebige Punkte der jeweiligen Brenngerade. Mit den beiden Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} n^T F_1 &= 0, \\ n^T F_2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

werden wiederum die Positionen gewählt, die den kürzesten Abstand zum Koordinatenursprung besitzen, siehe auch Gl. (5). Zusammen mit Gl. (2) sind somit drei zusätzliche Bedingungen notwendig, um die zehn Modellparameter eindeutig zu beschreiben. Gl. (15) besitzt somit sieben effektive Parameter, sodass zur Bestimmung des elliptischen Zylinders mindestens $n = 7$ Punkte vorzugeben sind. Im Vergleich zur Quadrik werden demnach weniger Punktbeobachtungen benötigt /Lehmann 2018/.

Durch die Verwendung von Gl. (16) liegen F_1 und F_2 in einer Ebene, die parallel zur Grundfläche des elliptischen Zylinders liegt. Hierdurch ergibt sich die lineare Exzentrizität zu

$$e = \frac{1}{2} \|F_1 - F_2\|_2, \tag{17}$$

sodass die kleine Halbachse des elliptischen Zylinders durch

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} \tag{18}$$

gegeben ist. Um die Hauptachse des Zylinders eindeutig zu spezifizieren, ist neben n ein Aufpunkt wie

$$P_0 = \frac{1}{2}(F_1 - F_2) \tag{19}$$

nötig. Abb. 2 stellt die Parameter des elliptischen Zylinders nach Gl. (15) schematisch dar.

Werden zusätzlich die beiden Restriktionen

$$\begin{aligned} X_{F_1} - X_{F_2} &= 0, \\ Y_{F_1} - Y_{F_2} &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

berücksichtigt, so liefert Gl. (15) die Parameter eines Kreiszyinders, bei dem die beiden Aufpunkte F_1 und F_2 identische Koordinaten besitzen und P_0 in Gl. (10) entsprechen. Die Bedingung $Z_{F_1} - Z_{F_2} = 0$ wird hierbei implizit bereits durch die Verwendung von Gl. (16) erfüllt. Gl. (15) kann in Abhängigkeit der Zusatzbedingungen daher sowohl für Kreiszyylinder als auch für Zylinder mit elliptischer Grundfläche verwendet werden. Hierdurch kann

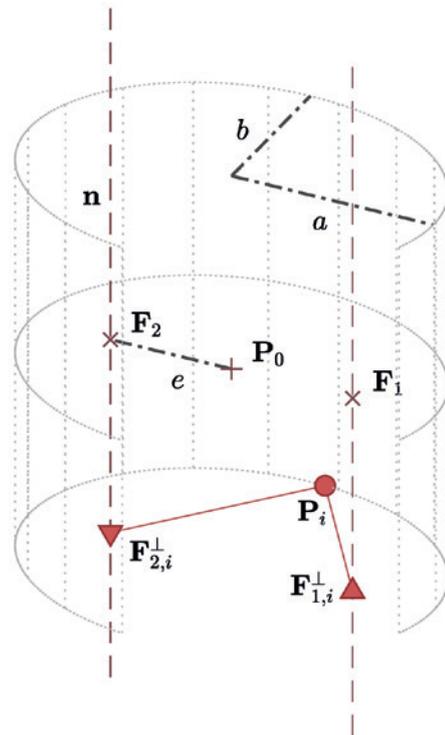


Abb. 2 | Schematische Darstellung eines elliptischen Zylinders. Die beiden parallelen Brenngeraden sind durch den Richtungsvektor n und die beiden Aufpunkte F_1 bzw. F_2 parametrierbar. Die aufsummierten Abstände eines Oberflächenpunkts P_i zu den beiden Lotfußpunkten $F_{1,i}^\perp$ und $F_{2,i}^\perp$ der Brenngeraden entsprechen der doppelten Länge der großen Halbachse a . Die kleine Halbachse ist b . Der Abstand e ist die lineare Exzentrizität und ergibt sich aus dem Abstand zwischen der Zylinderhauptachse und einer Brenngeraden.

zwischen den beiden Zylinderdarstellungen gewechselt werden, um beispielsweise auftretende Systematiken in den Beobachtungsresiduen zu analysieren und ggf. geometrisch zu interpretieren /Lösler et al. 2018/.

