Ausgleich mit einem Kreisring und einem Paar paralleler Geraden

Helmuth Späth

Gegeben seien Datenpunkte in der Ebene, die an einem Kreisring bzw. an einem Paar paralleler Geraden gemessen worden sind. Gesucht ist die beste Zuordnung der Punkte zu einem der beiden Kreise bzw. einer der beiden Geraden, wobei die Summe der Abstandsquadrate minimiert wird.

1 Problemstellung

Eine Standardaufgabe in der Koordinatenmesstechnik ist es, zu gegebenen Punkten zwei solche konzentrische Kreise zu finden, derart dass dieser Kreisring alle Punkte enthält und die Radiendifferenz der beiden Kreise minimal ist [2, 3]. Nimmt man aber an, dass alle Punkte Messfehler enthalten, so erscheint es adäquater, wenn man einen Kreisring so bestimmt, dass eine gewissen Abweichungsquadratsumme minimal wird; dabei muss natürlich mitbestimmt werden, welche Punkte welchem der beiden Kreise zugeordnet werden sollen.

Ein Kreisring ist durch einen Mittelpunkt $(a,\ b)$ und zwei Radien r und R mit $R > r$ gegeben. Die (für das Folgende zweckmäßigeren) parametrischen Darstellungen der beiden Kreise sind

$$x = a + r\cos\upsilon,\quad y = b + r\sin\upsilon,\quad 0 \le \upsilon < 2\pi \tag{1}$$

und

$$x = a + R\cos\upsilon,\quad y = b + R\sin\upsilon,\quad 0 \le \upsilon < 2\pi \tag{2}$$

Um den quadrierten Abstand eines beliebigen gegebenen Punktes $(x_j,\ y_j), j = 1, \ldots, m$ von jedem der beiden Kreise zu ermitteln, ist jeweils ein solcher Parameterwert $\upsilon_j = \upsilon$ zu finden, der für (1)

$$p_j^2(\upsilon) = \left((a + r\cos\upsilon - x_j)^2 + (b + r\sin\upsilon - y_j)^2\right) \tag{3}$$

und für (2)

$$q_j^2(\upsilon) = \left((a + R\cos\upsilon - x_j)^2 + (b + R\sin\upsilon - y_j)^2\right) \tag{4}$$

minimiert.

Differenziert man (3) bzw. (4) nach υ, setzt das Ergebnis gleich Null und kürzt mit r bzw. R, so ergibt sich als notwendige Bedingung für ein Minimum in beiden Fällen der Reihe nach

$$\sin\upsilon(a + r\cos\upsilon - x_i) - \cos\upsilon(b + r\sin\upsilon - y_i)$$

$$= 0 (bzw.\ R\ statt\ r),$$

$$tg\upsilon = \frac{y_j - b}{x_j - a},$$

$$\upsilon = arctg\left(\frac{y_j - b}{x_j - a}\right). \tag{5}$$

Die Bestimmungsgleichung (5) für υ, die weder von r noch von R abhängt, hat zwei Lösungen $\upsilon' = \upsilon$ und $\upsilon'' = \upsilon + \pi$, von denen dann für υ_j derjenige Wert zu nehmen ist, der den kleineren Wert für $p_j(\upsilon_j)$ bzw. $q_j(\upsilon_j)$ liefert. Dies entspricht der Tatsache, dass es von einem Punkt nicht auf einem Kreis genau zwei Lote auf den Kreis gibt, deren zwei Schnittpunkte mit dem Kreis zusammen mit dessen Mittelpunkt auf einer Geraden liegen.

Wollen wir ausgleichen, so müssen zwei solche Teilmengen C und D von $\{1,\ldots,m\}$ mit $C \cup D = \{1, \ldots, m\}$, $C \cap D = \phi$, $C \ne \phi$, $D \ne \phi$ gefunden werden, derart dass die Abstandsquadratsumme der C zugeordneten Punkte vom kleinen Kreis zuzüglich der Abstandsquadratsumme der D zugeordneten Punkte zum großen Kreis minimal wird. Dies entspricht der zu minimierenden Zielfunktion

$$V(C,\ D,\ a,\ b,\ r,\ R) = \sum_{j\in C} p_j^2(\upsilon_j) + \sum_{j\in D} q_j^2(\upsilon_j). \tag{6}$$

Die Unbekannten sind also reellen Größen $a,\ b,\ r$ und R und die beiden Teilmengen C und D. Es handelt sich um ein gemischt stetiges und kombinatorisches Optimierungsproblem.

