

# Räumliche Höhenänderungsanalyse auf Grundlage einer automatisierten Ausgleichung massenhaft vorliegender PSI-Zeitreihen mittels orthogonaler Polynome

## Spatial Analysis of Height Changes Based on Automatic Adjustment of Large Quantities of PSI Time Series Using Orthogonal Polynomials

Wolfgang Busch, Janette Linke

Zunehmend kommt die Persistent-Scatterer-Interferometrie (PSI) zur hochgenauen Ableitung von zeitlich und räumlich variablen Höhenänderungen mittels Zeitreihen zum Einsatz. Durch das Auswerteverfahren werden lineare Höhenänderungsraten (in mm/Jahr) abgeleitet. Ein solches Ergebnis eines der PSI-Auswertung zugrunde liegenden linearen Regressionsmodells beschreibt jedoch in vielen Fällen nicht genau genug den tatsächlichen zeitlichen Verlauf der Höhenänderungen. Hier bietet ein allgemeines Polynommodell deutliche Verbesserungen, da in der Praxis Höhenänderungen in Abhängigkeit von der zeitlichen Variabilität ihrer Ursachen häufig nichtlinear ab- oder zunehmen. Dabei ist die Ermittlung des „richtigen“ Polynomgrads zur Beschreibung der Höhenänderungen von wesentlicher Bedeutung. In diesem Beitrag wird die automatische Bestimmung des erforderlichen Grads für eine signifikante Polynomanpassung aufgezeigt. Durch eine entsprechende Softwareimplementierung wurde nicht nur eine nutzerunabhängige Polynomauswertung der PSI-Zeitreihen realisiert, sondern auch zusätzliche Aussagen zur Genauigkeit und zum zeitlichen Verlauf der Höhenänderungen ermöglicht. Darüber hinaus wird die flächenhafte Visualisierung und Analyse von Höhenänderungen im Messgebiet anhand von praktischen Beispielen mit Massendaten veranschaulicht.

**Schlüsselwörter:** Persistent-Scatterer-Interferometrie (PSI), Zeitreihen, Ausgleichung, orthogonale Polynome, Höhenänderungen

*Persistent Scatterer Interferometry (PSI) is increasingly applied for the high-precision derivation of spatially and temporally variable earth surface elevation changes using time series. Due to the analysis procedure linear rates of changes in elevation (in mm/year) are deduced. The assumption of a linear regression model will, in many cases, not be adequate enough to describe the actual temporal progress of the elevation changes and may lead to unsatisfactory results. The modeling of trends based on a general polynomial approach provides notable improvements. This is because, in practice, the elevation changes often decrease or increase in non-linear manner in dependency of temporal variability of the causes. The essential part is the determination of an appropriate polynomial degree for the characterization*

*of the elevation changes. This paper describes the automatic determination of the required degree of significant polynomial fitting. Through a corresponding software implementation not only an user-independent polynomial evaluation of PSI time series has been realized, but also additional information about accuracy and temporal progression of the elevation changes have been made possible. Furthermore the spatial visualisation and analysis of elevation changes in the measurement area is illustrated by practical examples using mass data.*

**Keywords:** Persistent Scatterer Interferometry (PSI), time series, adjustment, orthogonal polynomials, height changes

## 1 EINLEITUNG

Die satellitengestützte Radarinterferometrie wird seit weit über einem Jahrzehnt erfolgreich u. a. zur Erfassung von zeitlich variablen Höhenänderungen eingesetzt. Dabei sendet ein Radarsensor eines Satelliten Mikrowellenstrahlung zur Erdoberfläche und misst die Intensität der zurückgestreuten Signale und ihre Phasenlage im Bereich von  $-\pi$  bis  $+\pi$ . Die verschiedenen Satellitensensoren arbeiten in unterschiedlichen Frequenzbändern und erzeugen Daten mit unterschiedlicher räumlicher (z. B.  $30\,000 \times 17\,000$  Pixel, ca. 2 m/Pixel) und zeitlicher Auflösung (interferometrische Wiederkehrzeit, z. B. 24 Tage bei Radarsat-2 oder elf Tage bei TerraSAR-X).

Zur Ableitung von Zeitreihen verwendet man das punktbasierte Auswerteverfahren der sogenannten „Persistent-Scatterer-Interferometrie“ (PSI). Die Schätzung der Bewegungen erfolgt aus den gemessenen Phasenänderungen für Objekte mit stabilen und guten Rückstreuungseigenschaften (PS-Punkte) über Jahre hinweg in allen Radarszenen /Ferretti et al. 2001/. Die dabei erzielbare Genauigkeit für die abgeleiteten Höhenänderungen liegt bei wenigen Millimetern, siehe z. B. /Busch & Schäfer 2013/. Im Gegensatz zur nivellistischen Bestimmung von Höhenänderungen an einzelnen Punkten kann dieses Verfahren insbesondere in bebauten Gebieten nahezu flächendeckende Informationen über den zeitlichen Verlauf von Höhenänderungen mithilfe tausender solcher PS-Punkte erzeugen und damit auch die Analyse klein- und großräumig unterschiedlichen Höhenänderungsverhaltens ermöglichen.

Bei Bodenbewegungen, die durch verschiedene geogene und anthropogene Ursachen hervorgerufen werden, können in Abhängigkeit vom Betrachtungszeitraum zeitlich sowohl lineare Höhenänderungen auftreten als auch Trends, die besser mit einem Polynom höherer Ordnung als 1 (= Gerade) beschrieben werden. Beispiele hierfür sind das nichtlineare Senkungsverhalten nach Einstellung bergbaulicher Aktivitäten oder die Umkehr des Senkungstrends in einen Hebungstrend z. B. infolge der Einstellung der Grubenwasserhaltung. Ziel dieser am Institut für Geotechnik und Markscheidewesen der TU Clausthal (IGMC) durchgeführten Entwicklung war es deshalb, automatisiert für jeden der im Rahmen einer PSI-Auswertung erhaltenen PS-Punkte aus der Zeitreihe seiner Höhenänderungen den maximal notwendigen Polynomgrad für die statistisch optimale Anpassung zu ermitteln. Hierzu wurde auf das bewährte Modell orthogonaler Polynome zurückgegriffen und die Methode der kleinsten Quadrate verwendet.

## 2 MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN

Wie nachfolgend ausgeführt wird, besitzen orthogonale Polynome die praktische Eigenschaft, dass ihre Parameter voneinander unabhängig sind. Deshalb eignen sie sich für die statistische Bestimmung signifikanter Parameter und somit des maximalen Grads eines Polynoms, das sich optimal den Zeitreihendaten anpasst.

### 2.1 Orthogonale Polynome

**Definition:** Hat eine Matrix  $\mathbf{B}_{(n, m)}$ ,  $n > m$ , die Eigenschaft, dass  $\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{E}$  gilt ( $\mathbf{E}_{(m, m)}$  = Einheitsmatrix), so heißt diese Matrix (spalten) orthogonal /Zurmühl & Falk 1997/.

Eine quadratische, reelle Matrix  $\mathbf{B}_{(n, n)}$  ist genau dann orthogonal, wenn ihre Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind, d. h. wenn ihre Vektoren zusätzlich die Norm Eins besitzen:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{E}. \quad (1)$$

$\mathbf{B}$  ist invertierbar und ihre Transponierte ist gleichzeitig ihre Inverse:  $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^{-1}$ .

Orthogonale Matrizen stellen Kongruenzabbildungen dar (längen- und winkeltreu), also Drehungen und Spiegelungen in der Ebene oder im Raum.

Beispiel im  $\mathbb{R}^2$ :  $\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{S}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$ .

Unter orthogonalen Polynomen vom Grad  $m$  versteht man eine Folge von Polynomen  $P_0(x)$ ,  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ , ...,  $P_m(x)$  in einer Variablen  $x$ , die orthogonal bezüglich eines Skalarprodukts im normierten Vektorraum sind. Deshalb sind bei orthogonalen Polynomen die Koeffizienten vom Grad der Polynomentwicklung unabhängig.

