

Ein automatisches Verfahren für geodätische Berechnungen

An Automatic Method for Geodetic Computations

Rüdiger Lehmann

Das in diesem Beitrag beschriebene automatische Verfahren findet bei klassischen geodätischen Berechnungsaufgaben ausgehend von gegebenen Startgrößen (z. B. Festpunktkoordinaten, Messwerte) Berechnungsmöglichkeiten für alle anderen relevanten Größen. Bei redundanten Startgrößen existiert meist eine Vielzahl unterschiedlicher Berechnungsmöglichkeiten, die alle gefunden und deren Ergebnisse berechnet werden. Wenn die Berechnung mehrdeutig ist, aber nur endlich viele Lösungen existieren, werden alle Lösungen gefunden und berechnet. Durch den Vergleich unterschiedlicher Berechnungsergebnisse besteht die Möglichkeit, grobe Fehler in den Startgrößen aufzudecken und ein robustes Endergebnis zu generieren. Das Verfahren arbeitet nicht stochastisch, setzt also kein stochastisches Modell der Messwerte voraus. Die Beschreibung wird mit Beispielen illustriert. Das Verfahren wurde als Webserver-Script realisiert und ist frei im Internet verfügbar.

Schlüsselwörter: Klassische geodätische Berechnungen, grober Fehler

This contribution describes an automatic method, which can be applied to classical geodetic computation problems. Starting from given input quantities (e. g. coordinates of known points, measurements) computation opportunities for all other relevant quantities are found. For redundant input quantities a multitude of different computation opportunities exists, which are all found automatically, and their results are computed. If the computation is non-unique, but only a finite number of solutions exist, then all solutions are found and computed. By comparison of the different computation results there is the opportunity to detect gross errors in the input quantities and to produce a robust final result. The method does not work stochastically, so no stochastic model of the observations is required. The description of the algorithm is illustrated with the help of examples. The method was implemented as a webserver script and is available for free in the internet.

Keywords: Conventional geodetic computations, gross error

1 EINFÜHRUNG

Bei einfachen geodätischen Berechnungsaufgaben haben sich Standardverfahren etabliert und praktisch bewährt. Jedoch kann es Situationen geben, in denen nicht sofort klar ist, ob sich z. B. eine Zielgröße überhaupt aus den Messwerten und sonstigen gegebenen Größen ergibt, und wenn ja, wie. Hierzu müssten die funktionalen Beziehungen zwischen diesen Größen untersucht werden – ein Arbeitsschritt, den nicht wenige Geodäten gern automatisiert hätten. Zum Beispiel könnten beim Polygonzug ein oder mehrere Messwerte nicht oder grob falsch gemessen worden sein und es ist nicht sofort klar, ob jetzt noch eine Auswertung, vielleicht sogar eine

kontrollierte Auswertung, möglich ist. Oder bei großen geodätischen Netzen von nicht alltäglicher Topologie sind Näherungsparameter für die Ausgleichung zu berechnen. Ein Computeralgebrasystem (Maple, Mathematica usw.) ist an dieser Stelle nicht hilfreich (zur Computeralgebra vgl. z. B. /Kaplan 2005/).

In der Geodäsie existieren seit Langem Verfahren zur Analyse der Messwerte in geodätischen Netzen hinsichtlich Netztopologie und Grobfehlererkennung mit automatischer Erzeugung von Näherungskordinaten. Hervorzuheben ist das Verfahren der sukzessiven Einzelpunkteinschaltung (Polarpunkt- und Schnittberechnungen

etc.) von /Benning & Ahrens 1979/; siehe auch /Benning 1978/ und /Benning & Förstner 1979/. Von /Vetter 1992, 2007/ wurde dieses Konzept aufgegriffen und weiterentwickelt: Zur Optimierung der Rechenzeit und zur Steigerung der Flexibilität wird mit Matrizen aus der Graphentheorie gearbeitet. Die Berechnung wurde im Programm Aura realisiert und läuft iterativ in drei Schritten ab /Vetter 2007/:

1. Analyse der Netzstruktur und Auswahl der Berechnungsreihenfolge sowie des geeigneten Berechnungsverfahrens.
2. Berechnung eines Neupunkts.
3. Kontrolle und Überprüfung der Berechnung.

Diesen beiden und noch einigen weiteren Konzepten ist gemeinsam, dass sie

- auf geodätische Netze (Festpunkte, Neupunkte, Tachymetermesswerte, GNSS-Basislinien) fokussieren und
- die automatische Erzeugung von Näherungskordinaten und die Grobfehlererkennung in einem Algorithmus vereinigen.

Viele bekannte Ausgleichungsprogramme berechnen Näherungswerte automatisch, jedoch nicht immer in allen Fällen. Einige berechnen Näherungswerte nur, wenn alle Neupunkte als Polarpunkte von Festpunkten oder anderen bereits berechneten Neupunkten aus berechenbar sind. Allerdings ist das der Normalfall.

Das Standardverfahren der Auswertung von redundanten (überschüssigen) Messungen in der Geodäsie ist die Ausgleichungsrechnung. Üblich ist die Ausgleichung redundanter Messungen im Sinne der kleinsten Quadrate oder, wenn grobe Fehler in den Messwerten (Beobachtungen) oder anderen gegebenen Größen zu vermuten sind, eine robuste Variante davon, z. B. eine M-Schätzung (z. B. /Jäger et al. 2005/, /Niemeier 2008/). Wir benutzen hier den Begriff „grober Fehler“ statt „grobe Messabweichung“, weil auch Fehler, die nicht im eigentlichen Sinn durch Messung entstehen, hierunter verstanden werden sollen, z. B. die Verwendung falscher festzuhaltender Anschlusspunktkordinaten. Die genannten Verfahren haben sich tausendfach bewährt und sind auch in vielen nicht-geodätischen Anwendungsgebieten im Einsatz.

Allerdings wird die Ausgleichung in der Geodäsie nicht immer angewendet, z. B. oft dann nicht, wenn die Redundanz (Anzahl überschüssiger Messwerte) sehr gering ist. Die Steigerung der Qualität der ohnehin meist vorher zu berechnenden Näherungsparameter durch Ausgleichung ist dann ebenso gering oder wird gar nicht erreicht. Man bedenke, dass das Ausgleichungsmodell auf einigen Annahmen beruht. Insbesondere Annahmen zur Gewichtung der Messwerte oder zu deren Korrelationen oder zu groben Fehlern sind immer mehr oder weniger zweifelhaft. Nur wenn das Ausgleichungsmodell der Wirklichkeit gut entspricht, werden bekanntlich optimale Ergebnisse erhalten.

Alternativ zur Ausgleichung ist die Berechnung der nicht messbaren gesuchten Größen (Parameter) durch Weglassen redundanter Messwerte üblich. Um einen Schutz vor groben Fehlern zu gewährleisten, wird das nicht nur auf eine Art getan, sondern mindestens auf zwei verschiedene. Stimmen die Ergebnisse überein, können daraus eventuell Mittelwerte gebildet und diese als endgültige Parameter übernommen werden. Ein Beispiel ist der klassische beidseitig angeschlossene Polygonzug. Hier erfolgt die Berechnung nicht

als geodätisches Netz, obwohl das möglich wäre, sondern durch Weglassen redundanter Messwerte und einfache Vorwärtsberechnung sowie schließlich durch Bewerten und ggf. einfaches Verteilen der Widersprüche. Ein anderes Beispiel sind indirekte Messungen mit zwei Hilfsdreiecken, bei denen einfach die Ergebnisse beider Hilfsdreiecke verglichen und gemittelt werden /Witte & Schmidt 2006/. Diese nicht-stochastischen Verfahren kommen ohne ein stochastisches Modell aus.

Wenn man allerdings nur zwei Berechnungsergebnisse vergleicht, wäre es wichtig, solche zu wählen, die möglichst unabhängig voneinander sind. So kann ein grober Fehler kaum beide Ergebnisse gleichermaßen verfälschen und tritt somit oft als beträchtliche Differenz dieser Ergebnisse in Erscheinung. Darüber hinaus kann es sinnvoll sein, mehr als zwei Berechnungsergebnisse zu vergleichen.

Der vorliegende Beitrag beschreibt ein automatisches Verfahren, welches versucht, ausgehend von gegebenen geodätischen Größen (nachfolgend „Startgrößen“ genannt, z. B. Anschlusspunktkordinaten, Messwerte) durch kombinatorische Suche nach passenden Rechenregeln alle neuen Größen zu berechnen, die daraus berechenbar sind. Mit dem algorithmischen Konzept wird nicht nur ein Rechenweg gefunden, sondern alle möglichen Berechnungsvarianten werden aufgespürt, sodass man auch die beiden Berechnungsergebnisse mit der geringsten Abhängigkeit im o. g. Sinne auswählen und deren Mittel bilden kann. Durch den Vergleich der Ergebnisse aller Berechnungsvarianten werden grobe Fehler noch sicherer erkannt. Der Median¹ dieser Ergebnisse eignet sich sogar als eine robuste endgültige Lösung. Diese kann auch als automatisch erzeugte Näherungslösung für eine nachgeschaltete Ausgleichung nach kleinsten Quadraten verwendet werden. Wie bei den oben genannten Verfahren ist also auch hier die automatische Erzeugung von Näherungsparametern (diesmal nicht zwangsläufig Koordinaten) und die Grobfehlererkennung in einem Algorithmus vereinigt.

Das Verfahren wurde als Webserver-Script realisiert und ist frei im Internet verfügbar. Interessierte Leser können das Programm testen (siehe Abschnitt 7).

2 GRUNDIDEE DES VERFAHRENS

2.1 Größen und Rechenregeln

Ausgangspunkt des Verfahrens ist ein funktionales Modell, welches die tatsächliche Messungssituation ausreichend gut beschreibt und eine definierte Menge von geometrischen und physikalischen Größen enthält, z. B.

- Punktkordinaten in ein, zwei oder drei Dimensionen,
- Höhendifferenzen, Distanzen, Richtungen, Winkel,
- Flächeninhalte, Volumina,
- Transformationsparameter, Bogenradien,
- instrumentelle Konstanten, Umgebungsparameter usw.