4 NUMERISCHES BEISPIEL

Durch Vorgabe eines funktionalen Modells sowie eines geeigneten Schätzprinzips, wie die Minimierung der quadratischen Abweichungen (L2-Norm) oder die Minimierung der maximalen (absoluten) Abweichung (L ∞ -Norm), ermöglicht die Formanalyse neben der Bewertung der datumsinvarianten Formparameter und der Lage- und Orientierungsparameter auch eine Analyse der Oberflächenabweichungen /Geist 2017/. In Anlehnung an die /DIN EN ISO 10360-6 2009/ erfolgt die Schätzung der Parameter in diesem Beitrag nach der Methode der kleinsten Verbesserungsquadratsumme (L2-Norm). Eine detaillierte Übersicht über mögliche weitere Schätzer und deren Eigenschaften kann u. a. /Jäger et al. 2005, Kap. 4.5/ entnommen werden.

Liegen mindestens $n = 7$ Punktbeobachtungen auf der Zylindermantelfläche vor, so lassen sich die Modellparameter des elliptischen Zylinders mittels Gl. (15) zurückbestimmen. Das implizite funktionale Zylindermodell nach Gl. (15) ist nichtlinear, sodass die Parameterbestimmung iterativ erfolgt. Eines der effizientesten Verfahren in der numerischen Optimierung ist die sequentielle quadratische Programmierung (SQP). Die SQP wird insbesondere bei allgemeinen nichtlinearen Optimierungsproblemen empfohlen /Geiger & Kanzow 2002, S. 234/. Das zu lösende Optimierungsproblem lautet

$$\begin{aligned} \min \Omega(\mathbf{u}) \\ \text{u. d. N.} \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (21)$$

Durch Einführen der Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Omega + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} \quad (22)$$

lässt sich die Zielfunktion Ω mit der Nebenbedingung \mathbf{f} kombinieren. Hierin enthält der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ die Lagrange-Multiplikatoren. Die notwendige Optimalbedingung lautet /Geiger & Kanzow 2002, S. 239/:

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

worin $\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla \Omega + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$ den Gradienten der Lagrange-Funktion darstellt, $\nabla \Omega$ der Gradient der Zielfunktion ist und \mathbf{J} die Jacobimatrix beschreibt, die die ersten partiellen Ableitungen der Nebenbedingung nach den Unbekannten \mathbf{u} enthält. Durch das Bereitstellen geeigneter Startwerte \mathbf{u}_0 und $\boldsymbol{\lambda}_0$ und das Anwenden des Newton-Verfahrens auf Gl. (23) folgt die bekannte Iterationsvorschrift /Geiger & Kanzow 1999, Kap. 9/:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_0 \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\lambda}_0 \end{bmatrix} = -\mathbf{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (24)$$

worin die Jacobimatrix durch

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{L} & \mathbf{J}^T \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (25)$$

gegeben ist und $\nabla_{\mathbf{u}\mathbf{u}}^2 \mathcal{L} = \frac{1}{2} \nabla^2 \Omega + \sum_{i=1}^l \lambda^{(i)} \mathbf{H}^{(i)}$. Hierin beschreiben $\nabla^2 \Omega$ und \mathbf{H} die Hessematrizen der Zielfunktion bzw. der Nebenbedingung, die die zweiten partiellen Ableitungen enthalten.

Die unbekannt Parameter $\mathbf{u}^T = [\mathbf{x}^T \ \mathbf{v}^T]$ in Gl. (21) setzen sich zum einen aus den Beobachtungsresiduen \mathbf{v} und zum anderen aus den Modellparametern \mathbf{x} zusammen. Für die Schätzung der Modellparameter eines elliptischen Zylinders lautet \mathbf{x} gemäß Gl. (15)

$$\mathbf{x}^T = [X_{F1} \ Y_{F1} \ Z_{F1} \ X_{F2} \ Y_{F2} \ Z_{F2} \ n_x \ n_y \ n_z \ a]. \quad (26)$$

Die Nebenbedingungen \mathbf{f} in Gl. (21) ergeben sich aus Gl. (15) sowie den notwendigen Restriktionen nach Gl. (2) und Gl. (16). Mit der Forderung nach minimaler gewichteter Verbesserungsquadratsumme ergibt sich die Zielfunktion Ω in Gl. (21) zu

$$\Omega(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^T \mathbf{W} \mathbf{u} = [\mathbf{x} \ \mathbf{v}] \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

worin \mathbf{W} die Gewichtsmatrix darstellt, die in diesem Fall lediglich an der zu \mathbf{v} korrespondierenden Position durch die Gewichtsmatrix der Residuen \mathbf{W}_v zu besetzen ist.