Betrachtet wird das lineare Modell der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (univariates Gauß-Markov-Modell mit vollem Rang) mit

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{l} + \mathbf{v}, \text{ mit } \mathbf{D}(\mathbf{l}) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (2)$$

Hierbei seien mit  $n$  = Anzahl der (reduzierten) Beobachtungen und  $m$  = Anzahl der zu schätzenden Unbekannten  $\mathbf{A}$  eine  $(n, m)$ -Matrix fester Koeffizienten mit  $\text{rg } \mathbf{A} = m$ , die sogenannte Designmatrix,  $\mathbf{u}$  ein  $(m, 1)$ -Vektor fester, unbekannter Parameter,  $\mathbf{l}$  ein  $(n, 1)$ -Zufallsvektor von (reduzierten) Beobachtungen und  $\mathbf{v}$  ein  $(n, 1)$ -Vektor der Verbesserungen (= Residuen), die als normalverteilt angenommen werden sollen. Die Matrix  $\mathbf{D}(\mathbf{l})$  bezeichnet die symmetrische, positiv

definite  $(n, n)$ -Varianz-Kovarianz-Matrix der Beobachtungen a priori mit  $\text{rg } \mathbf{D}(\mathbf{I}) = n$ , die gleich der Varianz-Kovarianz-Matrix der Verbesserungen a priori ist.  $\mathbf{P}$  ist die symmetrische, positiv definite  $(n, n)$ -Matrix der Gewichte a priori mit  $\text{rg } \mathbf{P} = n$  und  $\sigma_0^2$  die unbekannte Varianz der Gewichtseinheit /Wolf 1997/. Das Polynommodell  $f(l_i)$  der Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen ist dann im zweidimensionalen Fall kartesischer Koordinaten  $x, y$  für  $n$  Beobachtungen  $\mathbf{I}$  und  $m$  Unbekannte  $\mathbf{u}$  gegeben mit

$$y_i = f(l_i) = b_0 + b_1 x_i + b_2 x_i^2 + b_3 x_i^3 + \dots + b_{m-1} x_i^{m-1} = l_i + v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Um Informationen über die Parameter  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m-1$ ) und damit die konkrete Art des Zusammenhangs zu erhalten, werden zu jeweils  $n$  gegebenen Werten  $x_i$  der unabhängigen Variablen  $\mathbf{x}$  entsprechende Beobachtungswerte  $l_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) erhoben. Die Spalten von  $\mathbf{A}_{(n, m)}$  sind aus den Grundpolynomen  $x_i^0 = 1, x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^{m-1}$  aufgebaut. Zweckmäßig trifft man die Entscheidung über den Grad der Polynomentwicklung in der Praxis über einen Hypothesentest (siehe Abschnitt 2.3).

Die Unbekannten  $\mathbf{u}$  werden nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet aus

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{I}. \quad (4)$$

Wird der Grad der Polynomentwicklung erhöht oder verringert, muss die Schätzung sämtlicher Parameter  $b_j$  ( $j = 0, \dots, m-1$ ) in (3) jeweils wiederholt werden. Um dies zu vermeiden, arbeitet man mit orthogonalen Polynomen.

## 2.2 Ausgleichung mit orthogonalen Polynomen

Das Polynommodell (3) wird ohne Änderung der Verbesserungen umgeformt zum orthogonalen Polynom:

$$f(l_i) = \tilde{b}_0 z_i^{(0)} + \tilde{b}_1 z_i^{(1)} + \tilde{b}_2 z_i^{(2)} + \tilde{b}_3 z_i^{(3)} + \dots + \tilde{b}_{m-1} z_i^{(m-1)} = l_i + v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

sodass  $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{Z} \mathbf{c}$  mit  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{E}$  (Orthogonalität) gilt, d. h. die Spaltenvektoren von  $\mathbf{Z}_{(n, m)}$  sind paarweise orthonormal zueinander. Dazu wird im linearen Modell der vermittelnden Ausgleichung mit  $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{I} + \mathbf{v}$  für die Normalgleichungen  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{G} \mathbf{G}^T$  (Cholesky-Zerlegung) gesetzt. Mit  $\mathbf{c} = \mathbf{G}^T \mathbf{u}$  und  $\mathbf{Z} = \mathbf{A} (\mathbf{G}^T)^{-1}$  ergibt sich

$$\mathbf{Z} \mathbf{c} = \mathbf{A} (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u}. \quad (6)$$

Nach Definition gilt  $\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{E} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{G}^T)^{-1}$ .

Da die Beobachtungen im Anwendungsfall (Höhenänderungen in PSI-Zeitreihen) alle gleich genau anzunehmen sind, berechnet sich die Schätzung der unbekannten Parameter  $\mathbf{c}$  nach der Methode der kleinsten Quadrate ohne Gewichte ( $\mathbf{P} = \mathbf{E}$ ) gemäß  $\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I}$  zu:

$$\mathbf{c} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{I} = \mathbf{Z}^T \mathbf{I}, \quad (7)$$

d. h. die  $\tilde{b}_j$  ( $j = 0, \dots, m-1$ ) sind unkorreliert und damit die ausgleichenen Polynomkoeffizienten vom Polynomgrad unabhängig. Die Retransformation  $\mathbf{u} = (\mathbf{G}^T)^{-1} \mathbf{c}$  ergibt sich aus  $\mathbf{c} = \mathbf{G}^T \mathbf{u}$ .

Sollen z. B. die unbekannten Parameter durch eine Ausgleichung mit einem Polynom 3. statt 4. Grads ermittelt werden, so besteht

für das Polynommodell  $y_i = f(l_i) = b_0 x_i^0 + b_1 x_i^1 + b_2 x_i^2 + b_3 x_i^3 = l_i + v_i$  die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{A}$  aus den ersten vier statt fünf Spalten. Die Schätzung der Parameter  $\mathbf{u} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{I}$  muss nach der Methode der kleinsten Quadrate neu berechnet werden.

Beim orthogonalen Polynom fällt in der Matrix  $\mathbf{Z}$  ebenfalls die letzte Spalte weg. Dadurch ergibt sich ohne Neurechnung die Schätzung  $\mathbf{c}$  nur mit einer Unbekannten weniger. Ein ausführliches Beispiel dazu ist in /Linke & Busch 2013/ zu finden.

Welcher Grad ist nun für die Polynomannpassung notwendig?

## 2.3 Signifikanztest zur Ermittlung des erforderlichen Grads für eine Polynomannpassung

Der geeignete Polynomgrad wird mittels eines Signifikanztests bestimmt. Dazu wird ein Ausgleichungsergebnis nach der Methode der kleinsten Quadrate für den maximal vorgegebenen Grad verwendet. Zur Durchführung des Signifikanztests wird die geschätzte Varianz der Gewichtseinheit  $\sigma_0^2$  benötigt. Diese kann aus den erhaltenen Verbesserungen bestimmt werden:

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{I} = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{I}, s_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \hat{\mathbf{v}}}{n - m}. \quad (8)$$

Für die Ermittlung des erforderlichen Grads der Polynomannpassung kann nun schrittweise – beginnend mit dem Koeffizienten höchsten Grads – getestet werden, ob bestimmte Polynomkoeffizienten zu Null gesetzt werden können. So wird z. B. für ein Polynom 4. Grads im ersten Schritt getestet:

$$H_0: b_4 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1: b_4 \neq 0.$$

Dieser Hypothesentest ist ein Spezialfall des Tests einer allgemeinen linearen Hypothese im linearen Modell der Ausgleichungsrechnung, die mit Matrizen folgendermaßen formuliert werden kann, siehe /Koch 1987/:

$$H_0: \mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{w} \quad \text{gegen} \quad H_1: \mathbf{H} \mathbf{u} \neq \mathbf{w}, \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{H} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), \mathbf{u} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = (0).$$

Die Nullhypothese wird geprüft, indem untersucht wird, ob sich die Verbesserungsquadratsumme durch Einführung der Restriktionen  $\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{w}$  signifikant erhöht hat. Die Erhöhung der Verbesserungsquadratsumme ist gleich der Größe

$$R = (\mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{w})^T (\mathbf{H} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{H}^T)^{-1} (\mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{w}). \quad (9)$$

Als Teststatistik  $T$  wird die Größe

$$T = \frac{R}{r \cdot s_0^2} \quad (10)$$

verwendet, wobei  $r$  die Anzahl der Restriktionen (also die Zeilenzahl bzw. den Rang der Matrix  $\mathbf{H}$ ) bedeutet. Bei normalverteilten Beobachtungen ist die Größe  $T$  unter der Nullhypothese  $F$ -verteilt mit  $(r, f)$  Freiheitsgraden. Dabei ist  $f = n - m$  die Gesamtredundanz des

Ausgleichungsproblems ohne die Restriktionen  $Hu = w$ . Die Fisher-Verteilung wird im Test verwendet, um festzustellen, ob der Unterschied zweier Stichprobenvarianzen auf statistischer Schwankung beruht oder ob er auf unterschiedliche Grundgesamtheiten hinweist. Bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  bedeutet dies:  $H_0$  ist abzulehnen, falls

$$T > F_{1-\alpha; f_1, f_2} \quad (11)$$

wobei der Wert der  $F$ -Verteilung für  $F_{1-\alpha; f_1, f_2}$  aus entsprechenden Verteilungstabellen entnommen werden kann, z. B. für  $\alpha = 0,05$ . Falls die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, ist es nicht notwendig, ein Polynom 4. Grads anzusetzen, siehe Beispiel in /Linke & Busch 2013/.

Im nächsten Schritt ist nun zu testen, ob ein Polynom 3. Grads erforderlich ist. Die Nullhypothese besagt, dass dann sowohl der Koeffizient 4. Grads als auch der Koeffizient 3. Grads zu Null gesetzt werden können, also

$$H_0: b_4 = 0 \text{ und } b_3 = 0 \quad \text{gegen} \quad H_1: b_4 \neq 0 \text{ und } b_3 \neq 0,$$

d. h.