Einige dieser Größen sind gegeben oder gemessen, nachfolgend „Startgrößen“ genannt; andere sind gesucht, nachfolgend „Zielgrößen“

¹ Der Median ist in einer sortierten Liste von Zahlenwerten derjenige Wert, welcher an der mittleren Stelle steht oder bei einer geraden Anzahl von Listeneinträgen das Mittel aus den beiden mittleren Werten.

genannt. Noch andere sind reine sogenannte „Hilfsgrößen“. Zunächst wird eine vollständige Liste solcher Größen zusammengestellt.

Zwischen diesen Größen bestehen verschiedene funktionale Abhängigkeiten, z.B. zwischen den Lagekoordinaten X_P , Y_P , X_Q , Y_Q zweier Punkte und ihrer Horizontalabstand e_{PQ} :

$$e_{PQ} = \sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2}. \quad (1)$$

Diese können nun genutzt werden, um aus den Startgrößen die Zielgrößen zu berechnen, evtl. über den Umweg einiger Hilfsgrößen. Ein Katalog sämtlicher elementarer Rechenregeln zwischen den relevanten Größen ist implementiert. Diese beschreiben, wie aus gegebenen oder bereits berechneten Größen neue erzeugt werden können, jedoch nur entweder auf eindeutige oder zweideutige Weise. Der zweideutige Fall tritt z.B. bei einigen geodätischen Schnitten auf.

Nun werden sämtliche Möglichkeiten aufgespürt, die Rechenregeln auf die Größen der Liste anzuwenden. Dabei ist es gleichgültig, ob eine Größe Start-, Hilfs- oder Zielgröße ist. So entsteht eine vollständige Liste möglicherweise anwendbarer Rechenregeln. Wenn die Größenliste z.B. die Größen X_P , Y_P , X_Q , Y_Q , e_{PQ} enthält, wird Rechenregel (1) aufgestellt.

Die Listen der Größen und Rechenregeln werden nun möglichst ausgedünnt: Wenn sich herausstellt, dass eine Hilfs- oder Zielgröße mit keiner in der Liste enthaltenen Rechenregel berechnet werden kann oder eine Rechenregel eine solche Größe zu nutzen versucht, wird diese aus der Liste gestrichen. Das zieht möglicherweise das Streichen weiterer Größen und Rechenregeln nach sich. Das wird so lange fortgesetzt, bis keine Streichungen mehr möglich sind. Schließlich werden alle Startgrößen gestrichen, die in keiner Rechenregel benutzt werden.

Ausgehend von den Startgrößen wird später versucht, durch fortgesetzte Anwendung der Rechenregeln weitere Größen zu berechnen. Nicht berechenbare Hilfs- oder Zielgrößen erkennt man daran, dass sie im Rechenablauf fehlen.

2.2 Redundanzen

In den Fällen, in denen Redundanzen vorliegen, können die erhaltenen Ergebnisse durch die Wirkungen unvermeidlicher Messabweichungen voneinander abweichen. Dieser Umstand kann zur Ausgleichung zufälliger Messabweichungen und zur Aufdeckung grober Fehler genutzt werden. Das werden die Abschnitte 5 ff. deutlich machen.

Bei ausreichend großer Redundanz ist es oft möglich, eine Zielgröße zweimal auf völlig unabhängige Weise zu berechnen, sodass keine Startgröße in beiden Berechnungen benutzt wird. Dann kann ein grober Fehler in einer Startgröße immer nur eines von beiden Ergebnissen für die Zielgröße grob verfälschen und die Differenz der Ergebnisse zeigt dies deutlich an. Ist die Differenz beider Ergebnisse größer als eine festzulegende Schranke, schließen wir auf einen oder mehrere grobe Fehler und die Messung muss überprüft, ggf. teilweise oder vollständig wiederholt werden.

Bei geringer Redundanz ist es teilweise nicht möglich, zwei vollständig unabhängige Rechenwege zu finden, sondern man muss mit geringfügiger Überlappung von Startgrößen in beiden Berechnungen leben. Grobe Fehler können in beiden erhaltenen Ergebnissen eine

ähnliche oder gleiche Wirkung entfalten und daher in der Differenz kaum oder gar nicht auffallen. Jetzt ist es vorteilhaft, wenn man zwei Rechenwege findet, bei denen die Abhängigkeit so gering wie möglich in dem Sinn ist, dass die Anzahl von gemeinsam verwendeten Startgrößen minimal ist. Selbst bei sehr einfachen Messungsanordnungen ist es nicht offensichtlich, welche beiden Rechenwege diesem Anspruch genügen. Das wird Abschnitt 6 deutlich machen.

Die Situation würde sich u.U. verbessern, wenn nicht nur zwei Rechenwege verglichen würden, sondern so viele wie möglich, am besten alle, die mit einer nicht reduzierbaren Anzahl von Startgrößen auskommen. Das bedeutet, dass nach Weglassen einer beliebigen Startgröße die Berechnung nicht mehr möglich ist. Jeder Rechenweg für sich genommen enthält also keine Redundanz. Man erhält nun bei Vorliegen von Messabweichungen und Redundanzen für jeden Rechenweg in der Regel ein etwas anderes eindeutiges oder endlich vieldeutiges Ergebnis. Wenn die Verteilung dieser Ergebnisse einen Häufungspunkt aufweist, d.h. sehr viele Ergebnisse in einem engen Intervall liegen, dann können diese sich häufenden Ergebnisse praktisch nicht von groben Fehlern oder von einer ungünstigen Fortpflanzung zufälliger Messabweichungen beeinflusst sein. Der Median dieser Einzelergebnisse stellt somit ein sinnvolles und robustes Endergebnis dar.

Die Grundidee zeigt eine gewisse Verwandtschaft zu Methoden der Kreuzvalidierung /Geisser 1993/, bei denen auch versucht wird, die Auswertung auf mehrere verschiedene Weisen durch Weglassen von Startgrößen durchzuführen und aus den Differenzen auf die Gültigkeit des Modells zu schließen, z.B. auf das Vorhandensein grober Fehler (siehe hierzu auch /Biagi & Caldera 2013/).

Weiter gibt es geringfügige Parallelen zur Methode des Least Median of Squares (LMS), entwickelt von /Rousseeuw & Leroy 1987/, bei der ein Schätzer so gewählt werden soll, dass die quadrierten Residuen (Verbesserungen) einen möglichst kleinen Median haben. Leider muss die Lösung des LMS-Problems über einen aufwendigen Suchalgorithmus realisiert werden, der meist so aufgebaut ist, dass aus zufällig ausgewählten redundanzfreien Teilmengen von Beobachtungen je eine exakte Lösung berechnet wird. Aus diesen Lösungen wird dann jene mit dem kleinsten Median der quadrierten Residuen ausgewählt. Stattdessen berechnen wir hier aus redundanzfreien Teilmengen einerseits alle Lösungen, was bei den anvisierten Problemen praktisch möglich ist, und schlagen andererseits den Median dieser Lösungen selbst als robustes Endergebnis vor. Der letzte Punkt ist für das Berechnungsverfahren aber unwesentlich und kann leicht durch eine andere Festlegung, z.B. die LMS-Methode, ersetzt werden.

2.3 Unlösbarkeiten und Mehrdeutigkeiten

Nun wird der Rechenablauf mit den tatsächlichen Zahlenwerten abgearbeitet. Allerdings könnten sich in jedem Rechenschritt nicht nur eine, sondern bei einigen Rechenregeln auch keine oder zwei Lösungen ergeben, z.B. beim Bogenschnitt. Im Fall keiner Lösung muss ein grober Fehler oder Irrtum vorliegen: Die Startgrößen sind inkonsistent. Im Fall von zwei Lösungen wird mit beiden Lösungen parallel weitergerechnet. Sollten mehrere Rechenschritte im Rechenablauf zweideutige Ergebnisse produzieren, ergeben sich entsprechend mehrere

Lösungen, die alle berechnet werden. Bei k zweideutigen Rechenschritten erhält man bis zu 2^k Lösungen. Die Gesamtzahl der letztlich erhaltenen Lösungen ist allerdings nicht immer eine Zweierpotenz. Es ist auch möglich, dass von zwei Lösungen eines vorangegangenen Rechenschritts, z.B. eines Bogenschnitts, nur eine in einem weiteren Schritt zwei Lösungen produziert, die andere nur eine oder gar keine, z.B. wenn ein Dreieckswinkel mit Sinussatz zu berechnen ist.

Selbst im Fall, dass keine Redundanzen vorliegen, können einige Größen auf mehrere Arten berechnet werden. Beispiel: Aus drei gegebenen Seiten eines Dreiecks kann ein Innenwinkel mit Kosinussatz (oder gleichwertig mit Halbwinkelsatz) berechnet werden. Ein zweiter Innenwinkel kann dann mit Sinussatz aus zwei Seiten und dem vorher berechneten Winkel oder aus drei Seiten mit Kosinussatz berechnet

werden. Mit Sinussatz ergeben sich unter Umständen zwei Lösungen, während die Berechnung mit Kosinussatz eindeutig ist. Durch Vergleich der Lösungen wird die richtige Lösung des Sinussatzes identifiziert. Die andere Lösung ist inkonsistent mit der Kosinussatzlösung und wird verworfen. An dieser Stelle erscheint es überflüssig, die Sinussatz-Lösungen überhaupt zu berechnen. Allerdings ist die Sache nicht immer so übersichtlich, sodass generell alle Rechenregeln angewendet werden, die sich überhaupt anwenden lassen. In Abschnitt 4 wird die Nützlichkeit dieser Strategie in einem Beispiel demonstriert.

Der vollständige Algorithmus des Berechnungsverfahrens ist in Abb. 1 dargestellt, zuzüglich einiger technischer Aspekte speziell für Probleme mit Redundanzen, auf die wir im Abschnitt 7 zurückkommen.