Die Berücksichtigung der zweiten partiellen Ableitungen in Gl. (24) wird durch das Newton-Verfahren motiviert, welches für geeignete Startwerte \mathbf{u}_0 und $\boldsymbol{\lambda}_0$ quadratisch konvergiert. Die Berücksichtigung der Hessematrix in den geodätischen Ausgleichungsverfahren wird u. a. von /Lenzmann & Lenzmann 2007/ für das Gauß-Markov-Modell bzw. von /Bähr 1985/ für das Gauß-Helmert-Modell diskutiert. Allgemein ist der erhöhte numerische Aufwand, der sich durch das Bereitstellen der Hessematrizen ergibt, den besseren Konvergenzeigenschaften gegenüberzustellen. Bei sachgerechter Modellbildung liefern alle hier genannten Verfahren identische Ergebnisse für die geschätzten Parameter.

Zur Bestimmung eines elliptischen Zylinders liegen die in Tab. 1 gegebenen $n = 10$ Punktbeobachtungen vor, die /Ahn 2004, S. 71/ entnommen sind. Diese Punkte beschreiben ein kurzes Segment einer zylindrischen Spirale (Helix) und werden als gleichgenau und unabhängig voneinander angenommen (Abb. 3). Die Gewichtsmatrix in Gl. (27) entspricht mit $\mathbf{W}_v = \mathbf{I}$ einer Einheitsmatrix, wodurch die geschätzten Residuen \mathbf{v} senkrecht auf der Zylinderoberfläche stehen.

	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄	P ₅	P ₆	P ₇	P ₈	P ₉	P ₁₀
X	7 m	5 m	3 m	1 m	-1 m	-3 m	-4 m	-5 m	-5 m	-5 m
Y	1 m	3 m	4 m	4 m	4 m	4 m	2 m	1 m	-1 m	-3 m
Z	3 m	4 m	4 m	4 m	3 m	2 m	1 m	0 m	-1 m	-1 m

Tab. 1 | Koordinaten von zehn gleichgenauen und unabhängigen Oberflächenpunkten zur Bestimmung eines elliptischen Zylinders, die /Ahn 2004, S. 71/ entnommen sind

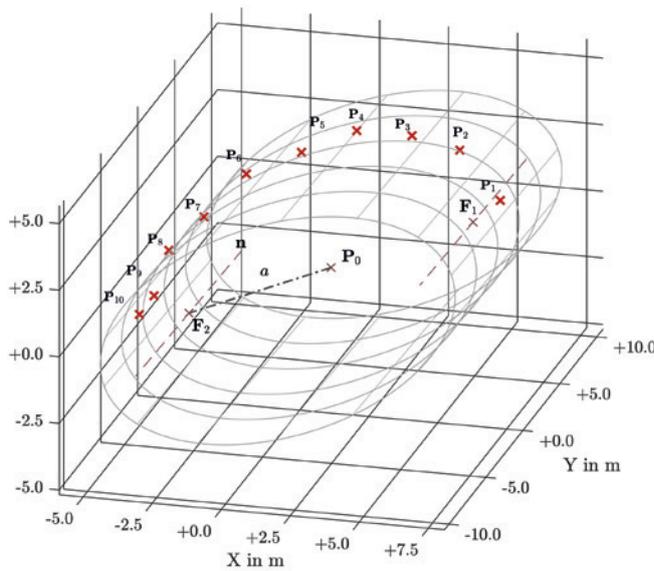


Abb. 3 | Geschätzter elliptischer Zylinder in Gittermodell-darstellung (grau) sowie die beiden resultierenden Brenngeraden (dunkelrot, gestrichelt). Zusätzlich sind die Oberflächenpunkte, die /Ahn 2004, S. 71/ entnommen sind, als rote Kreuze eingezeichnet.