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Signifikanztest ist beendet, wenn die Nullhypothese abgelehnt wird. Anderenfalls ist schrittweise eine weitere Zeile zur Matrix  $H$  hinzuzufügen bis zur Dimension  $(m-1, m)$ . Ist die Größe  $T$  auch bei der letzten Berechnung so klein, dass die Nullhypothese nicht abgelehnt wird, so ergibt sich nur die Konstante  $b_0$  als erforderlicher Polynomgrad.

Wie in Abschnitt 2.2 gezeigt wurde, bieten orthogonale Polynome den Vorteil, dass nach dem Hypothesentest die Ausgleichungsberechnungen für den niedrigeren Polynomgrad nicht neu durchgeführt werden müssen. Der Rechenaufwand ist damit geringer als bei einer mehrfachen Aufdatierung der Parameter. In der Praxis sind oft Hunderttausende oder gar Millionen Zeitreihen von Höhenänderungen der PS-Punkte auszuwerten.

### 3 ANALYSE VON PSI-ZEITREIHEN

Die PSI-Auswertung wird am Institut mit dem Gamma-Modul „Interferometric Point Target Analysis“ (IPTA) der Firma Gamma Remote Sensing Research and Consulting AG (Schweiz) durchgeführt. Als Ergebnis erhält man für jeden PS-Punkt nach entsprechender Umrechnung in die Lotrechte den zeitlichen Höhenänderungsverlauf. Für die Visualisierung und die Zeitreihen-Analyse wird die Software ArcGIS verwendet, für die vom IGMC Erweiterungen entwickelt wurden. Hier ist auch die Ausgleichung orthogonaler Polynome mit der automatischen Bestimmung des erforderlichen Grads für die Polynomanpassung integriert.

Bei der Umsetzung der Rechenschritte in eine Softwarelösung führt eine reine Programmierung der in Abschnitt 2.2 angegebenen Formeln für höhere Polynomgrade nicht zum gewünschten Ergebnis. Das Verfahren der Cholesky-Zerlegung arbeitet zwar numerisch

# GNSS garantiert zukunfts- sicher

# GNSS UNLIMITED

Modulare Aufrüstbarkeit sichert  
Ihre Investition bis über das Jahr  
2020 hinaus ab.

- RTK Software-Update für BeiDou
- Vorrüstbar für Galileo und BeiDou
- Erweiterbar auf mehr als 500 Kanäle

stabil, d. h. Rundungsfehler wirken sich nicht zu stark auf die Berechnung aus. Trotzdem reicht dies nicht für eine genaue Berechnung, da die Aufgabe der Polynomausgleichung bekanntermaßen sehr schlecht konditioniert ist, siehe /Engeln-Müllges et al. 2011/.

Bei PSI-Daten bestehen die Abszissen-Werte aus dem Aufnahmedatum der jeweiligen Szene, das fortlaufend in Tage umgerechnet wird. Bei einer Zeitreihe über viele Jahre ergeben sich dadurch mehrere Tausend Tage, für die je nach Polynomgrad die entsprechenden Potenzen wie z. B.  $x_i^9$  und  $x_i^{10}$  zu berechnen sind. Die Koeffizientenmatrix **A** enthält dann neben numerisch kleinen Werten in den ersten beiden Spalten für die 10. Potenz von beispielsweise 1505 den Wert 59616 297 340 860 002 383 330 087 890 625, der bei der Zahlendarstellung nur mit geringerer Genauigkeit von 59616 297 340 860 003 000 000 000 000 000 gespeichert und weiterverarbeitet wird.

Deshalb wurden zur Lösung der numerischen Probleme bei der Softwareimplementation u. a. folgende Maßnahmen für die Polynomausgleichung getroffen:

- Spaltenskalierung der Koeffizientenmatrix **A**,
- Maximalgrad 10 für die Polynomanpassung,
- keine Matrizeninversion, sondern Verwendung von Dreiecksmatrizen (direkte Auflösung, Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen),
- Verwendung von Orthogonalisierungsverfahren, wie z. B. die QR-Zerlegung, siehe /Schwarz 1997/ und /Kielbasinski & Schwetlick 1988/.

Damit wird erreicht, dass Ausgleichungsproben wie die Differentialprobe und Probe von Ansermet erfüllt werden.

Um die massenhaft vorliegenden PSI-Zeitreihen schneller verarbeiten zu können, wurde zusätzlich zur Windows-Version eine Linux-Variante realisiert, in der die parallele Nutzung aller verfügbaren CPU mittels Python-Skript umgesetzt ist. Dadurch können auf einem Server die geeigneten ausgleichenden Polynome für Zeitreihen von mehreren Hunderttausenden PS-Punkten innerhalb weniger Minuten berechnet werden.

Neben der grafischen Anzeige des Polynoms werden folgende Ergebnisse in eine Datei ausgegeben:

- Unbekannte **u** = Polynomparameter,
- Standardabweichung der Gewichtseinheit  $s_0$ ,
- Höhenänderungsrate in mm/Jahr mit Standardabweichung (für die Regressionsgerade),
- Standardabweichungen der Unbekannten und
- Verbesserungen **v**.

Dadurch ist es gegenüber der bisherigen Auswertung erstmals möglich, die Qualität der Daten zu beurteilen. Die Standardabweichung der Gewichtseinheit  $s_0$  repräsentiert die Standardabweichung einer einzelnen, mit der PSI-Methode ermittelten Höhenänderung. Diese ist u. a. vom jeweiligen Radarsensor abhängig. Die Standardabweichung der Höhenänderungsrate ist ein Maß für die Unsicherheit des Anstiegs der Regressionsgeraden (siehe Beispiele in Abschnitt 3.2).

Für die Ermittlung des optimalen Polynomgrads ist das Signifikanzniveau festzulegen. Hierzu wurden mithilfe von Beispieldaten (siehe Abschnitt 3.3) Berechnungen mit den zwei verschiedenen Irrtumswahrscheinlichkeiten  $\alpha = 0,05$  und  $\alpha = 0,01$  durchgeführt.

Wie Tab. 1 zeigt, verringert sich bei kleinerer Irrtumswahrscheinlichkeit die Anzahl der PSI-Zeitreihen mit höherem Polynomgrad, während sich die Anzahl der PSI-Zeitreihen mit Polynomgrad 0 erhöht. Deshalb wurde für die im Folgenden dargestellten Beispiele das schärfere  $\alpha = 0,01$  gewählt, um realitätsnahe Polynomgrade zu erhalten, die nicht von einer zufälligen Verteilung der Messwerte abhängen. Der Mittelwert der Standardabweichungen der Gewichtseinheit  $s_0$  und die Verteilung bleiben bei den zwei verschiedenen Irrtumswahrscheinlichkeiten erhalten (siehe Abb. 14), da sich für die Masse der Daten nichts ändert.

Weil in der Praxis viele Zeitreihen einem linearen Trend folgen oder die Polynomgrade 2 bzw. 3 aufweisen, reicht es bei PS-Punkten aus, einen Anfangspolynomgrad von 7 oder 8 für den Signifikanztest zu wählen.

| Polynom-grad | Irrtumswahrscheinlichkeit<br>$\alpha = 0,05$ |                    | Irrtumswahrscheinlichkeit<br>$\alpha = 0,01$ |                    |
|--------------|----------------------------------------------|--------------------|----------------------------------------------|--------------------|
|              | Häufigkeit                                   | Häufigkeit<br>in % | Häufigkeit                                   | Häufigkeit<br>in % |
| 0            | 1 139 905                                    | 81,72              | 1 255 931                                    | 90,04              |
| 1            | 165 667                                      | 11,88              | 114 074                                      | 8,18               |
| 2            | 20 252                                       | 1,45               | 6 978                                        | 0,50               |
| 3            | 20 318                                       | 1,46               | 7 366                                        | 0,53               |
| 4            | 13 344                                       | 0,96               | 3 638                                        | 0,26               |
| 5            | 13 325                                       | 0,96               | 3 207                                        | 0,23               |
| 6            | 10 131                                       | 0,73               | 2 161                                        | 0,15               |
| 7            | 11 989                                       | 0,86               | 1 576                                        | 0,11               |
| Summe        | 1 394 931                                    | 100,00             | 1 394 931                                    | 100,00             |

Tab. 1 | Häufigkeiten der ermittelten optimalen Polynomgrade von PS-Punkt-Zeitreihen

### 3.1 Datenmaterial

Für alle nachfolgenden Analysen wurden Daten des deutschen Radarsatelliten TerraSAR-X verwendet, die für das vom BMWi und AiF geförderte Forschungsvorhaben „Flächendeckendes Monitoring bergbaubedingter Höhenänderungen durch kombinierte Nutzung multisensoraler Radardaten und interferometrischer Auswerteverfahren (MultiSAR)“ (FV-Nr. 15880 N) im Rahmen des TerraSAR-X-Forschungsprojekts MTH 0528 vom DLR e. V. zur Verfügung gestellt wurden.