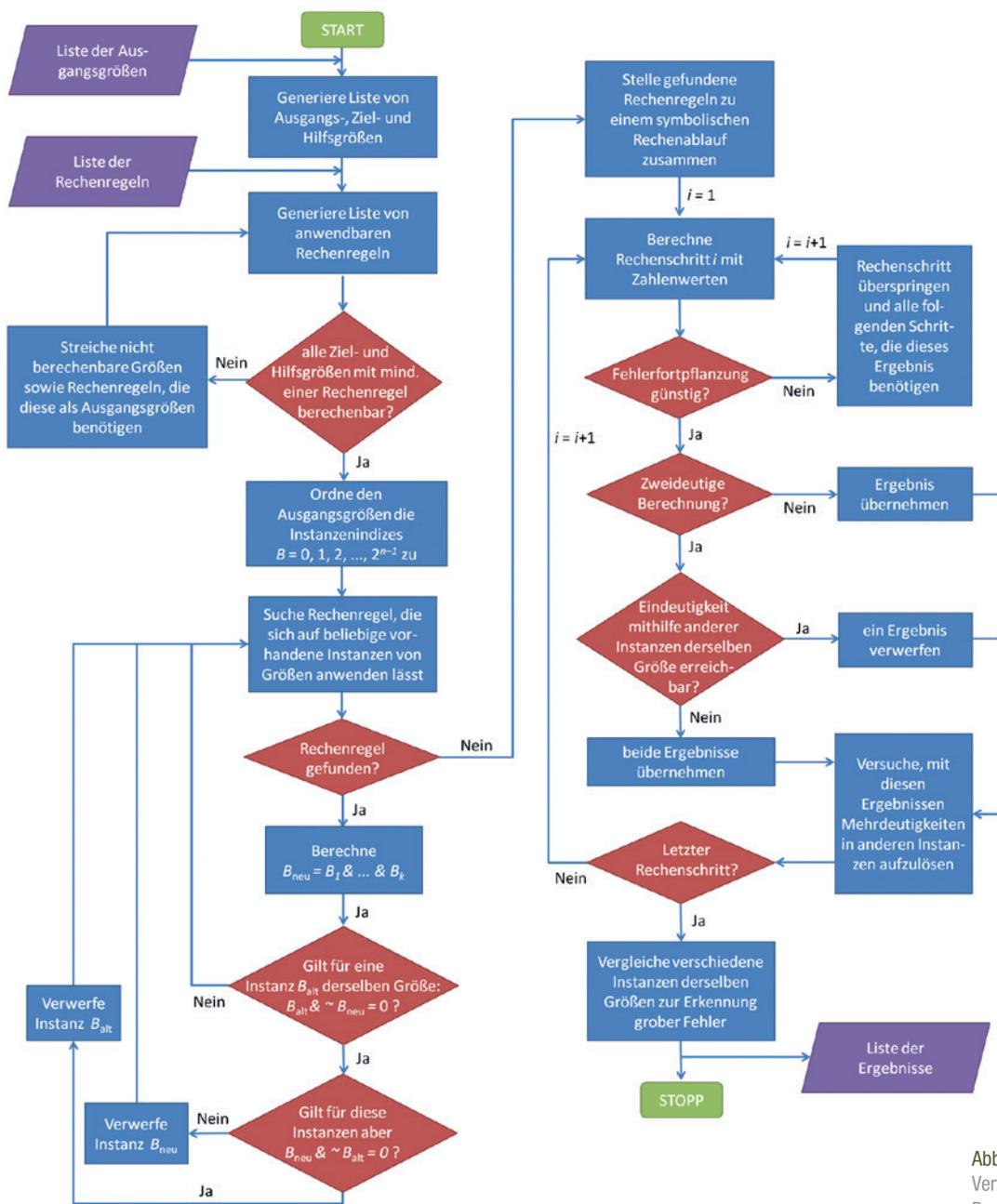


Abb. 1 | Automatisches Verfahren für geodätische Berechnungen

3 BEISPIEL OHNE REDUNDANZEN: RECHTECK DURCH FÜNF PUNKTE

3.1 Startgrößen und automatischer Rechenablauf

Wir illustrieren den Algorithmus anhand einer einfachen Berechnung in der Ebene ohne Redundanz, betonen aber, dass der Algorithmus keineswegs auf Berechnung von diesem Typ beschränkt ist: An den Wänden eines rechteckigen Innenraums wurden mit Tachymeter oder Laserscanner im Standpunkt S fünf Zielpunkte A, B, C, D, E mit Horizontalrichtungen $r_{SA}, r_{SB}, r_{SC}, r_{SD}, r_{SE}$ und Horizontalabständen $e_{SA}, e_{SB}, e_{SC}, e_{SD}, e_{SE}$, wie in *Abb. 2* dargestellt, erfasst. Zielgrößen sind die Seitenlängen des Innenraums.

Wir müssen nur die Startgrößen und ihre Werte spezifizieren, den Rest erledigt der Algorithmus aus *Abb. 1* automatisch. Startgrößen sind zunächst die zehn Messgrößen. Außerdem muss noch durch weitere Startgrößen formuliert werden, dass der Innenraum rechteckig ist und A, B, C, D, E auf seinem Rand liegen. Schließlich ist es sinnvoll, mindestens ein Koordinatensystem festzulegen, damit Rechenregeln angewendet werden können, die mit Koordinaten arbeiten. Das geschieht über weitere Startgrößen. Dazu gibt es im beschriebenen Konzept eine Vielzahl von Möglichkeiten, von denen wir nur zwei gegenüberstellen:

Variante 1: Wir generieren fiktive Tachymeterichtungsmessungen r in den Eckpunkten des Raums:

- im Punkt P_1 : $r_{14} = r_{1A} = r_{1B} = 0$ gon, $r_{12} = r_{1C} = 300$ gon,
- im Punkt P_2 : $r_{21} = 0$ gon, $r_{23} = 300$ gon,
- im Punkt P_3 : $r_{32} = r_{3D} = 0$ gon, $r_{34} = r_{3E} = 300$ gon.

Der rechte Winkel am Punkt P_4 ergibt sich automatisch über die Innenwinkelsumme. Wir legen noch ein lokales Koordinatensystem mit Ursprung in S fest: Als weitere Startgrößen benötigen wir dazu die Koordinaten X_S, Y_S und den Orientierungsparameter α_S .

Automatischer Rechenablauf: Zunächst werden die Koordinaten von A, B, C, D, E im Standpunktsystem jeweils als Polarpunkte von Standpunkt S aus berechnet. P_1 ergibt sich mit Rückwärtsschnitt über A, B, C. Nun ergeben sich die Richtungswinkel (Azimute) aller Rechteckseiten. Die Koordinaten der Punkte P_2, P_3, P_4 erhält man daraus jeweils mit Vorwärtsschnitt. Letztlich werden daraus die Seitenlängen des Rechtecks mit einer Rechenregel vom Typ (1) erhalten. Daneben liefert der Algorithmus noch Werte für viele weitere Hilfsgrößen, die allerdings nicht zur Berechnung der Zielgrößen beitragen.

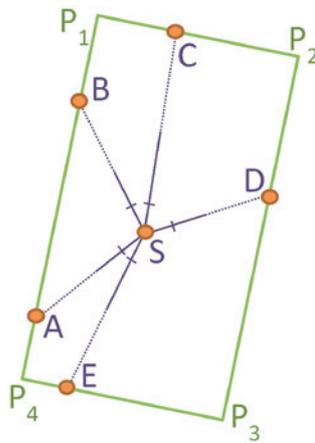


Abb. 2 | Rechteck durch fünf Punkte (kleine Querstriche symbolisieren Distanzmessungen)

Variante 2: Wir definieren mit den Startgrößen X_A, Y_A ein lokales Koordinatensystem mit Ursprung in A und geben in diesem System folgende Richtungswinkel t an:

- im Punkt A: $t_{AB} = t_{A1} = 0$ gon, $t_{A4} = 200$ gon,
- im Punkt C: $t_{C2} = 100$ gon, $t_{C1} = 300$ gon,
- im Punkt D: $t_{D3} = 200$ gon, $t_{D2} = 0$ gon,
- im Punkt E: $t_{E4} = 300$ gon, $t_{E3} = 100$ gon.

Hierdurch wird vorgegeben, dass die Punkte A, B, C, D, E auf den Wänden liegen und dass die Wände rechte Winkel miteinander bilden. Die Richtungswinkel lassen sich auch durch Richtungen mit zusätzlich je einem Orientierungsparameter pro Standpunkt ersetzen. Von diesem Fall gehen wir im Weiteren aus.

Automatischer Rechenablauf: Zunächst werden aus Orientierungsparametern und Richtungen für alle vier Wände Richtungswinkel erhalten. Davor oder danach wird e_{AB} mit Kosinussatz im Dreieck ASB berechnet und danach B als Polarpunkt von Punkt A aus. Nun wird S über Bogenschnitt berechnet. Es werden zwei Ergebnisse erhalten, mit denen parallel weitergearbeitet wird. Danach wird auf beiden Punkten S der Orientierungsparameter jeweils über Anschlusspunkt A und B berechnet. An diesem Punkt des Rechenablaufs haben wir also vier Lösungen. Auf dem falschen Punkt S außerhalb des Rechtecks sind die beiden Orientierungsparameter inkonsistent, sodass diese beiden Lösungen verworfen werden. Auf dem anderen Punkt sind die Lösungen numerisch gleich und werden zu einer vereinigt. Nun können die Punkte C, D, E jeweils als Polarpunkt von Standpunkt S aus berechnet werden. Schließlich ergeben sich ausgehend von diesen Punkten die vier Eckpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 jeweils mit Vorwärtsschnitt. Letztlich werden daraus die Seitenlängen des Rechtecks mit einer Rechenregel vom Typ (1) erhalten.

Ein Unterschied zwischen Variante 1 und Variante 2 ist u. a. in der Konfiguration der Schnitte zu suchen: In Variante 1 wird ein Rückwärtsschnitt und in Variante 2 ein Bogenschnitt berechnet. Liegt z. B. S sehr nahe an der Wand, an welcher A und B liegen, ist der Bogenschnitt ungünstig konfiguriert. Liegt B sehr nahe bei P_1 , ist der Rückwärtsschnitt ungünstig konfiguriert. Im Verfahren sind Grenzwerte für Schnittwinkel wählbar, die schlechte Schnitte verhindern. Im Fall ohne Redundanz hat das allerdings zur Folge, dass gar kein Ergebnis erhalten wird, denn es kann auf keine andere Berechnung

Variante	1	2
Gegebene Richtungen	16	14
Gegebene Distanzen	5	5
Gegebene Orientierungen	1	4
Gegebene Koordinaten	1*2	1*2
Aufgestellte Rechenregeln	561	459
davon verwendbar	513	417
davon verwendet	58	50
Berechnete Richtungswinkel	14	14
Berechnete Distanzen	31	24
Berechnete Orientierungen	3	1
Berechnete Koordinaten	9*2	9*2

Tab. 1 | Rechenablauf beim Rechteck durch fünf Punkte

ausgewichen werden. Ohnehin kann nur die Verstärkung numerischer Rundungsfehler verhindert werden.