2 Ein Algorithmus für den Kreisring

Wir schlagen folgendes zweistufiges Iterationsverfahren, bei dem abwechselnd $a,\ b,\ r,\ R$ und $C,\ D$ verbessert werden, zur näherungsweisen Minimierung von (6) vor:

Schritt 1:
Startwertbestimmung (ein Vorschlag).
Setze den Iterationszähler auf $t = 0$ und $V = \infty$. Für den Mittelpunkt des anfänglichen Kreisrings nehmen wir den Schwerpunkt der gegebenen Punkte, d.h. wir setzen

$$a^{(0)} = \bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_j,\ \ b^{(0)} = \bar{y} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_i$$

und berechnen hiermit das minimale und das maximale Abstandsquadrat

$$w = \min_j\left((x_j - a^{(0)})^2 + (y_j - b^{(0)})^2\right), (j = 1, \ldots, m)$$

$$W = \max_j\left((x_j - a^{(0)})^2 + (y_j - b^{(0)})^2\right)$$

von $(a^{(0)},\ b^{(0)})$ zu allen Punkten $j = 1, \ldots, m$. Würde man nun $r^{(0)} = \sqrt{w}$ und $R^{(0)} = \sqrt{W}$ nehmen, so befänden sich *alle* Punkte zwischen innerem und äußerem Kreis. Da aber im Endergebnis i.a. Punkte innerhalb *und* außerhalb bei jedem der beiden Kreise liegen (sollen), reduzieren wir W und vergrößern w, indem wir

$$R^{(0)} = f\sqrt{W},\ \ r^{(0)} = \frac{1}{f}\sqrt{w} \text{ mit } f < 1$$

setzen und dabei f zusätzlich so wählen, dass $R^{(0)} > r^{(0)}$ gilt. Somit sind zwei anfängliche konzentrische Kreise definiert.

Schritt 2:
Jetzt werden mit $a = a^{(t)}, b = b^{(t)}, r = r^{(t)}, R = R^{(t)}$ für υ' und υ'' die insgesamt vier Abstandsquadrate (3) und (4) berechnet, das kleinste davon herausgesucht, der j-te Punkt dem entsprechenden Kreis zugeordnet, $\upsilon_j = \upsilon'$ bzw. $\upsilon_j = \upsilon''$ gesetzt und V neu berechnet. V wird dadurch nicht vergrößert. Die Mengen $C = C^{(t)}$ und $D = D^{(t)}$ und ihre Elementanzahlen $|C|$ und $|D|$ sind im t-ten Schritt bestimmt.

Schritt 3:
Wir minimieren bei festgehaltenem $C = C^{(t)}$, $D = D^{(t)}$ die Zielfunktion

$$V(C, D, a, b, r, R)$$

$$= \sum_{j\in C}((a + r\cos\upsilon_j - x_j)^2 + (b + r\sin\upsilon_j - y_j)^2)$$

$$+ \sum_{j\in D}((a + R\cos\upsilon_j - x_j)^2 + (b + R\sin\upsilon_j - y_j)^2) \qquad (7)$$

bezüglich a, b, r, R und setzen $a^{(t+1)} = a$, $b^{(t+1)} = b$, $r^{(t+1)} = r$ und $R^{(t+1)} = R$. V wird dadurch gegenüber dem alten Wert nicht vergrößert.
Die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial b} = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial R} = 0 \qquad (8)$$