Zum Auffinden geeigneter Startwerte \mathbf{x}_0 für die Modellparameter bietet es sich in diesem Fall an, zunächst aus den Oberflächenpunkten die zugehörige Regressionsebene zu bestimmen. Ein nichtiteratives Verfahren zum Bestimmen von Ebenenparametern geben u. a. /Malissiovas et al. 2016/ an. Der resultierende Normalenvektor dieser Ebene entspricht hierbei (näherungsweise) dem Richtungsvektor der zu bestimmenden Zylinderachse. Die auf diese Ebene projizierten Oberflächenpunkte beschreiben weiterhin (genähert) eine Ellipse, für die /Fitzgibbon et al. 1996/ ein direktes Lösungsverfahren angeben. Hieraus resultieren die beiden (projizierten) Brennpunkte und die große Ellipsenhalbachse, siehe auch Gl. (14). Durch Rücktransformation der Brennpunktpositionen ins originäre Aufnahmesystem der Punkte liegt \mathbf{x}_0 gemäß Gl. (26) vor. Alternativ zu dieser zweistufigen Vorauswertung lassen sich geeignete Näherungswerte durch das Auswerten von Minimal-konfigurationen bestimmen /Beder & Förstner 2006/. Dieser Ansatz empfiehlt sich insbesondere dann, wenn mit kontaminierten Daten zu rechnen ist.

Die geschätzten Modellparameter des elliptischen Zylinders sind in Tab. 2 zusammengefasst. Eine Visualisierung des geschätzten Zylinders zusammen mit den $n = 10$ Oberflächenpunkten zeigt Abb. 3. Zusätzlich

Parameter	Schätzwert
\hat{X}_{F1}	+6,095571
\hat{X}_{F2}	+0,707839
\hat{Z}_{F1}	+2,205113
\hat{X}_{F2}	-3,874889
\hat{Y}_{F2}	-0,488753
\hat{Z}_{F2}	-1,727289
\hat{n}_x	+0,072317
\hat{n}_y	-0,990376
\hat{n}_z	+0,118006
\hat{a}	+6,586576

Tab. 2 | Zusammenstellung der geschätzten Modellparameter $\hat{\mathbf{x}}$ des elliptischen Zylinders, d. h. Aufpunkte F_1 bzw. F_2 der beiden Brenngeraden, Richtungsvektor der Zylinderachse \mathbf{n} und große Halbachse a . Die Aufpunkte und die große Halbachse sind in Meter angegeben. Der Richtungsvektor ist mittels Gl. (2) auf die Länge eins normiert.

sind die beiden resultierenden Brenngeraden und die große Ellipsenhalbachse mit dargestellt. Die mittels Gl. (27) geschätzte Verbesserungsquadratsumme für diesen elliptischen Zylinder beträgt $\Omega_{EZ} = 0,095$. Verglichen mit den in /Ahn 2004, S. 71/ angegebenen Verbesserungsquadratsummen für den Kreiszyylinder bzw. die Helix von $\Omega_{KZ} = 0,221$ bzw. $\Omega_H = 0,763$ ist Ω_{EZ} deutlich kleiner. Die Anpassungsgüte des elliptischen Zylinders an diese Oberflächenpunkte ist demnach höher als beim Kreiszyylinder bzw. der Helix. Da der Kreiszyylinder gegenüber dem elliptischen Zylinder weniger Modellparameter besitzt, war eine Verringerung der resultierenden Verbesserungsquadratsumme vorhersehbar. Die Helix besitzt jedoch auch zwei Parameter mehr als der Kreiszyylinder, um den Gang und die Orientierung der zylindrischen Spirallinie zu parametrieren. Die Oberflächenpunkte müssen hierbei jedoch nicht nur auf dem Zylindermantel, sondern auch auf der Spirallinie der Helix liegen, wodurch diese beiden Zusatzparameter im Vergleich zum Kreiszyylinder Zwang auf die Schätzung ausüben. Trotz der höheren Anzahl an Modellparameter ergibt sich daher eine größere Verbesserungsquadratsumme.

Erfolgt die Auswertung der $n = 10$ Oberflächenpunkte hingegen mittels Gl. (11) im algebraischen Ansatz, so wird die Geometrie nach der Hauptachsentransformation als elliptisches Hyperboloid klassifiziert. Ausgehend davon, dass die Oberflächenpunkte tatsächlich eine Helix beschreiben und somit auf einem Zylindermantel liegen, wäre eine Analyse der resultierenden Formparameter sowie der Residuen hier praktisch unmöglich. Dies unterstreicht noch einmal den Vorteil einer expliziten Modellierung, wenn der Formtyp des Geometrieelements a priori bekannt ist.