In Tab. 1 ist der Rechenablauf der beiden Varianten gegenübergestellt. Die Anzahl der aufgestellten und verwendbaren Rechenregeln erscheint hoch. Das liegt daran, dass in der gegenwärtigen Implementierung grundsätzlich dreidimensional gearbeitet wird, sodass immer auch Zenitwinkel, Höhen und Höhendifferenzen als Hilfsgrößen erzeugt werden. Also werden zunächst auch Rechenregeln mit diesen Größen aufgestellt, aber letztlich natürlich nicht verwendet.

Für die Ausgleichung eines Rechtecks durch mehr als fünf Punkte können einige berechnete Größen als Näherungsparameter dienen.

3.2 Erzeugung der Liste der Ziel- und Hilfsgrößen²

Es wurde deutlich, dass im Algorithmus kein Unterschied zwischen Ziel- und Hilfsgrößen besteht. Die Liste dieser Größen sollte automatisch erzeugt werden. In der aktuellen Implementierung für Probleme, die als Tachymetermessungsaufgaben formuliert werden können, dazu zählt auch das Beispiel „Rechteck durch fünf Punkte“, werden als Hilfs- und Zielgrößen alle Richtungen, Richtungswinkel, Schräg- und Horizontalabstände, Zenitwinkel und Höhendifferenzen zwischen Stand- und Zielpunkten sowie fehlende Koordinaten erzeugt. Ist das nicht genug, können noch „blinde“ Stand- und Zielpunkte hinzugefügt werden, also Punkte ohne Messwerte.

Im letzten Unterabschnitt konnte man bei Variante 1 z.B. erwarten, dass auch P_3 mit Rückwärtsschnitt berechnet werden kann. Das ist aber nicht der Fall, denn P_2 und P_4 können beide nur mit P_3 berechnet werden. Ein Vorwärtsschnitt von C und D nach P_2 wird z.B. nicht berechnet, weil die entsprechenden Richtungswinkel in der Liste der Hilfsgrößen fehlen. Um das zu ändern, könnten C und D dem Standpunkt P_2 als Zielpunkte hinzugefügt werden. Messwerte werden nicht benötigt, können aber hier mit $r_{2C} = 0$ gon, $r_{2D} = 300$ gon angegeben werden, wobei eigentlich zwei Redundanzen entstehen.

Möchte man z.B. die Länge der Diagonale des Rechtecks erhalten, fügt man dem Standpunkt P_2 noch P_4 als „blinden“ Zielpunkt hinzu. Diese Beschränkung dient allein der Übersichtlichkeit der Ergebnisliste. Sonst würden z.B. Distanzen und Richtungswinkel

zwischen allen 45 Punktpaaren berechnet, woran hier kein praktisches Interesse besteht.

4 BEISPIEL OHNE REDUNDANZEN: FLÄCHENTEILUNG

Ein Viereck ABCD, von dem die vier Seitenlängen und die Diagonale AC gemessen wurden, soll so geteilt werden, dass die Teilungsgerade PQ durch einen gegebenen Punkt Q auf der Seite AD verläuft und das Viereck ABPQ einen gewünschten Flächeninhalt F besitzt (Abb. 3). Startgrößen sind also die fünf Horizontalabstände AB, BC, CD, DA, AC und AQ zur Festlegung des Punkts Q sowie der Flächeninhalt F . Durch die gestreckten Winkel $BPC = 200$ gon und $DQA = 200$ gon wird festgelegt, dass P auf der Seite BC und Q auf der Seite AD liegt. Somit sind insgesamt neun Startgrößen zu spezifizieren. Den Rest übernimmt der Algorithmus aus Abb. 1 automatisch.

Der entstehende Rechenablauf ist auszugsweise in Abb. 4 dargestellt. Ein Koordinatensystem wird diesmal nicht benötigt. Als Rechenregeln kommen also nur elementare Winkel- und Dreiecksbeziehungen wie Sinus- und Kosinussatz zur Anwendung sowie einmal eine Vierecksbeziehung, die aus zwei Seiten, zwei Winkeln und dem Flächeninhalt eine dritte Seite (hier BP) erzeugt. Bei den Winkeln DAB und BCD ist jeweils unklar, ob die beiden Teilwinkel CAB und DAC bzw. BCA und ACD, die ja Innenwinkel sind, addiert oder subtrahiert werden müssen. So entstehen zunächst zwei Lösungen und dann vier, wobei zwei im weiteren Rechenablauf zu Inkonsistenzen führen und verworfen werden. Ob die restlichen zwei Lösungen

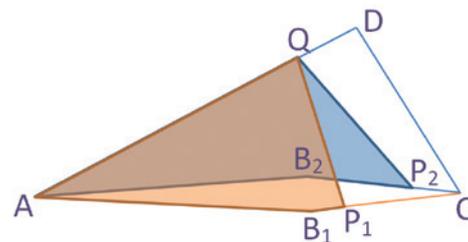


Abb. 3 | Flächenteilung

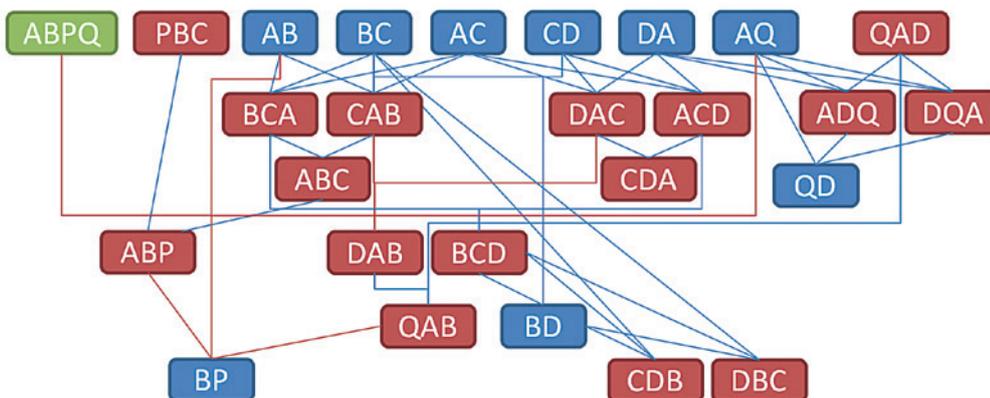


Abb. 4 | Auszug aus dem Rechenablauf im Beispiel „Flächenteilung“. Blau: Horizontalabstände, rot: Innenwinkel (mittlerer Buchstabe = Scheitelpunkt), grün: Fläche. Der Rechenablauf verläuft von oben nach unten.

² Der weniger an technischen Details interessierte Leser kann diesen Abschnitt überspringen.

bis zum Ende des Rechenablaufs bestehen bleiben, hängt von den Zahlenwerten ab. Es könnte sein, dass BP formal negativ wird oder größer als BC, was inkonsistent mit dem gestreckten Winkel BPC ist. Die entsprechende Lösung würde dann verworfen. Im Endergebnis könnten keine, eine oder zwei Lösungen erhalten werden. In *Abb. 3* ist der Fall dargestellt, dass zwei Lösungen entstehen. Der Rechenablauf endet erst, wenn keine Größen mehr berechnet werden können, ist also wesentlich umfangreicher, als im *Abb. 4* dargestellt.

5 BEISPIEL MIT REDUNDANZEN: DREIECK

In einem Dreieck seien alle Innenwinkel α, β, γ und alle Seitenlängen a, b, c gegeben bzw. gemessen. Den Flächeninhalt erhält man insgesamt auf 19 verschiedenen Rechenwegen (*Tab. 1*). Einige Rechenwege liefern zwei Ergebnisse, die falschen können jedoch durch Vergleich mit den Ergebnissen der eindeutigen Rechenwege identifiziert und verworfen werden. Liegen Messabweichungen vor, so erhält man in der Regel 19 verschiedene Zahlenwerte. Liegt in einer Seitenlänge ein grober Fehler vor, so werden zehn Zahlenwerte davon grob verfälscht. Nur wenn alle zehn Werte in dieselbe Richtung verfälscht werden, wird auch der Median der 19 Werte grob verfälscht.

Startgrößen	Fläche ohne groben Fehler	Fläche mit grobem Fehler	zweite Lösung
a, b, c	2,9047375	2,8447748	
a, b, α	2,8987521	2,8987521	0,901
c, β, γ	2,9387412	3,0875149	
a, b, β	2,8909452	2,8909452	
c, α, γ	2,9005940	3,0474366	
a, b, γ	2,9057495	2,9057495	
c, α, β	2,8693780	3,0146403	
a, c, α	2,8614848	3,2381389	3,893
b, β, γ	3,0071565	3,0071565	
a, c, β	2,8725052	2,9443178	
b, α, γ	2,8804851	2,8804851	
a, c, β	2,9079258	3,0182222	
b, α, γ	2,9118219	2,9118219	
a, α, β	2,8756358	2,8756358	
b, c, γ	2,9099062	3,1185104	
a, α, γ	2,9312355	2,9312355	
b, c, β	2,7552619	3,3534645	5,241
a, β, γ	2,8077621	2,8077621	
b, c, α	2,8905220	2,9627851	
Median	2,8987521	2,9443178	

Tab. 2 | Dreieck mit den Seiten $a = 2, b = 3, c = 4$ und Winkeln $\alpha = 32 \text{ gon}, \beta = 51 \text{ gon}, \gamma = 116 \text{ gon}$ mit geringen Widersprüchen (z.B. Winkelsumme 199 gon). Zusätzliche Berechnung mit grob falschem $c = 4,1$

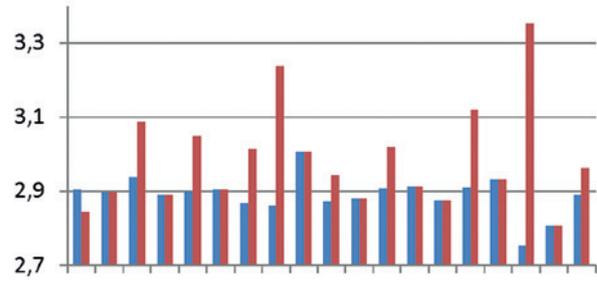


Abb. 5 | Flächeninhalte aus *Tab. 2* ohne (blau) und mit grobem Fehler (rot)

Mit den Zahlenwerten in *Tab. 2* sieht man, dass in einem Fall (das ist a, b, c) sogar die Fläche kleiner wird, obwohl eine Seite grob zu lang ist (siehe auch *Abb. 5*). Dennoch ist der Median grob verfälscht, weil in einem Fall (b, β, γ) auch eine Fläche, die nicht grob verfälscht wird, sehr viel zu groß ist. Das liegt in diesem Fall an einer ungünstigen Fortpflanzung zufälliger Messabweichungen.