Das Untersuchungsgebiet umfasst den Großraum Leipzig, das südlich davon gelegene Braunkohlerevier mit den beiden sich im aktiven Abbau befindlichen Tagebauen „Profen“ und „Vereinigtes Schleenhain“ der Mitteldeutschen Braunkohlengesellschaft mbH (Mibrag) mit geringen Senkungen der Geländeoberfläche von bis zu einem Zentimeter pro Jahr sowie in direkter Nachbarschaft der aktiven Tagebaue in einem über 400 km<sup>2</sup> großen Gebiet eine Vielzahl stillgelegter Tagebaue und aufgelassener Tagebaurestlöcher, die von der Lausitzer und Mitteldeutschen Bergbauverwaltungs-gesellschaft mbH (LMBV) geotechnisch saniert und renaturiert



Abb. 1 | Polynomgrade von PS-Punkt-Zeitreihen im Großraum Leipzig mit Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,01$

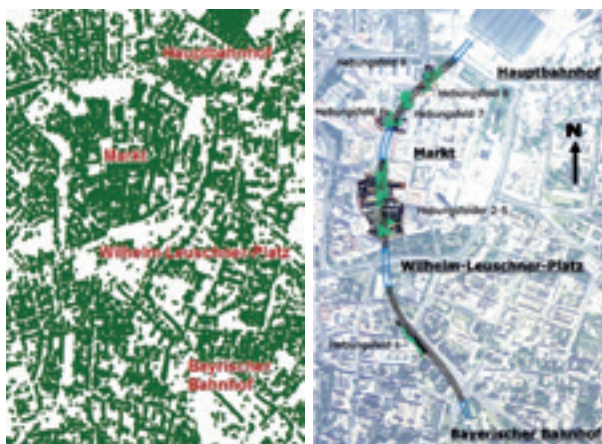


Abb. 2 | Leipziger Innenstadt mit City-Tunnel (links PS-Punkte; Quelle rechts: /Kirsch et al. 2008/)

werden. In diesen Bereichen treten stellenweise geringe Hebungen der Geländeoberfläche auf.

Von dem Radarsensor mit synthetischer Apertur (SAR-Sensor) wurden zwei getrennte Zeitreihen aus unterschiedlichen Aufnahme-positionen aufgenommen. Die insgesamt 50 während des Descending-Überflugs (Flugrichtung des Satelliten nach Süden, Blickrichtung nach Westen) aufgenommenen Szenen decken den Zeitraum Mai 2009 bis Mai 2011 ab. Die 37 Aufnahmen des Ascending-Überflugs (Flugrichtung nach Norden, Blickrichtung nach

Osten) beginnen im Dezember 2009 und enden ebenfalls im Mai 2011. Die TerraSAR-X-Szenen wurden mit einer Wiederholrate von elf Tagen im X-Band aufgezeichnet (Wellenlänge 3,1 cm), die geometrische Bodenauflösung beträgt ca.  $1 \text{ m} \times 2 \text{ m}$  /Schäfer et al. 2012/. Die Auswertung der Descending-Szenen ergab Zeitreihen für rund 3 Millionen PS-Punkte und der Ascending-Szenen für knapp 1,4 Millionen PS-Punkte.

Im Zentrum Leipzigs waren während des Zeitraums der Datenaufzeichnung die Bauarbeiten des City-Tunnels in vollem Gang. So sind in diesem Bereich Höhenänderungen zu erwarten, die im Folgenden als Beispiele für eine räumliche Höhenänderungsanalyse auf Basis der Zeitreihenanalyse mittels orthogonaler Polynome herangezogen werden.

### 3.2 Räumliche Analyse anhand der ermittelten optimalen Polynomgrade

Die Ergebnisse der in Abschnitt 2.1 bis 2.3 beschriebenen Polynom-ausgleichung dienen als Grundlage für eine flächenhafte Bodenbewegungsanalyse mithilfe einer GIS-Software (ArcGIS).

Die ermittelten Polynomgrade der punktbezogenen PSI-Zeitreihen sind in Abb. 1 für den bebauten Großraum Leipzig (Ausschnitt aus den Descending-Szenen) zu sehen. Die meisten der über eine Million dargestellten PS-Punkte sind entsprechend einem Polynomgrad 0 in dunkelgrün eingefärbt. Hier treten somit in dem Betrachtungszeit-

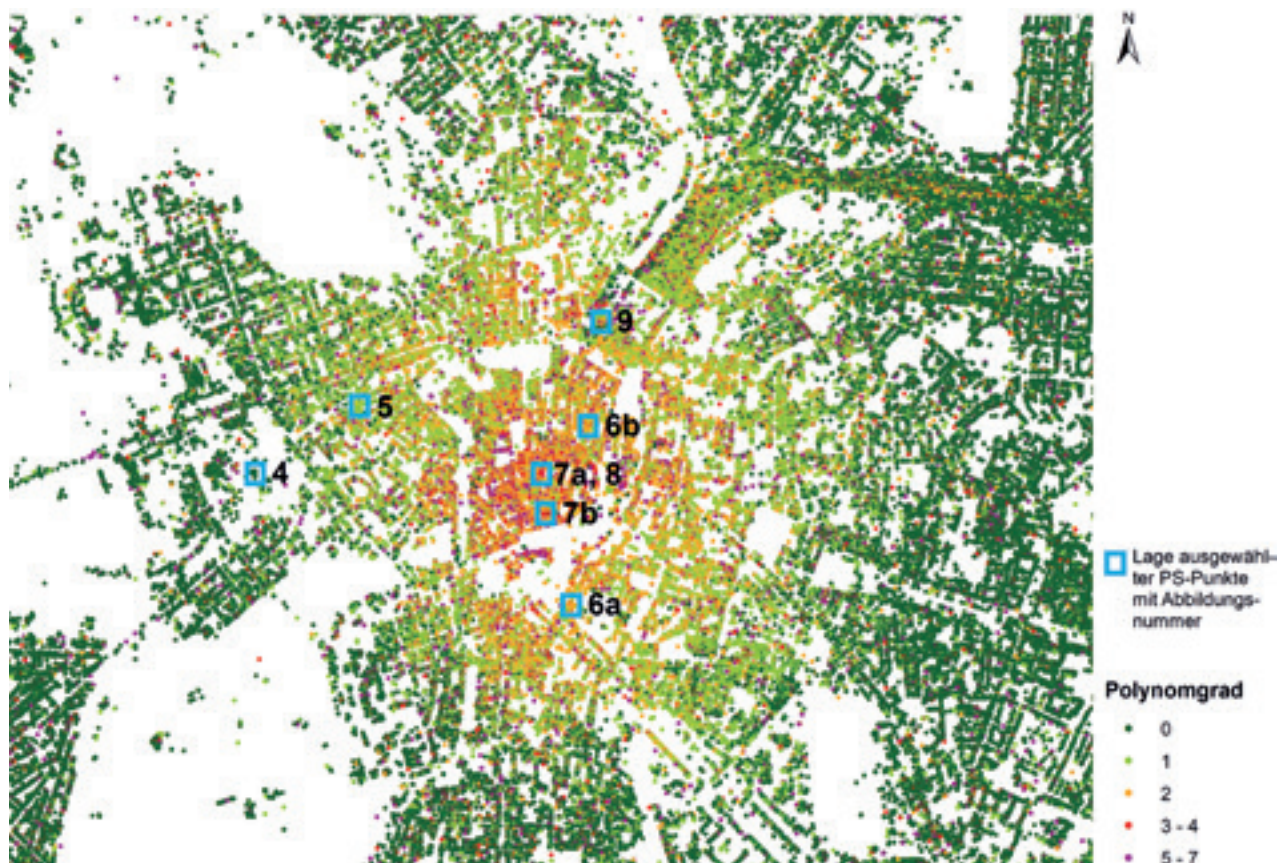


Abb. 3 | Polynomgrade von PS-Punkt-Zeitreihen im Leipziger Zentrum – Detail von Abb. 1

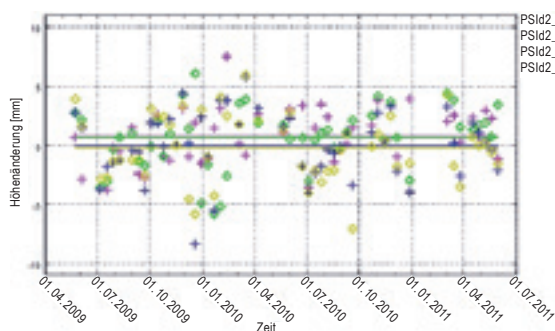


Abb. 4 | Ausgleichende Polynome 0. Grads für ausgewählte PS-Punkte

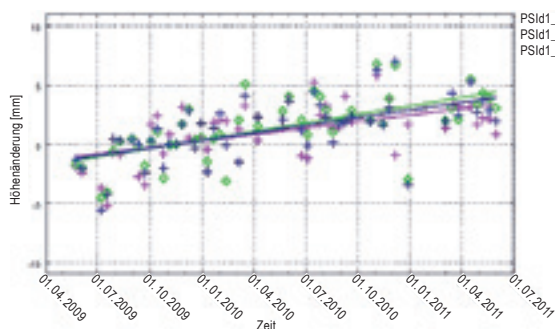


Abb. 5 | Ausgleichende Polynome 1. Grads für ausgewählte PS-Punkte  
(Lage siehe Abb. 3)

raum keine Höhenänderungen auf. Dagegen wurden für im Stadtzentrum Leipzig gelegene PS-Punkte Polynomgrade 2 und höher ermittelt und somit nicht lineare Höhenänderungen. Der dazwischen liegende hellgrüne Übergangsbereich weist lineare Höhenänderungen auf.