5 ZUSAMMENFASSUNG

Die Rückbestimmung formbeschreibender Modellparameter von Regelgeometrien sowie das Ableiten von Lage- und Orientierungsparametern gehört zu den Standardaufgaben in der Koordinatenmesstechnik. Neben Kugeln und Ebenen besitzen Zylinder einen großen Anwendungsbereich, z. B. im Maschinen- und Anlagenbau, in der Biomechanik oder in der Bauwerksdatenmodellierung. Während für den Kreiszyylinder in der Literatur verschiedene geometrische Modellierungen existieren, wird der Zylinder mit elliptischer Grundfläche häufig durch eine algebraische Darstellung parametrieren. Die hierbei auftretenden Parameter lassen sich nicht direkt interpretieren, da diese i. Allg. keine geometrische Bedeutung haben. Weiterhin kann während der Parameterschätzung nicht sichergestellt werden, dass der resultierende Formtyp der erwarteten Regelgeometrie entspricht, da dieser erst nachträglich im Zuge einer Hauptachsentransformation klassifiziert werden kann.

In diesem Beitrag wurde ein geometrisches Modell zur Parametrierung eines elliptischen Zylinders in impliziter Darstellung vorgeschlagen. Die Parametrierung des vorgestellten Zylindermodells mit elliptischer Grundfläche orientiert sich an der geometrischen Beschreibung für den Kreiszyylinder nach /DIN EN ISO 10360-6 2009/ bzw. /ASME B89.4.10-2000 2011/. Das Modell nutzt die Eigenschaft einer ebenen Ellipse und überträgt diese auf die räumliche Geometrie des Zylinders. Die hierbei geschätzten Modell-

parameter lassen sich direkt interpretieren, sodass z. B. Vergleiche zwischen Soll- und Ist-Maßen möglich oder Objektdeformationen direkt erfassbar sind. Durch die Berücksichtigung von weiteren Bedingungsgleichungen erlaubt das hier vorgeschlagene Modell auch eine Parametrierung von Kreiszyllindern. Die Anwendbarkeit wurde anhand eines Beispieldatensatzes demonstriert.

LITERATUR

Ahn, S. J. (2004): Least Squares Orthogonal Distance Fitting of Curves and Surfaces in Space. Lecture Notes in Computer Science, 3151. Springer, Berlin. DOI:10.1007/b104017.

ASME B89.4.10-2000 (2011): Methods for Performance Evaluation of Coordinate Measuring System Software. American Society of Mechanical Engineers, New York.

Bähr, H.-G. (1985): Second Order Effects in the Gauß-Helmert Model. 7th International Symposium on Geodetic Computations, Krakau, Polen.

Beder, C.; Förstner, W. (2006): Direct Solutions for Computing Cylinders from Minimal Sets of 3D Points. In: Leonardis, A.; Bischof, H.; Pinz, A. (Hrsg.): Computer Vision – ECCV 2006. Image Processing, Computer Vision, Pattern Recognition, and Graphics, 3951, 135–146.

DIN EN ISO 10360-6 (2009): Geometrische Produktspezifikation (GPS) – Annahmeprüfung und Bestätigungsprüfung für Koordinatenmessgeräte (KMG) – Teil 6: Fehlerabschätzung beim Berechnen zugeordneter Geometrieelemente nach Gauß. Beuth, Berlin.

Drixler, E. (1993): Analyse der Form und Lage von Objekten im Raum. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, 409. München.

Fitzgibbon, A. W.; Pilu, M.; Fisher, R. B. (1996): Direct least squares fitting of ellipses. In: Proceedings of 13th International Conference on Pattern Recognition, IEEE, 253–257. DOI:10.1109/icpr.1996.546029.

Geiger, C.; Kanzow, C. (1999): Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin. DOI:10.1007/978-3-642-58582-1.

Geiger, C.; Kanzow, C. (2002): Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben. Springer, Berlin. DOI:10.1007/978-3-642-56004-0.

Geist, M. (2017): Flächenhafte Formabweichungen bei der Anwendung terrestrischer Laserscanner. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, 806. München.

van Gosliga, R.; Lindenberg, R.; Pfeifer, N. (2006): Deformation analysis of a bored tunnel by means of terrestrial laser scanning. In: The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences 36(2006)5, 81–89.