Alle Rechenwege bis auf (a, b, c) besitzen ein unabhängiges Pendant (in *Tab. 2* jeweils aufeinanderfolgende Zeilen), sodass es zum Ausschluss grober Fehler ausreichen könnte, nur zwei unabhängige Rechenwege zu beschreiten. Zum Beispiel beträgt bei ($a, b, \alpha / c, \beta, \gamma$) die Differenz der Flächen ohne groben Fehler nur 0,04 und mit grobem Fehler 0,19. Ein grober Fehler kann im ersten Fall ausgeschlossen werden, im Zweiten nicht. Hier müssen weitere Ergebnisse analysiert werden, um den groben Fehler zu finden.

Betrachten wir die vier Lösungen mit grobem Fehler, die am weitesten vom Median entfernt liegen: $c, \beta, \gamma / a, c, \alpha / b, c, \gamma / b, c, \beta, c$ ist die einzige Größe, die in allen vier Rechenwegen als Startgröße verwendet wurde. Also ist sie ein Kandidat für den groben Fehler.

Man könnte fragen, welchen Flächeninhalt in diesem Fall die Ausgleichung nach kleinsten Quadraten liefern und ob ein Wert hier als grob falsch identifiziert würde. Das hinge von den Gewichten ab, die in diesem Fall wegen der unterschiedlichen Größentypen nicht alle gleich gesetzt werden können. Für eine „vernünftige“ Wahl der Gewichte erhalte man mit $c = 4,0$ eine Fläche von ungefähr 2,905 ... 2,908 (je nach Gewicht) und mit dem grob falschen Wert $c = 4,1$ von ungefähr 2,90 ... 2,98. Im letzten Fall hängt das Ergebnis stark vom Gewicht für die Seitenlänge c ab. Ein auf der Basis der A-posteriori-Genauigkeiten durchgeführter Individualtest /Jäger et al. 2005/ würde mit der Wahrscheinlichkeit für Entscheidungsfehler erster Art von 0,01 in beiden Fällen nicht abgelehnt. Wir teilen dies nur informativ mit, ohne daraus eine Überlegenheit des einen oder des anderen Verfahrens zu konstruieren. Dazu sind die Mechanismen zu verschieden und weitere Untersuchungen müssen folgen.

6 BEISPIELE MIT REDUNDANZEN: UNVOLLSTÄNDIG ANGESCHLOSSENER POLYGONZUG

6.1 Messungsanordnung

Als letztes praxisrelevantes Beispiel wählen wir eine einfache Situation, in der ein Polygonzug (*Abb. 6*) zwischen zwei Raumfestpunkten A und E über zwei Neupunkte 1 und 2 tachymetrisch gemessen

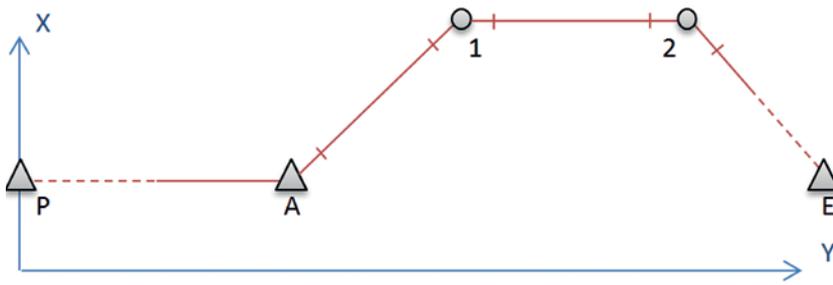


Abb. 6 | Unvollständig angeschlossener Polygonzug (Kleine Querstriche symbolisieren Distanzmessungen, Dreiecke bezeichnen Festpunkte, Kreise hingegen Neupunkte)

wird. Am Punkt A liegt ein Richtungsanschluss zum Lagefestpunkt P vor. Auf dem Punkt E wurden keine Messungen ausgeführt oder diese wurden schon als grob falsch erkannt und verworfen, sodass dort ein Richtungsabschluss fehlt. Die Messungsanordnung ist mit Absicht untypisch gewählt, um zu demonstrieren, wie flexibel das algorithmische Konzept arbeitet.

Eine solche Messungsanordnung kann mit geodätischer Standardsoftware berechnet werden: Von A ausgehend wird der Zug durch Polarpunktberechnungen und trigonometrische Höhenübertragung bis zum Punkt E berechnet. Schließlich werden die gegebenen Koordinaten von E mit den berechneten verglichen. Sind die Koordinatenwidersprüche größer als erwartet, so muss auf einen groben Fehler oder mehrere solche geschlossen werden: grob falsche Messwerte oder Festpunktkoordinaten. Eine Lokalisierung des groben Fehlers ist in der Regel nicht möglich, erst recht nicht, wenn mehrere vorliegen. Sind die Widersprüche hingegen akzeptabel, können sie nach einem bestimmten Modus auf die Zwischenpunkte verteilt werden.

Nicht immer wirken sich grobe Fehler jedoch auf die berechneten Koordinaten von E aus, sodass sie so nicht auffallen könnten. Hingegen könnten sie dennoch die eigentlichen Zielgrößen (Neupunktkoordinaten) verfälschen.

Ausgehend von so gewonnenen Koordinaten der Neupunkte 1 und 2 als Näherungsparameter kann der Polygonzug zusätzlich

als geodätisches Raumnetz berechnet werden. Wenn man vor der Ausgleichung Mittelwerte

- für die Richtungen und Zenitwinkel aus ggf. vorliegenden Satz-messungen und
- für die Zenitwinkel und Raumdistanzen aus Gegenseiten zwischen A und 1 sowie zwischen 1 und 2 bei ggf. vorliegenden gleichen Instrumenten- und Reflektorhöhen auf allen Standpunkten (nachfolgend Stativhöhen genannt)

bildet, so verbleibt für das Raumnetz eine Redundanz von 3. Das ist nachvollziehbar, weil zuvor drei Abschlussbedingungen am Punkt E zu überprüfen waren. Bei einer so geringen Redundanz ist die Ausgleichung des Polygonzugs als Raumnetz wenig fruchtbar.

6.2 Rechenwege

Wir wollen untersuchen, auf wie viele unterschiedliche Arten z. B. der Neupunkt 2 aus den Startgrößen eindeutig oder zweideutig berechnet werden kann³. Über das Ergebnis werden selbst erfahrene Geodäten überrascht sein: Wenn man vorher alle Mittelbildungen wie eben beschrieben vornimmt, sind es für die Höhe von Punkt 2 bis zu zehn Rechenwege (Tab. 3) und für die Lagekoordinaten von Punkt 2 sogar bis zu 39 verschiedene Rechenwege (Tab. 4). Alle diese Rechenwege führen bei Messabweichungen oder Fest-

Lfd. Nr.	ih_1	ih_2	r_{12}	r_{1A}	r_{21}	r_{2E}	r_{A1}	r_{AP}	s_{12}	s_{2E}	s_{A1}	v_{12}	v_{2E}	v_{A1}	X_A Y_A	X_E Y_E	X_P Y_P	ih_A Z_A	ih_E Z_E	Anzahl
1	*	*							*		*	*		*				*		8
2	*	*	*	*	*	*	*	*			*	*		*	*	*	*	*		19
3	*	*	*	*			*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*		19
4	*	*			*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*		19
5		*	*	*			*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*		18
6		*	*	*	*	*	*	*			*		*	*	*	*	*	*		18
7		*			*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*		18
8		*								*			*					*		5
9	*	*	*	*	*	*			*	*		*	*	*	*	*		*		17
10		*	*	*	*	*			*		*	*	*	*	*	*		*		16
Anzahl	5	10	6	6	6	6	6	6	5	4	8	8	8	9	16	16	12	10	10	

Tab. 3 | Zehn verschiedene Rechenwege zur Berechnung der Höhe des Neupunktes 2 für das Beispiel „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“;

* = verwendete Startgröße

³ Zweideutigkeiten können theoretisch beim ebenen Bogenschnitt entstehen, aber – von singulären Konfigurationen abgesehen – leicht aufgelöst werden.

Lfd. Nr.	ih_1	ih_2	r_{12}	r_{1A}	r_{21}	r_{2E}	r_{A1}	r_{AP}	s_{12}	s_{2E}	s_{A1}	v_{12}	v_{2E}	v_{A1}	X_A Y_A	X_E Y_E	X_P Y_P	ih_A Z_A	ih_E Z_E	Anzahl
1			*	*			*	*	*		*	*		*	*		*			12
2			*	*					*	*	*	*	*	*	*	*				12
3			*	*	*	*			*		*	*		*	*	*				12
4			*	*	*	*			*	*		*	*		*	*				12
5					*	*			*	*	*	*	*	*	*	*				12
6					*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*			14
7							*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			14
8					*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*			14
9					*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*			14
10			*	*			*	*		*	*		*	*	*	*	*			14
11			*	*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	*			14
12			*	*					*	*	*	*		*	*	*		*	*	15
13			*	*					*		*	*	*	*	*	*		*	*	15
14			*	*					*	*	*		*	*	*	*		*	*	15
15			*	*						*	*	*	*	*	*	*		*	*	15
16					*	*				*	*	*	*	*	*	*		*	*	15
17					*	*			*	*	*	*	*		*	*		*	*	15
18					*	*			*	*		*	*	*	*	*		*	*	15
19					*	*			*	*	*		*	*	*	*		*	*	15
20					*	*			*		*	*	*	*	*	*		*	*	15
21			*	*					*	*	*	*	*		*	*		*	*	15
22			*	*					*	*		*	*	*	*	*		*	*	15
23			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			16
24			*	*			*	*	*	*	*		*	*	*		*	*	*	17
25							*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	17
26			*	*			*	*		*	*	*	*	*	*		*	*	*	17
27							*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	17
28							*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	17
29							*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	*	17
30			*	*			*	*	*	*	*	*	*		*		*	*	*	17
31							*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	17
32			*	*			*	*	*	*		*	*	*	*		*	*	*	17
33							*	*	*	*		*	*	*	*	*	*	*	*	17
34			*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*		*	*	*	*	19
35			*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*		*	*	*	*	19
36			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	19
37			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	19
38			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	19
39			*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		*	*	*	*	19
Anzahl	0	0	23	23	19	19	24	24	31	31	32	31	32	32	32	34	24	27	27	

Tab. 4 | 39 verschiedene Rechenwege zur Berechnung der Lage des Neupunkts 2 zum Beispiel „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“;
* = verwendete Startgröße

punktkoordinatenabweichungen zu numerisch verschiedenen Ergebnissen für die Koordinaten von Neupunkt 2. Ohne vorherige Mittelbildung und wenn Reflektorhöhen und Instrumentenhöhen pro Punkt als zwei getrennte Startgrößen aufgefasst werden, gibt es noch wesentlich mehr Rechenwege. Je nach Konfiguration wird nicht jeder dieser Rechenwege tatsächlich praktisch empfohlen. Bei einigen kann die Fehlerfortpflanzung ungünstig sein, z.B. durch schlechte Schnitte.