In der Detailansicht (Abb. 2 links mit PS-Punkten und Abb. 3) sind die Gebäudestrukturen der Leipziger Innenstadt und speziell der Bereich des Bahnhofs und des City-Tunnels gut erkennbar.

Der City-Tunnel Leipzig unterquert die Innenstadt zwischen dem Hauptbahnhof und dem Bayerischen Bahnhof auf einer Länge von ca. 3,6 km in zwei eingleisigen Röhren, deren Vortrieb durch eine Tunnelbohrmaschine 2007 und 2008 erfolgte /Wikipedia 2014/. Die dabei zu erwartenden Senkungen wurden durch das Compensation-Grouting-Verfahren (CGV) ausgeglichen /Kirsch et al. 2008/. Der Boden wurde durch Einpumpen von Zement-Suspension verdichtet und die 33 zu sichernden Gebäude um bis zu fünf Millimeter kontrolliert angehoben. Darüber hinausgehende Senkungen während des eigentlichen Vortriebs sowie danach wurden durch weitere Hebungsinjektionen ausgeglichen. In Abb. 2 rechts sind die zu einzelnen Hebungsfeldern zusammengefassten Injektionsbereiche dargestellt. Ab 2010 erfolgte der Ausbau des Tunnels und der Stationen bis zum Sommer 2013.

In Abb. 3 sind verschiedene Bereiche mit homogenem Bewegungsverhalten (gleiche Polynomgrade) mit einem blauen Rechteck gekennzeichnet. Aus diesen Bereichen wurden exemplarisch PS-Punkte ausgewählt und ihre Zeitreihen in der entsprechend nummerierten Abbildung dargestellt. Die PS-Punkte in den Bereichen 6–9 liegen in der Nähe des City-Tunnels.

Der Polynomgrad 0 (Abb. 4) weist darauf hin, dass gemäß dem verwendeten Polynommodell keine Höhenänderungen im Betrachtungszeitraum aufgetreten sind. Dies gilt für die meisten PS-Punkte außerhalb des Leipziger Stadtzentrums. Für die vier dargestellten Zeitreihen ergibt sich eine Standardabweichung der Gewichtseinheit  $s_0$  zwischen 2,3 mm und 2,8 mm. Die Standardabweichung für das Absolutglied ist kleiner als 0,4 mm.

Für Zeitreihen von PS-Punkten mit einem Polynomgrad 1 (Abb. 5) ist noch zu klären, ob sie eine signifikante lineare Senkung oder Hebung beschreiben. Diese Aussage kann direkt über das Vorzeichen des Gradienten bzw. den Anstieg der Geraden gemacht werden (Tab. 2).

| PS-Punkt  | Ausgleichende Geraden           | Standardabweichung (gerundet) | Höhenänderungsrate | Standardabweichung der Höhenänderungsrate |
|-----------|---------------------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------------------|
| 1 275 762 | $y = 0,000\,006 + 0,006\,0\,x$  | $s_0 = 1,9\text{ mm}$         | 2,19 mm/Jahr       | 0,45 mm/Jahr                              |
| 1 276 209 | $y = -0,000\,089 + 0,007\,9\,x$ | $s_0 = 2,0\text{ mm}$         | 2,87 mm/Jahr       | 0,47 mm/Jahr                              |
| 1276210   | $y = -0,000\,064 + 0,007\,0\,x$ | $s_0 = 2,0\text{ mm}$         | 2,56 mm/Jahr       | 0,49 mm/Jahr                              |

Tab. 2 | Ergebnisse der Zeitreihen

| PS-Punkt                      | 1 418 103 (Abb. 6a)                          | 1 255 127 (Abb. 6b)                          |
|-------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Ausgleichendes Polynom        | $y = 0,250 + 0,020\,21\,x - 0,000\,029\,x^2$ | $y = 0,237 + 0,022\,99\,x - 0,000\,028\,x^2$ |
| 1. Ableitung                  | $y' = 0,020\,21 - 0,000\,058\,x$             | $y' = 0,022\,99 - 0,000\,055\,x$             |
| Standardabweichung (gerundet) | $s_0 = 2,0\text{ mm}$                        | $s_0 = 1,8\text{ mm}$                        |

Tab. 3 | Ergebnisse der Zeitreihen

Bei einer Hebung ist in  $y = b_0 + b_1\,x$  der Wert  $b_1$  positiv und bei einer Senkung negativ.

Die Ergebnisse an weiteren PS-Punkten zeigen, dass Hebungen mit relativ kleinen Höhenänderungsraten von 2 mm/Jahr bis 4 mm/Jahr aufgetreten sind. Weiter östlich in Richtung des Leipziger Stadtzentrums werden die positiven Höhenänderungsraten etwas größer und betragen etwa 5 mm/Jahr bis 7 mm/Jahr.

Zeitreihen von PS-Punkten mit einem Polynomgrad 2 (Abb. 6a und Abb. 6b) weisen auf einen nichtlinearen Verlauf der Höhenänderungen über die Zeit hin, d.h. es handelt sich um abnehmende Senkungen oder, wie in diesen Beispielen, um abnehmende Hebungen mit 8 mm bis 10 mm.

Wie in den Abbildungen klar zu erkennen ist, wird der nichtlineare Verlauf der Höhenänderungen durch ein Polynom 2. Grads besser beschrieben als durch eine Gerade mit der von der Gamma-Software ermittelten Höhenänderungsrate. Bei einer linearen Regression wäre die Standardabweichung der Gewichtseinheit bei den PS-Punkten um mindestens 0,3 mm größer. Zudem würde eine Regressionsgerade fälschlicherweise eine fortlaufende Hebung beschreiben. Dagegen erhält man für den PS-Punkt 1 418 103 das Maximum der Funktion mit 3,7 mm aus der 1. Ableitung  $y' = b_1 + 2\,b_2\,x$  des ermittelten Polynoms (Tab. 3) am 522. Tag, d.h. am 28. Oktober 2010, und für den PS-Punkt 1 255 127 mit 5,0 mm am 590. Tag, d.h. am 4. Januar 2011. Der positive Trend bis zum Maximum ergibt eine Hebung von 8,0 mm

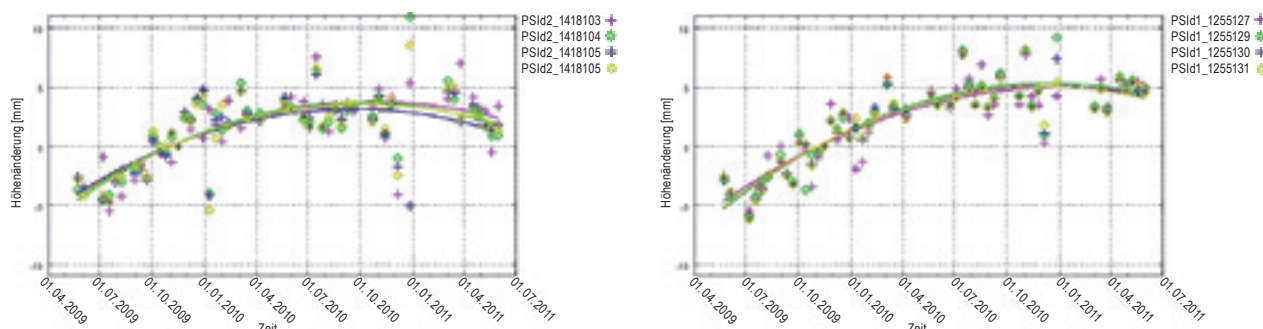


Abb. 6a und b | Ausgleichende Polynome 2. Grads für ausgewählte PS-Punkte (Lage siehe Abb. 3)