Gröne, A. (1995): Gestaltparameter. In: Schwarz, W. (Hrsg.): Vermessungsverfahren im Maschinen- und Anlagenbau. Deutscher Verein für Vermessungswesen, 13, Wittwer, Stuttgart, 23–26.

Hennes, M. (2009): Freiformflächenerfassung mit Lasertrackern – eine ergonomische Softwarelösung zur Reflektoroffsetkorrektur. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 116(2009)5, 188–194.

Hermann, C.; Lösler, M.; Bähr, H. (2015): Comparison of Spatial Analyzer and Different Adjustment Programs. In: Kutterer, H.; Seitz, F.; Alkhatib, H.; Schmidt, M. (Hrsg.): The 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems (QuGOMS'11), International Association of Geodesy Symposia. Springer, Berlin, 79–84. DOI:10.1007/978-3-319-10828-5_12.

Jäger, R.; Müller, T.; Saler, H.; Schwäble, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Wichmann, Heidelberg.

Kupferer, S. (2005): Anwendung der Total-Least-Squares-Technik bei geodätischen Problemstellungen. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Karlsruher Institut für Technologie, KIT Scientific Publishing.

Kutterer, H.; Schön, S. (1999): Statistische Analyse quadratischer Formen – Der Determinantenansatz. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 106(1999)10, 322–330.

Lehmann, R. (2019): Type-Constrained Total Least Squares Fitting of Curved Surfaces to 3D Point Clouds. In: Journal of Mathematical and Statistical Analysis 2(2019)1, 1–13.

Lenzmann, L.; Lenzmann, E. (2007): Zur Lösung des nichtlinearen Gauß-Markov-Modells. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 132(2007)2, 108–110.

Lichtenstein, M.; Benning, W. (2010): Registrierung von Punktwolken auf der Grundlage von Objektprimitiven. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 117(2010)6, 202–207.

Lösler, M.; Arnold, M.; Bähr, H.; Eschelbach, C.; Bahlo, T.; Grewe, R.; Hug, F.; Jürgensen, L.; Winkemann, P.; Pietralla, N. (2015): Hochpräzise Erfassung von Strahlführungselementen des Elektronenlinearbeschleunigers S-DALINAC. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 140(2015)6, 346–356. DOI:10.12902/zfv-0090-2015.

Lösler, M.; Eschelbach, C.; Haas, R. (2018): Zur Modellierung eines Ring-Focus-Paraboloids. In: Luhmann, Th.; Schumacher, Chr. (Hrsg.): Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik. Beiträge der 17. Oldenburger 3D-Tage 2018. Wichmann, Berlin/Offenbach, 222–234.

Lösler, M.; Haas, R.; Eschelbach, C.; Greiwe, A. (2019): Gravitational Deformation of Ring-Focus Antennas for VGOS – First Investigations at the Onsala Twin Telescopes Project. In: Journal of Geodesy 93(2019)10, 2069–2087. DOI:10.1007/s00190-019-01302-5.

Lösler, M.; Nitschke, M. (2010): Bestimmung der Parameter einer Regressionsellipse in allgemeiner Raumlage. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 117(2010)3, 113–117.

Malissiovas, G.; Neitzel, F.; Petrovic, S. (2016): Götterdämmerung over total least squares. In: Journal of Geodetic Science 6(2016)1, 43–60. DOI:10.1515/jogs-2016-0003.

Méndez, V.; Rosell-Polo, J. R.; Sanz, R.; Escolà, A.; Catalán, H. (2014): De-ciduous tree reconstruction algorithm based on cylinder fitting from mobile terrestrial laser scanned point clouds. In: Biosystems Engineering 124(2014), 78–88. DOI:10.1016/j.biosystemseng.2014.06.001.

Muralikrishnan, B.; Raja, J. (2009): Computational Surface and Roundness Metrology. Springer, London. DOI:10.1007/978-1-84800-297-5.

Späth, H. (2000): Ein Verfahren zur Bestimmung des Least-Squares-Zylinders. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 107(2000)2, 65–67.

Dipl.-Ing. (FH) Michael Lösler

FRANKFURT UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES – LABOR FÜR INDUSTRIELLE MESSTECHNIK

Nibelungenplatz 1 | 60318 Frankfurt am Main
michael.loesler@fb1.fra-uas.de