Bei den Neupunkthöhen ist klar ersichtlich, dass die Stativhöhen auf den Neupunkten immer benötigt werden. Grobe Fehler in diesen Höhen werden nie im Nachhinein zu finden sein, sondern in voller Höhe in die Zielgröße eingehen. Davon abgesehen gibt es, ebenfalls klar ersichtlich, für jede Neupunkthöhe zwei völlig unabhängige Rechenwege, nämlich die trigonometrische Höhenübertragung jeweils von A und von E aus. Wählt man aus der Gesamtzahl der Möglichkeiten nur diese beiden aus (Tab. 3: Lfd. Nr. 1 und 8) und vergleicht die Ergebnisse, so hat man dieselben Chancen, grobe Fehler aufzudecken, wie vorher mit dem Abschlusshöhenwiderspruch auf Punkt E.

Es gibt zwar z.B. für die Höhe von Punkt 2 von E aus nur eine Möglichkeit (Tab. 3: Lfd. Nr. 8), aber von A aus tatsächlich zwei Rechenwege, die mit dem Rechenweg von E aus (abgesehen von der Stativhöhe im Punkt 2) keine gemeinsame Startgröße benutzen (Tab. 3: Lfd. Nr. 1 und 2). Die zweite, weniger klar ersichtliche Möglichkeit kommt ohne die Raumdistanz s_{12} zwischen 1 und 2 aus und nutzt stattdessen die Lagekoordinaten der Festpunkte und die Richtungen. Diese Rechenwege wurden in Abb. 7 veranschaulicht.

Bei den Lagekoordinaten der Neupunkte ist die Situation komplizierter (vgl. Tab. 4):

Einerseits gibt es hier keine einzige Startgröße, die für die Berechnung unverzichtbar ist. Es gibt sogar fünf Rechenwege, die ohne die Lagekoordinaten von E auskommen (Tab. 4: Lfd. Nr. 1, 24, 26, 30, 32). Das bedeutet, dass bei einem groben Fehler in einer beliebigen Startgröße immer noch mehrere Rechenwege frei von diesem sind. In einigen Fällen ist sogar weniger als die Hälfte der Ergebnisse verfälscht, sodass der Median dieser Ergebnisse ebenso unverfälscht ist.

Andererseits gibt es nicht zwei weitgehend unabhängige Rechenwege. Ausgehend von den insgesamt 24 Startgrößen beträgt die geringste Überlappung 5. Rechenweg 1 hat mit den Rechenwegen 16 – 19 nur fünf Startgrößen gemeinsam: Die beiden Koordinaten von A und von den zwei Raumdistanzen und zwei Vertikalwinkel, die den Punkt 1 berühren, je drei Größen. Rechenwege 1 und 17 wurden in Abb. 8 veranschaulicht.

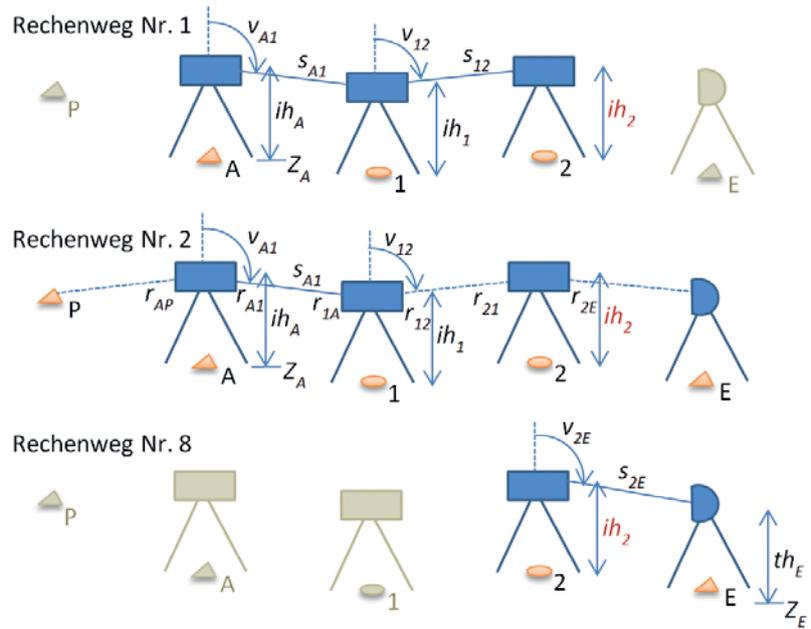


Abb. 7 | Rechenwege aus Tab. 3 mit geringster Anzahl gemeinsamer Startgrößen: Nur ih_2 ist den Rechenwegen 1 und 8 sowie 2 und 8 gemeinsam (rot)
 ih = Instrumenten- bzw. Stativhöhe, r = Richtung, s = Raumdistanz (Schrägstrecke), v = Vertikalwinkel, X, Y = Lagekoordinaten, Z = Höhe, th = Reflektorhöhe, * = benutzte Startgröße

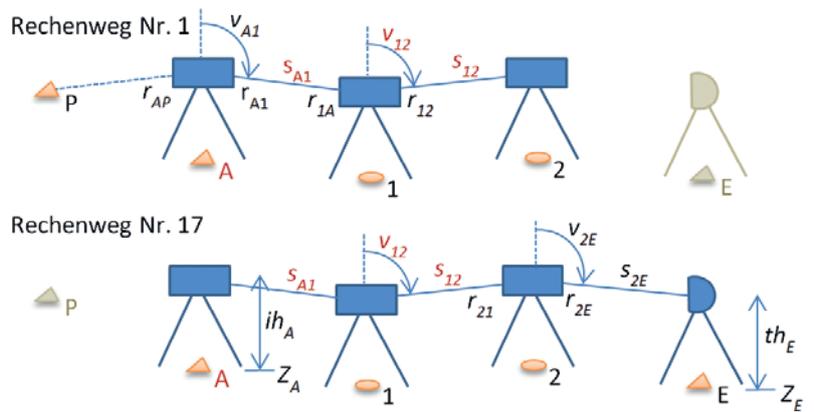


Abb. 8 | Rechenwege aus Tab. 4 mit geringster Anzahl gemeinsamer Startgrößen: $X_A, Y_A, s_{A1}, s_{12}, v_{12}$ (rot)

Es würde einige Mühe machen, diese Rechenwege manuell zu suchen und zum Zweck der Aufdeckung grober Fehler auf Unabhängigkeit zu überprüfen. Deswegen ist hier das universelle automatische Verfahren nützlich.

7 ERWEITERUNG DES ALGORITHMUS FÜR PROBLEME MIT REDUNDANZEN

Der in Abschnitt 2 beschriebene Algorithmus findet alle Rechenwege, die sich durch Kombination der implementierten Rechenregeln ergeben. Für Probleme mit Redundanzen sind folgende Erweiterungen erforderlich:

Weil die meisten Größen auf verschiedene Weise berechnet werden können, verwalten wir von jeder Größe mehrere Instanzen, die durch einen ganzzahligen Index B unterschieden werden. Der Index B einer Instanz gibt an, aus welchen Startgrößen diese

berechnet wurde. In der binären Darstellung von B ist jeder Startgröße ein Bit zugeordnet. Ist dieses gesetzt (= 1), wird die Startgröße verwendet, andernfalls nicht.

Am Anfang liegt nur von den n Startgrößen je eine Instanz vor, der gegebene oder gemessene Wert dieser Größe. Diesen Instanzen werden also die Indizes $B_i = 2^i, i = 0, \dots, n - 1$ zugeordnet.

Es wird nun sukzessive nach einer Rechenregel gesucht, die sich auf die vorhandenen Instanzen von Größen anwenden lässt. Das sind am Anfang nur die n Instanzen der Startgrößen und später auch die Instanzen von bereits berechneten Größen. Wird eine solche Rechenregel gefunden, dann wird für die daraus entstehende Instanz der zu berechnenden Größe der Index B_{neu} berechnet, und zwar nach der Formel $B_{\text{neu}} = B_1 \& \dots \& B_k$, wobei B_1, \dots, B_k die Indizes der benutzten Instanzen von Größen sind. „&“ symbolisiert den bitweisen UND-Operator. Beim Index B_{neu} sind also alle Bits gesetzt, die mindestens in einem Index B_1, \dots, B_k gesetzt waren.

Nun wird überprüft, ob diese entstehende Instanz B_{neu} eine Innovation darstellt, also zu einem geeigneten neuen Rechenweg führen könnte. Das ist nur dann der Fall, wenn die Menge der verwendeten Startgrößen nicht reduziert werden kann, also redundanzfrei ist. Es darf folglich keine zwei Instanzen B_i und B_j derselben Größe geben, für die $B_i \& \neg B_j = 0$ gilt („ \neg “ symbolisiert den bitweisen NICHT-Operator). Sonst wäre mit B_j bewiesen, dass es möglich ist, mit einer echten Teilmenge der von B_j verwendeten Startgrößen auszukommen, um diese Größe zu berechnen, und der Rechenweg zu B_j wäre somit nicht frei von Redundanzen. Es ist aber möglich, dass *verschiedenen* Größen dieselben Indizes B zugeordnet sind.