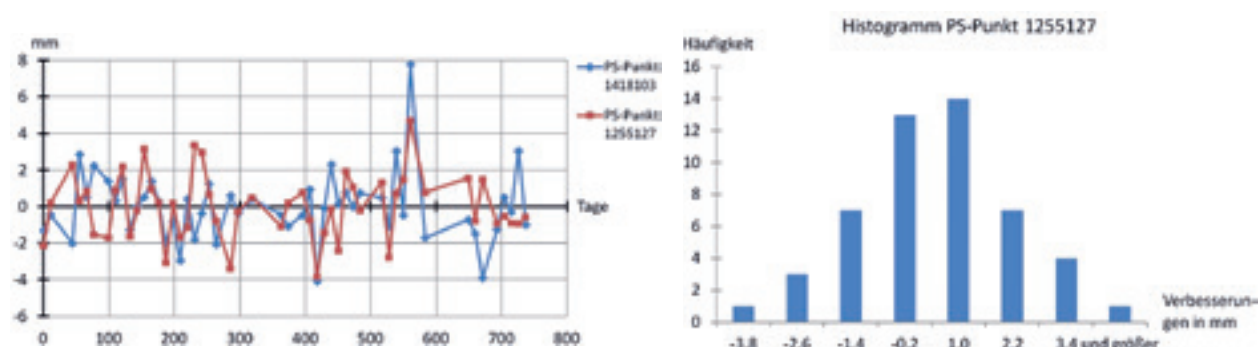


Abb. 6c | Verbesserungen für die PS-Punkte 1418103 und 1255127

bzw. 9,7 mm. Danach folgt eine Senkung von –1,3 mm bzw. –0,6 mm. Damit beträgt die Hebung in zwei Jahren insgesamt 6,6 mm für den PS-Punkt 1418103 und 9,1 mm für den PS-Punkt 1255127.

Wie Abb. 6c zeigt, streuen die Verbesserungen zufällig um ihren Mittelwert 0, sie sind normalverteilt. Allerdings weisen die großen und im Vorzeichen identischen Residuen am 561. Tag (6. Dezember 2010) auf einen „Ausreißer“ hin. Dieses Beispiel zeigt somit auch die zu nutzenden Vorteile der hier beschriebenen Vorgehensweise bei der Datenanalyse auf.

Zeitreihen mit einem Polynomgrad 3 (Abb. 7a und Abb. 7b) und höher (Abb. 8) charakterisieren einen mehrfachen Wechsel von Senkungen und Hebungen innerhalb des Aufnahmezeitraums. Ein genereller Trend über die gesamte Zeitreihe ist durch Vergleich der Funktionswerte des ausgleichenden Polynoms  $y_A$  am Anfang und  $y_E$  am Ende ermittelbar. Ist die Differenz  $y_E - y_A$  negativ, so handelt es sich um eine Senkung, bei positivem Wert um eine Hebung.

Im Vergleich zu den Zeitreihen mit Polynomgrad 2 (Abb. 6a und Abb. 6b) weisen die Kurven der Polynome in den Abb. 7 bis November 2010 den gleichen Trend auf mit Hebungen von insgesamt bis zu 12 mm in zwei Jahren. Die Standardabweichung der Gewichtseinheit liegt bei den vier PS-Punkten zwischen 1,4 mm und 2,0 mm. Bei einer Regressionsgeraden wäre die Standardabweichung der Gewichtseinheit um 0,5 mm bis 0,7 mm größer, beim Beispiel in Tab. 4 um 0,6 mm.

Die Polynome 3. und 4. Grads der Abb. 7 und Abb. 8 für die räumlich in der Nähe liegenden PS-Punkte haben trotz unterschiedlichem Polynomgrad einen ähnlichen Kurvenverlauf mit mehr oder

|                               |                                                                         |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Ausgleichendes Polynom        | $y = 0,150 + 0,0345 x - 0,000013 x^2 - 0,0000003 x^3 + 0,000000005 x^4$ |
| 1. Ableitung                  | $y' = 0,0345 - 0,000027 x - 0,0000010 x^2 + 0,000000021 x^3$            |
| 2. Ableitung                  | $y'' = -0,000027 - 0,0000021 x + 0,000000062 x^2$                       |
| Standardabweichung (gerundet) | $s_0 = 1,6 \text{ mm}$                                                  |

Tab. 4 | Ergebnisse der Zeitreihe für den PS-Punkt 1307490

weniger ausgeprägtem Minimum, was auf eine gleiche Ursache schließen lässt. So liegen auch die lokalen Maxima der Hebungen im Sommer 2010 zeitlich nahe beieinander.

Da das Polynom 4. Grads stetig differenzierbar und die erste Ableitung leicht berechenbar ist, können Minimum und Maximum aus der kubischen Gleichung  $b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + 4b_4 x^3 = 0$  durch das Verfahren von Newton bestimmt werden [Schwarz 1997]. Die Wendepunkte ergeben sich durch Nullsetzen der 2. Ableitung  $2b_2 + 6b_3 x + 12b_4 x^2$  als Lösungen der quadratischen Gleichung mit reellen Koeffizienten zu

$$x_{1,2} = \frac{-6 b_3 \pm \sqrt{(6 b_3)^2 - 96 b_4 b_2}}{24 b_4} \tag{12}$$

Zum Beispiel erhält man für den PS-Punkt in Tab. 4 den 163. und 519. Tag, d. h. den 3. November 2009 und den 25. Oktober 2010. Diese Wendepunkte sowie die Anfangs- und Endzeitpunkte können als jeweils erster Näherungswert für das Newton-Verfahren verwendet werden. Damit ergeben sich ein Minimum am 615. Tag, also am 29. Januar 2011, sowie ein Maximum am 401. Tag, d. h. am 29. Juni 2010. Für den PS-Punkt 1307040 (Polynom 3. Grads)

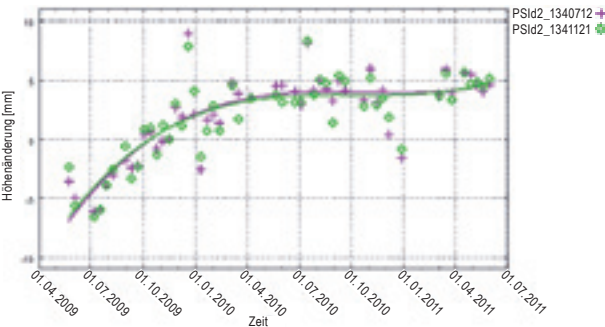
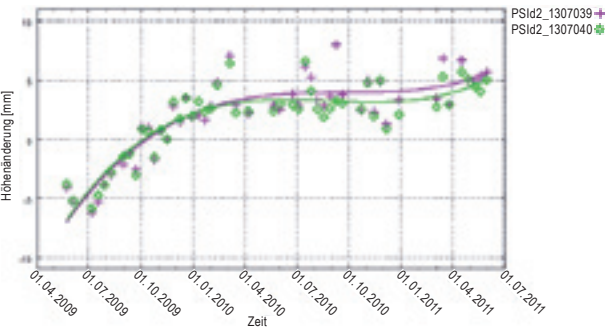


Abb. 7a und b | Ausgleichende Polynome 3. Grads für ausgewählte PS-Punkte (Lage siehe Abb. 3)

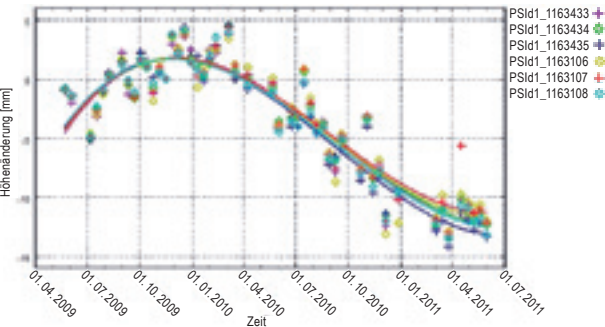
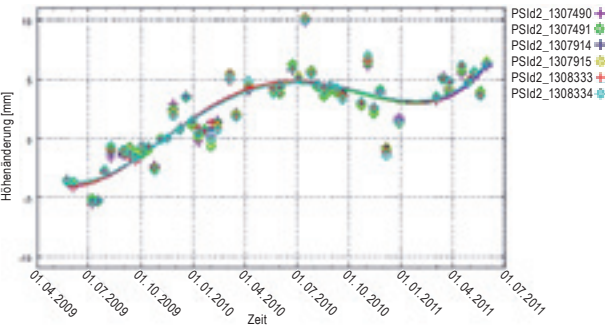


Abb. 8 | Ausgleichende Polynome 4. Grads für ausgewählte PS-Punkte (Lage siehe Abb. 3)

Abb. 9 | Ausgleichende Polynome 3. Grads für ausgewählte PS-Punkte (Lage siehe Abb. 3)

liegt es am 13. Juni 2010, also nur 16 Tage früher. Der Kurvenverlauf für den PS-Punkt 1307490 setzt sich zusammen aus 8,7 mm Hebung, 1,7 mm Senkung und 3,1 mm Hebung. Damit entspricht die gesamte Höhenänderung in zwei Jahren einer Hebung von etwa 10 mm.