liefern folgendes lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und den vier Unbekannten a, b, r und R:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & \sum\limits_{j\in C}\cos\upsilon_j & \sum\limits_{j\in D}\cos\upsilon_j \\ 0 & m & \sum\limits_{j\in C}\sin\upsilon_j & \sum\limits_{j\in D}\sin\upsilon_j \\ \sum\limits_{j\in C}\cos\upsilon_j & \sum\limits_{j\in C}\sin\upsilon_j & |C| & 0 \\ \sum\limits_{j\in D}\cos\upsilon_j & \sum\limits_{j\in D}\sin\upsilon_j & 0 & |D| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ r \\ R \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m\bar{x} \\ m\bar{y} \\ \sum\limits_{j\in C}(x_j\cos\upsilon_j + y_j\sin\upsilon_j) \\ \sum\limits_{j\in D}(x_j\cos\upsilon_j + y_j\sin\upsilon_j) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Die Koeefizientenmatrix ist symmetrisch. Falls sie nichtsingulär ist, gibt es eine eindeutige Lösung, und es kann fortgefahren werden.

Schritt 4:
Wir setzen $t := t + 1$ und kehren zurück nach Schritt 2, falls noch eine Verkleinerung von V stattgefunden hat oder falls t eine vorzugebende obere Schranke nicht überschritten hat.

3 Ein Beispiel für den Kreisring

Im Vermessungswesen werden Datenpunkte i.a. in großer Anzahl und sehr genau gemessen. Solche Punkte sind zur Demonstration des Verfahrens nicht geeignet. Daher benutzten wir nur wenige ($m = 12$) Punkte.

x	0	2	3	5	−2	−3	5	0	−1	−3	−1	−1
y	6	−1	3	−2	−1	4	4	5	−3	1	3	−1

Diese sind in Fig. 1 eingezeichnet zusammen mit zwei verschiedenen Anfangslösungen für $f = .75$ (gestrichelt) und $f = 1$ (ausgezogen). In beiden Fällen ist $a^{(0)} = .333$, $b^{(0)} = 1.5$; der erste Kreisring hat die Radien $r^{(0)} = 2.676$, $R^{(0)} = 4.375$ und der zweite $r^{(0)} = 2.007$, $R^{(0)} = 5.833$. Für beide Startlösungen wurden nach jeweils 15 Iterationen dieselben Ergebnisse $a = .724$, $b = 1.297$, $r = 3.120$, $R = 4.890$, $C = \{2, 3, 5, 8, 10, 11, 12\}$, $D = \{1, 4, 6, 7, 9\}$, $V = 2.325$ erhalten, die in Fig. 2 veranschaulicht sind. Bei diesem Beispiel haben sich C und D nach Schritt 1 nicht mehr geändert, was auf die gute Qualität der Startwertbestimmung schließen