Die Instanz B_{neu} wird nur berechnet, wenn für keine Instanz derselben Größe mit Index B_{alt} gilt: $B_{\text{alt}} \& \neg B_{\text{neu}} = 0$. Ist hingegen $B_{\text{alt}} \& \neg B_{\text{neu}} > 0$, aber $B_{\text{neu}} \& \neg B_{\text{alt}} = 0$, so war die zuvor berechnete Instanz B_{alt} ungeeignet, wird aus der Liste der Instanzen gestrichen und durch B_{neu} ersetzt. Der erweiterte Algorithmus ist in *Abb. 1* veranschaulicht.

Nach Berechnung der Zahlenwerte erhält man pro Lösung und Größe und Instanz eine Zahl. Die zu einer Lösung und Größe

gehörenden Zahlen werden aufgrund von Messabweichungen eine gewisse Streuung aufweisen. Große Streuungen oder Ausreißer deuten auf grobe Fehler in den verwendeten Startwerten hin.

Der Vergleich dieser Werte kann sich bei manchen Größen auf unabhängig berechnete Instanzen B_i und B_j beschränken. Vollständige Unabhängigkeit (d. h. keine gemeinsamen Startgrößen) erkennt man daran, dass $B_i \& B_j = 0$ gilt. Häufig gibt es solche vollständig unabhängig berechneten Instanzen aber nicht, z. B. die Lagekoordinaten im Beispiel „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“. Dann kann man immerhin noch versuchen, Instanzen B_i und B_j zu finden, für die $B_i \& B_j$ möglichst wenige Eins-Bits hat (In der Informationstheorie nennt man das die „minimale Hamming-Ähnlichkeit“). Die Eins-Bits stehen für gemeinsam verwendete Startgrößen, in denen grobe Fehler unentdeckt bleiben würden.

Ein statistischer Test auf grobe Fehler, ähnlich z. B. dem geodätischen Data Snooping, ist damit allerdings nicht verbunden. Dieser würde ein stochastisches Modell erfordern.

8 FORTSETZUNG DES BEISPIELS: UNVOLLSTÄNDIG ANGESCHLOSSENER POLYGONZUG

8.1 Rechenablauf

Startgrößen sind die 24 Größen in *Tab. 3* bzw. *Tab. 4*. Unter Umständen arbeitet man praktisch nicht mit Mittelwerten aus mehreren Sätzen und aus Gegenseiten, sondern mit ursprünglichen Messwerten. Dann entstehen wesentlich mehr Kombinationsmöglichkeiten und somit Rechenwege. Es ist aber fraglich, ob daraus immer ein Gewinn erwächst.

Zielgrößen können die Neupunktkoordinaten sein. Hilfsgrößen sind z. B. Orientierungswinkel auf den Standpunkten A, 1 und 2, Richtungswinkel (Azimute), Horizontalabstände und Höhenunter-

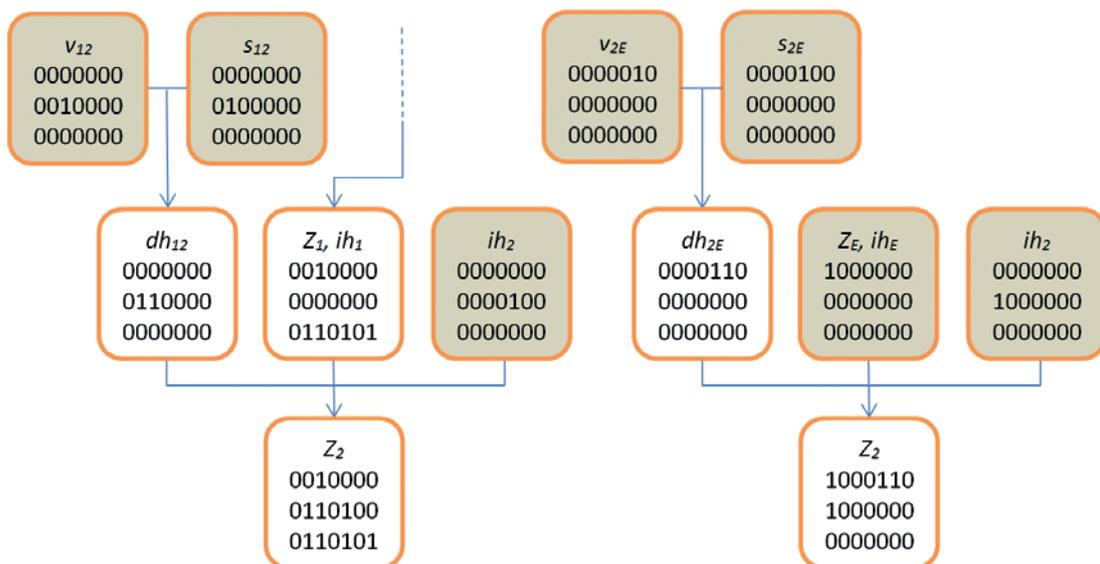


Abb. 9 | Rechenregeln und Rechenwege (Auszug) zum Beispiel „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“ ih = Instrumenten-/Stativhöhe, s = Raumdistanz (Schrägstrecke), v = Vertikalwinkel, Z = Höhe, dh = Höhendifferenz, darunter jeweils der zugehörige Index B als 21-stellige Binärzahl.

schiede auf allen Polygonseiten. Lagekoordinaten X und Y sowie Punkt- und Stativhöhen fassen wir immer symbolisch zu einer „Größe“ zusammen, weil diese in allen aktuell implementierten Rechenregeln entweder immer paarweise vorkommen oder gar nicht. Es verbleiben noch 21 Startgrößen. Damit können die Indizes B_i für Instanzen Werte bis $2^{21} - 1 = 2097151$ annehmen.

Die Liste von Rechenregeln umfasst z. B. die in *Abb. 9* dargestellten Regeln. Die Startinstanzen haben Zweierpotenzen 1, 2, 4, 8, ... als Index. Sie sind in Boxen mit grauem Untergrund dargestellt. Von Z_2 sind zwei unterschiedliche Instanzen entstanden. Wegen $001000001101000110101 \& \sim 10001101000000000000 > 0$ schließen sich diese Instanzen nicht aus. Und wegen $001000001101000110101 \& 10001101000000000000 = 0$ sind diese Instanzen sogar vollständig unabhängig.

Einige Rechenregeln liefern zweideutige Ergebnisse, z. B. im Rechenweg 7 aus *Tab. 4*. Hier wird der Punkt 2 durch Bogenschnitt berechnet. Die Entscheidung, welcher der beiden Schnittpunkte (diese müssten existieren) der gesuchte Punkt 2 ist, muss durch Vergleich mit anderen Instanzen der Koordinaten von Punkt 2 getroffen werden.

8.2 Simulationsrechnung

Wir definieren ein Zahlenbeispiel mit Soll-Koordinaten aus *Tab. 5*; diese Situation entspricht etwa der *Abb. 6*. Hieraus generieren wir Ist-Koordinaten und Messwerte durch Addition von unkorrelierten pseudonormal verteilten Koordinaten- und Messabweichungen mit Erwartungswert null und folgenden Standardabweichungen: Koordinaten und Stativhöhen: 10 mm, Raumdistanzen: 3 mm, Richtungen und Vertikalwinkel: 1 mgon.

Wir berechnen alle 39 möglichen Instanzen für die Lagekoordinaten von Punkt 2. In *Abb. 10a* erkennt man, dass die Punktwolke der Instanzen um den Sollpunkt ($X = 150$; $Y = 200$) streut. Die größten

Punkt	X	Y	Z
P	100	0	
A	100	100	100
1	150	150	110
2	150	200	120
E	100	250	130

Tab. 5 | Soll-Koordinaten für die Simulationsrechnung zum Beispiel „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“

Verfälschung: Instanzen von	ohne		$X_p := X_p + 0,1 \text{ m}$		$X_p := X_p + 0,3 \text{ m}$		$X_p := X_p + 1,0 \text{ m}$	
	X_2	Y_2	X_2	Y_2	X_2	Y_2	X_2	Y_2
Min	199,84	149,97	199,86	149,87	199,69	149,68	199,02	148,99
Max	200,13	150,24	200,18	150,29	200,28	150,39	200,63	150,72
Max – Min	0,28	0,27	0,31	0,42	0,59	0,71	1,60	1,72
Median	199,998	149,988	200,015	150,007	200,055	150,031	200,081	150,031
Wahrer Fehler	-0,002	-0,012	0,015	0,007	0,055	0,031	0,081	0,031

Tab. 6 | Ergebnisse der Simulationsrechnung

Abweichungen werden offenbar durch ungünstige Fehlerfortpflanzung in einigen Rechenwegen verursacht. Dabei bildet sich eine markante Struktur heraus, die dadurch entsteht, dass die Fehler sich entweder hauptsächlich in Zugrichtung oder quer dazu verstärken. Selbst wenn man entgegen unserer Empfehlung diese Instanzen mit berechnet, ist immer noch der Median aller Koordinaten ein korrektes Endergebnis. Die Abweichung zur Soll-Lösung beträgt 12 mm (*Tab. 6, Spalten 2 und 3*).

Wir addieren versuchsweise einen groben Fehler in der X -Koordinate von Punkt P von 0,1 m ($= 10 \sigma$) sowie 0,3 m ($= 30 \sigma$) und 1,0 m ($= 100 \sigma$). Das entspricht einem Richtungsfehler von A nach P von 0,06 gon bzw. 0,2 gon und 0,6 gon. Nun wiederholen wir jeweils die Rechnung. In *Abb. 10b–d* erkennt man, dass die Streuung um den Sollpunkt beträchtlich zunimmt. Man beachte den zu *Abb. 10a* auf ein Viertel verringerten Maßstab! Dabei bleibt die markante Struktur bestehen, denn erneut wirkt sich der grobe Fehler abhängig von der Zugrichtung aus. Die Spannweite (Max-Min) der Koordinaten wächst bis auf über 1 m an. Dennoch ist der Median aller Koordinaten ein zuverlässiges Endergebnis. Der wahre Fehler dieser Lösung beträgt weniger als 0,1 m.

Darüber hinaus erlaubt der Algorithmus auch, zurückzuverfolgen, welche Startgrößen in welche Lösung eingegangen sind. Die stark vom Median abweichenden Lösungen stammen aus den Rechenwegen 6 – 11 und 23 – 39 (*Tab. 4*). Mittels der UND-Verknüpfung aller Indizes B der abweichenden Lösungen erhält man alle Startgrößen, die in allen Rechenwegen benutzt wurden. Das sind hier die Koordinaten von P und die Richtungen auf A. Folglich sind ein oder mehrere grobe Fehler dort zu suchen.