Die vergleichbaren Höhenänderungen im Stadtzentrum können ein Hinweis auf die gleiche Ursache sein. Vor und während Tunnel- und Stationsbau waren umfangreiche Wasserhaltungsmaßnahmen zur Abdichtung der Baugruben notwendig wie z. B. ein aufwendiges Rohrleitungssystem durch die Innenstadt mit Pumpstationen und Flutungseinrichtungen /Miertschink & Ebner 2010/. Der Tunnel liegt im Grundwasser mit einer Druckhöhe von rund 16 m bis zur Sohle des Tunnels. Die Tunnelstationen liegen 17 m bis 22 m unter dem Gelände und wurden teilweise unter Grundwasser in offener Bauweise erstellt, z. B. nach dem Einbau von Unterwasserbeton. Dabei wurde das Restwasser der unteren Bodenschicht abgepumpt, ohne das Grundwasser selbst abzusenken. Das Tunnelbauwerk stellt ein Strömungshindernis für das in mehreren Schichten übereinander fließende Grundwasser dar und würde einen Aufstau des Grundwassers von 0,15 m bis 0,60 m zur Folge haben. Es sind deshalb Ausgleichsmaßnahmen zur Grundwasserkommunikation erforderlich und umgesetzt, wie z. B. die Unterquerung von Bauwerken mittels Rohrleitungen ohne Pumpen /Ertt 2012/.

Die Komplexität und die kleinräumige Verschiedenartigkeit des Bodenbewegungsgeschehens zeigen sich eindrucksvoll im Vergleich der vorhergehenden Beispiele zu den Zeitreihen von PS-Punkten in der Nachbarschaft des Hauptbahnhofs (Abb. 9), die lokal anfängliche Hebungen mit anschließender größerer Senkung aufweisen. Das kleine Gebiet am Bahnhof konnte anhand einer Abfrage in ArcGIS unabhängig vom Polynomgrad detektiert werden.

Das historische Bahnhofsgebäude des Leipziger Hauptbahnhofs wurde zur Errichtung des neuen unterirdischen Haltepunkts im Schutz einer sehr großen Baugrundvereisungsmaßnahme unterfahren. Dazu wurde dem Boden kontinuierlich Wärme entzogen, sodass das Grundwasser gefror. Die Herstellung der beiden ca. 86 m langen, ca. 25 m bis 34 m hohen und mindestens 4 m dicken Vereisungswände mit Temperaturen von unter  $-20^{\circ}\text{C}$  erfolgte auf beiden Seiten des geplanten Tunnels von November 2007 bis April 2008 /Bruns & Kuhn 2010/. Aufgrund der für die Baumaßnahmen lang andauernden Vereisung dehnte sich der Boden mit dem gefrorenen Grundwasser unter der Westhälfte des Hauptbahnhofs aus. Dort hat sich laut Karl-Heinz Aukschun vom Projektsteuerer DEGES (Deutsche Einheit Fernstraßenplanungs- und -bau GmbH) der Hauptbahnhof um zwei, drei, vier Zentimeter gehoben /Tappert 2009/. Nach der Fertigstellung des Stationsbauwerks unterhalb des Bahnhofsgebäudes wurde die Vereisung im November 2009 abgestellt, wobei die Auftauphase bis zum Sommer 2010 noch nicht abgeschlossen war. Die erwartete Senkung kann durch die Zeitreihen der PS-Punkte sowohl räumlich als auch in ihrem zeitlichen Verlauf der Höhenänderungen nachgewiesen werden.

# GNSS präzise bei Daten- ausfall

# GNSS UNLIMITED

SmartLink Korrekturen erlauben die Überbrückung von Unterbrechungen des RTK-Signals.

- bis zu 10 Minuten
- +/- 5 cm rms
- Empfang über Satellitenantenne



Abb. 10 | Standardabweichungen der Höhenänderungen im Großraum Leipzig (zu Abb. 1)

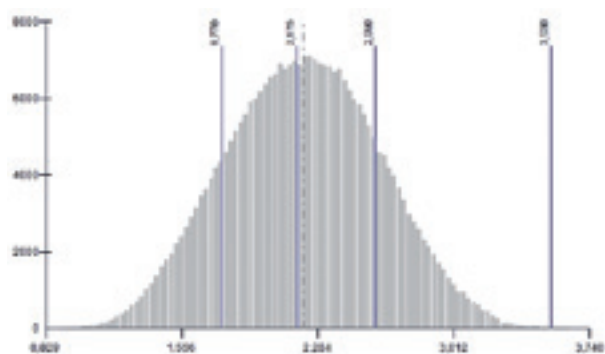


Abb. 11 | Repräsentative Verteilung der Standardabweichungen zu Abb. 10

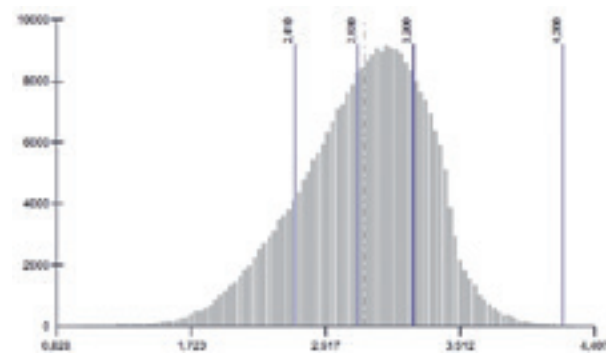


Abb. 14 | Repräsentative Verteilung der Standardabweichungen zu Abb. 13

### 3.3 Räumliche Analyse anhand von Standardabweichungen

Bei den im Abschnitt 3.2 untersuchten Zeitreihen im städtischen Gebiet liegt die Standardabweichung der Gewichtseinheit  $s_0$  im Bereich von 0,83 mm bis 3,53 mm (Abb. 10 und Abb. 11).

Das Beispiel zeigt in der Fläche eine relativ homogene Verteilung der Standardabweichungen unabhängig vom Polynomgrad, die sich als gleiche Unsicherheit der PSI-Daten interpretieren lässt. Das Histogramm wurde aus 290 000 PS-Punkten erzeugt, der Mittelwert der Standardabweichungen der Gewichtseinheit  $s_0$  liegt bei 2,2 mm und die Verteilung ist symmetrisch.

Demgegenüber hat das Beispiel aus dem ländlichen Gebiet (südlicher Teil der Ascending-Szenen; Abb. 13 und Abb. 14) eine inhomogenere Verteilung der Standardabweichungen. In Abb. 12 sind die Randbereiche von Tagebauen durch die hellgrüne Einfärbung der PS-Punkte für Polynomgrad 1 (lineare Höhenänderungen) zu erkennen. Diese Bereiche weisen auch die größten Standardabweichungen der Gewichtseinheit  $s_0$  auf.

Das Beispiel zeigt eine insgesamt schlechtere Genauigkeit als das vorige im städtischen Gebiet. Das Histogramm wurde wieder aus 290 000 PS-Punkten erzeugt, der Mittelwert der Standardabweichungen der Gewichtseinheit  $s_0$  liegt hier bei 2,9 mm gegenüber 2,2 mm. Die Verteilung ist nicht mehr symmetrisch. Neben Berei-

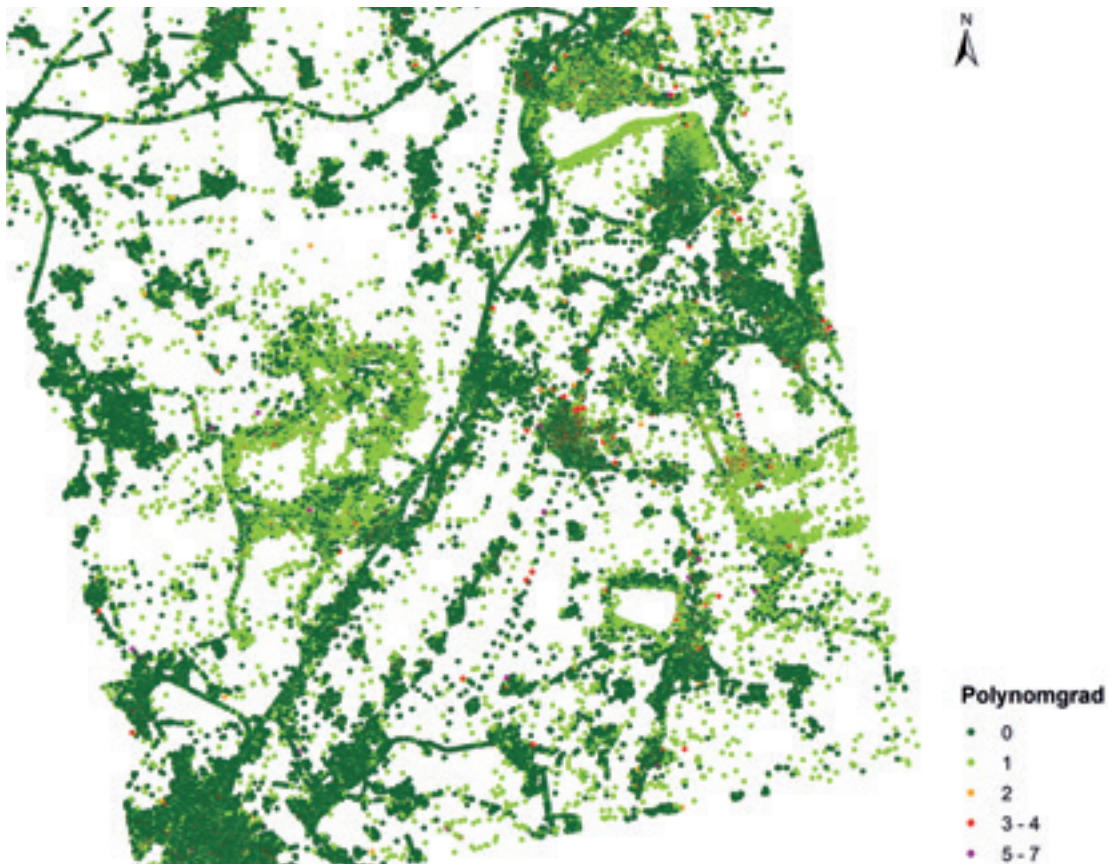


Abb. 12 | Polynomgrade von PS-Punkt-Zeitreihen im ländlichen Gebiet südlich von Leipzig mit Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 0,01$



Abb. 13 | Standardabweichungen der Höhenänderungen im ländlichen Gebiet (zu Abb. 12)

chen mit kleinen Standardabweichungen, wie in der Stadt Zeitz (in Abb. 13 links unten), gibt es ländliche Bereiche mit größerer Unsicherheit mit  $s_0$  bis zu 4,2 mm, d.h. die Senkungsangaben besitzen unterschiedliche Qualität. Auf eine Ursachenerörterung, z. B. in den Randgebieten der Tagebaue, soll hier verzichtet werden.

## 4 FAZIT

Durch Polynomfunktionen sind nicht nur Lücken (z. B. durch Szenenausfall) im zeitlichen Verlauf beschreibbar, sondern vor allem weitere interpretatorische Analysen möglich. Das entwickelte Softwaretool erleichtert dabei die Auswertung von PSI-Zeitreihen wesentlich, da der Anwender nicht mehr selbst nach dem passenden Polynomgrad suchen oder ihn „eigenmächtig“ festlegen muss, sondern dieser automatisch bestimmt wird. Der Wert einer solchen massenweise durchgeführten Polynomausgleichung besteht darin, dass Hebungen und Senkungen in bestimmten Zeitabschnitten statistisch begründbar berechnet werden können und anhand der Standardabweichungen belastbare Aussagen über die innere Genauigkeit der ermittelten Höhenänderungen und der Modellparameter abgeleitet werden.

Die Ergebnisse können in Geoinformationssystemen weiterverarbeitet werden, um im Messgebiet Informationen flächenhaft zu visualisieren und zu analysieren, beispielsweise durch Detektion von Bereichen mit einer bestimmten Höhenänderungsrate, Standardabweichung oder gleichem Polynomgrad. Hieraus ergibt sich durch Kopplung mit weiteren Fachdaten und Fachwissen ein deutlicher Informationsgewinn.

Mittels Klassifizierung und farblicher Darstellung der Polynomgrade können (statistisch gesichert) kritische Bereiche sofort von Gebieten ohne Höhenänderungen unterschieden sowie Aussagen über fortlaufende Senkungen/Hebungen und auslaufende Senkungen/Hebungen getroffen werden. Anhand der Standardabweichungen können Gebiete mit hoher Genauigkeit (z. B. im städtischen Bereich) bzw. Gebiete mit größerer Unsicherheit identifiziert und weitergehend interpretiert werden.

Die Leistungsfähigkeit von Radardaten (hier TerraSAR-X) wurde mittels massenhaft vorliegender PSI-Zeitreihen in zwei Beispielen mit unterschiedlichen Ursachen für Höhenänderungen sowie unterschiedlicher PS-Punktdichte verdeutlicht. Insbesondere ihre Verwendung zur Dokumentation und Analyse von zeitlich und räumlich verschiedenen Höhenänderungen bei der Errichtung großer unterirdischer innerstädtischer Ingenieurbauwerke bietet auch bei geringen Höhenänderungen noch ein großes Potenzial.

## LITERATUR

**Bruns, B.; Kuhn, Ch. (2010):** Monitoring der Bodentemperaturen zur Überwachung der Vereisungsmaßnahmen beim Bau des City-Tunnels in Leipzig. In: Schriftenr. des DVW, Band 62 (Interdisziplinäre Messaufgaben im Bauwesen – Weimar 2010, Beiträge zum 98. DVW-Seminar am 21. und 22. September 2010 in Weimar). Wißner, Augsburg, 225–242.

**Busch, W.; Schäfer, M. (2013):** Integration von satellitengestützter Radarinterferometrie und Nivellement zum Monitoring von Höhenänderungen an

Corner-Reflektor-Standorten. In: Sörgel, U.; Schack, L. (Hrsg.): Tagungsband GeoMonitoring 2013, 14. und 15. März 2013, Hannover, 25–37.

**Engeln-Müllges, G.; Niederrenk, K.; Wodicka, R. (2011):** Numerik-Algorithmen. 10. Aufl., Springer, Berlin.

**Eritt, F. (2012):** City-Tunnel Leipzig – Untergrund. [www.citytunnelleipzig.info/untergrund.php](http://www.citytunnelleipzig.info/untergrund.php) (6.2.2014).

**Ferretti, A.; Prati, C.; Rocca, F. (2001):** Permanent Scatterers in SAR Interferometry. In: IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, 39(2001)1, 8–20.

**Kielbasinski, A.; Schwetlick, H. (1988):** Numerische lineare Algebra. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

**Kirsch, F.; Trunk, U.; Richter, T. (2008):** Das Verfahren des Compensation Grouting beim Bauvorhaben City-Tunnel Leipzig – Hebungsinjektion oder Baugrundverbesserung? 30. Baugrundtagung 2008, Dortmund. [www.gudconsult.de/uploads/media/00162\\_d.pdf](http://www.gudconsult.de/uploads/media/00162_d.pdf).

**Koch, K.-R. (1987):** Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 2. Aufl., Dümmler, Bonn.

**Linke, J.; Busch, W. (2013):** Ausgleichung Orthogonaler Polynome zur Analyse von PSI-Zeitreihen. In: Sroka, A. (Hrsg.): 14. Geokinematischer Tag, 16. und 17. Mai 2013. Schriftenr. des Instituts für Markscheidewesen und Geodäsie an der TU Bergakademie Freiberg, 2013-1. Wagner Digitaldruck und Medien GmbH, Nossen, 97–109.

**Miertschink, R.; Ebner, S. (2010):** Wasserhaltung zur Havarievorsorge beim Bau des City-Tunnels Leipzig. In: BauPortal, 122(2010)12, 700–705.

**Schäfer, M.; Hannemann, W.; Busch, W. (2012):** Flächenhaftes Monitoring durch kombinierte Nutzung multisensoraler Radardaten. In: Niemeier, W.; Riedel, B.; Lehmann, M. (Hrsg.): Tagungsband GeoMonitoring 2012, 8. und 9. März 2012, Braunschweig, 145–161.

**Schwarz, H. R. (1997):** Numerische Mathematik. 4. Aufl., Teubner, Stuttgart.

**Tappert, A. (2009):** Auch in Leipzig Risse durch City-Tunnelbau. LVZ-Online. <http://leipzigcity.blog.de/2009/03/06/leipzig-risse-city-tunnelbau-5704579> (6.2.2014).

**Wikipedia (2014):** City-Tunnel Leipzig. [http://de.wikipedia.org/wiki/City-Tunnel\\_Leipzig](http://de.wikipedia.org/wiki/City-Tunnel_Leipzig) (13.1.2014).

**Wolf, H. (1997):** Ausgleichungsrechnung I und II. 3. Aufl., Dümmler, Bonn.

**Zurmühl, R.; Falk, S. (1997):** Matrizen und ihre Anwendungen 1. 7. Aufl., Springer, Berlin.

### Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Busch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL  
INSTITUT FÜR GEOTECHNIK UND  
MARKSCHEIDEWESSEN

Erzstraße 18 | 38678 Clausthal-Zellerfeld  
[wolfgang.busch@tu-clausthal.de](mailto:wolfgang.busch@tu-clausthal.de)



### Dr.-Ing. Janette Linke

TECHNISCHE UNIVERSITÄT CLAUSTHAL  
INSTITUT FÜR GEOTECHNIK UND  
MARKSCHEIDEWESSEN

Erzstraße 18 | 38678 Clausthal-Zellerfeld  
[janette.linke@tu-clausthal.de](mailto:janette.linke@tu-clausthal.de)



Manuskript eingereicht: 20.02.2014 | Im Peer-Review-Verfahren begutachtet