9 IMPLEMENTIERUNG UND AUSBLICK

Das beschriebene Verfahren zeichnet sich durch Folgendes aus:

- Einfache Bedienbarkeit: Nur die Startgrößen müssen spezifiziert werden. Den Rest erledigt der Algorithmus.
- Universalität: Derselbe Algorithmus wertet z. B. Flächenteilungen, indirekte Messungen über Hilfsdreiecke, Geradenschnitte und genauso auch Geodätische Netze aus. Es werden nur jeweils andere Rechenregeln benutzt.
- Hoher Automatisierungsgrad: Der Algorithmus findet selbst heraus, was berechnet werden kann und wie. Ein Eingreifen des Nutzers in den Programmablauf ist nicht erforderlich.
- Mathematische Strenge: Wenn die Startgrößen eine eindeutige Berechnung der Zielgrößen nicht zulassen, werden alle möglichen Lösungen geliefert, sofern deren Anzahl endlich ist. Sind für

einzelne Größen unendlich viele Lösungen möglich, werden diese nicht berechnet.

- **Robustheit:** Sind grobe Fehler in den Startwerten enthalten und ist die Redundanz nicht zu gering, liefert das Verfahren immer noch ein brauchbares Endergebnis, z.B. in Form des Medians aller berechneten Instanzen.

Der interessierte Leser kann das Programm testen. Es ist als Webserver-Script auf www.in-dubio-pro-geo.de verfügbar (Tachymetrie > Universalrechner). Die Beispiele „Rechteck durch fünf Punkte“ und „Unvollständig angeschlossener Polygonzug“ (Abschnitte 3, 6 und 8) sind dort schon vorbereitet, dazu weitere Beispiele. In der beschriebenen Form lassen sich im Moment nur Probleme bearbeiten, die als zwei- oder dreidimensionale Tachymetermessaufgaben formuliert werden können. Daneben gibt es analog arbeitende

Rechenwerkzeuge für ebene und sphärische Dreiecke, ebene Vierecke und Kreisbögen.

Momentan ist die Gesamtzahl der Startgrößen (Festpunktkoordinaten und polare Messwerte) auf 126 begrenzt. Dabei zählen mehrfach gemessene Größen einschließlich Strecken und Richtungswinkel in Gegensichten nur einfach, weil diese vor Beginn der Hauptrechnung gemittelt werden. Zwei Lagekoordinaten X , Y eines Festpunkts zählen ebenso nur einfach.

Der Suchalgorithmus nach anwendbaren Rechenregeln kann bei umfangreichen Rechnungen von hoher Komplexität sein. Es handelt sich hier keineswegs um ein „schnelles“ Verfahren. Im Extremfall wird die Suche abgebrochen, sobald die dem Webserver-Script zur Verfügung stehende Laufzeit verbraucht ist (zurzeit 30 s). Es werden dann nur die bis dahin berechneten Ergebnisse präsentiert.

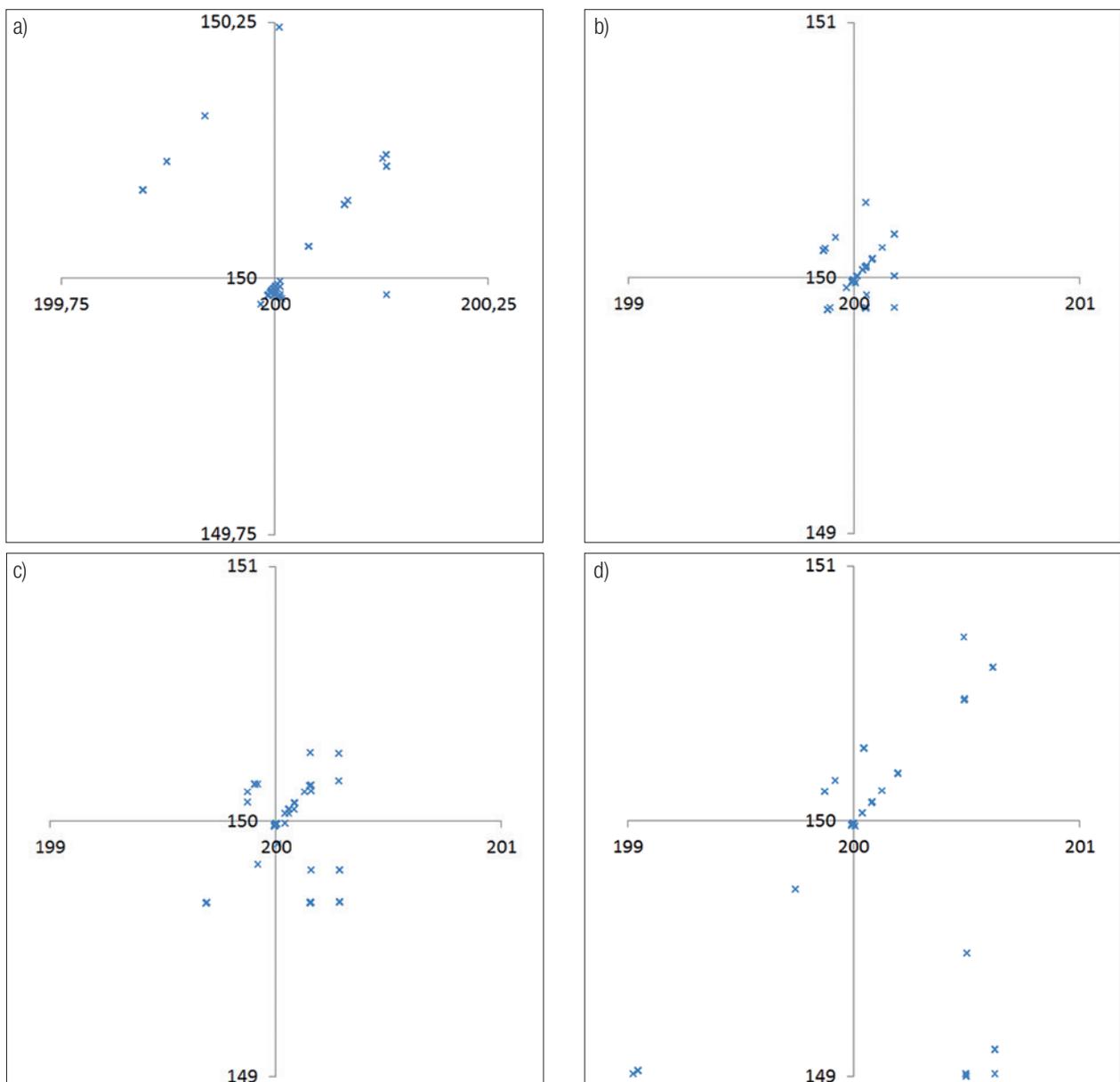


Abb. 10 | Punktwolke der Instanzen von Punkt 2 aus der Simulationsrechnung (Sollpunkt: $X = 150$ m; $Y = 200$ m), ohne groben Fehler (a) sowie mit grobem Fehler in X_P von 0,1 m (b), von 0,3 m (c) und von 1,0 m (d). Achtung: (a) hat einen um Faktor 4 größeren Maßstab als (b), (c) und (d).

Wir behaupten nicht, dass der Median als Endergebnis für jede Zielgröße generell den herkömmlichen robusten Auswertevarianten, etwa der M-Schätzung, überlegen wäre. Diese Festlegung kann problemlos durch eine andere ersetzt werden, z.B. durch den LMS. Detaillierte Aussagen hierzu müssten sich aus weiteren Untersuchungen ergeben.

LITERATUR

- Benning, W. (1978): Zur Auswertung geodätischer Messungen mit automatisierter Fehlersuche. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 85(1978)1, 16–26.
- Benning, W.; Ahrens; B. (1979): Konzept und Realisierung eines Systems zur automatischen Fehlerlokalisierung und automatischen Berechnung von Näherungskordinaten. In: Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungsdienst Nordrhein-Westfalen, 12(1979)2, 107–124.
- Benning, W.; Förstner; W. (1979): Datenbereinigung und automatische Berechnung von Näherungskordinaten in geodätischen Lagennetzen – das Programm NAEKO. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (zfv), 104(1979)2, 52–60.
- Biagi, L.; Caldera, S. (2013): An Efficient Leave One Block Out approach to identify outliers. In: Journal of Applied Geodesy, 7(2013)1, 11–19.
- Geisser, S. (1993): Predictive Inference. Chapman and Hall, New York.
- Jäger, R.; Müller, T.; Saler, H.; Schwäble, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfadens für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Wichmann, Heidelberg.
- Kaplan, M. (2005): Computeralgebra. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden. 2. Auflage. W. de Gruyter, Berlin/New York.
- Rousseeuw, P. J.; Leroy, A. M. (1987): Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley & Sons, New Jersey.
- Witte, B.; Schmidt, H. (2006): Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. 6. Auflage. Wichmann, Heidelberg.
- Vetter, M. (1992): Automatische Berechnung zweidimensionaler Näherungskordinaten. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 99(1992)6, 245–255.
- Vetter, M. (2007): Näherungskordinatenberechnung und robuste Fehlersuche. In: Derenbach, H.; Illner, M.; Schmidt, G.; Vetter, M.; Vielsack, S. (Hrsg.): Ausgleichsrechnung – Theorie und aktuelle Anwendungen aus der Vermessungspraxis. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik 2007, 4. Universitätsverlag, Karlsruhe.

Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann

HOCHSCHULE FÜR TECHNIK UND
WIRTSCHAFT DRESDEN
FAKULTÄT GEOINFORMATION

Friedrich-List-Platz 1 | 01069 Dresden
r.lehmann@htw-dresden.de



Manuskript eingereicht: 24.03.2014 | Im Peer-Review-Verfahren begutachtet

GNSS sicher mit wenigen Satelliten

GNSS UNLIMITED

Mit der neuesten Software von Leica ist die Anzahl erforderlicher Satelliten minimiert.

- 3 x GPS + 2 x Glonass
- 2 x GPS + 3 x Glonass
- 2 x GPS + 2 x Glonass + 2 BeiDou
- 4 x Glonass ohne GPS