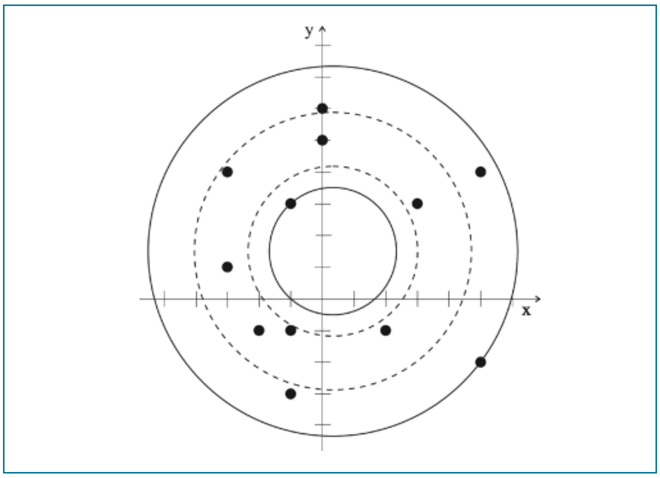

Fig. 1

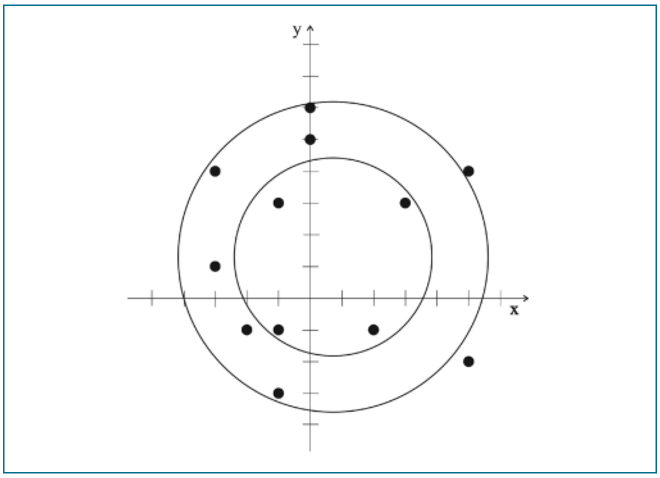

Fig. 2

lässt. Beispiele, wo sich C und D erst nach sehr wenigen Iterationen nicht mehr ändern, lassen sich angeben.

4 Problemstellung für zwei parallele Geraden

Neben dem Kreis ist eine Gerade, die ein entarteter Kegelschnitt ist, der einzige weitere Kegelschnitt, zu dem es einen konzentrischen zweiten gibt [4]; es ist eine dazu parallele Gerade. Diesen Fall wollen wir jetzt zusätzlich behandeln. Sieht man von dem sehr speziellen Fall zweier paralleler Geraden zu y-Achse ab, so lautet eine parametrische Darstellung von zwei parallelen Geraden

$$x = \upsilon,\ y = a\upsilon + b,\ -\infty \le \upsilon \le \infty \tag{10}$$

und

$$x = \upsilon,\ y = a\upsilon + B,\ B > b. \tag{11}$$

Analog zu (3) und (4) sind die orthogonalen Abstandsquadrate von einem Punkt $(x_j,\ y_j)$ zu den beiden Geraden durch

$$p_j^2(\upsilon) = (\upsilon - x_j)^2 + (a\upsilon + b - y_j)^2 \tag{12}$$

bzw.

$$q_j^2(\upsilon) = (\upsilon - x_j)^2 + (a\upsilon + B - y_j)^2 \tag{13}$$

gegeben. Minimal werden diese für

$$\upsilon = \upsilon_j = \frac{x_j + a(y_j - b)}{1 + a^2} \text{ bzw. } \upsilon = \upsilon_j = \frac{x_j + a(y_j - B)}{1 + a^2}. \tag{14}$$

Als Zielfunktion hat man dann hier

$$V(C,\ D,\ a,\ b,\ B) = \sum_{j\in C} p_j^2(\upsilon_j) + \sum_{j\in D} q_j^2(\upsilon_j) \tag{15}$$

mit den Unbekannten reellen Größen a, b und B und den beiden unbekannten Teilmengen C und D.

5 Ein Algorithmus für zwei parallele Gerade

Der Algorithmus für den Kreisring aus Abschnitt 2 wird geeignet modifiziert.

Schritt 1: Startwertbestimmung (ein Vorschlag).
Setze $t = 0$ und $V = \infty$. Wir legen *eine* ausgleichende Gerade $y = cx + d$ durch *alle* Punkte derart, dass die Summe der orthogonalen Abstandsquadrate minimal wird (siehe z.B. [1]). Dies ergibt eine Schätzung $a^{(0)} = c$. Um die Achsenabschnitte b und B der beiden gesuchten Geraden anzunähern, suchen wir einen Punkt $(x_k,\ y_k)$ mit dem größten Abstand zu $y = cx + d$ und setzen $b^{(0)} = d - f|y_k|$, $B^{(0)} = d + f|y_k|$ mit einem zu wählenden Faktor $f > 0$. Dahinter steht die Annahme, dass der Achsenabschnitt d zwischen b und B liegen dürfte.

Schritt 2:
Unter Verwendung der momentanen Werte $a = a^{(t)}$, $b = b^{(t)}$ und $B = B^{(t)}$ werden nach (14) für $j = 1, \ldots, m$ die Werte

$$\upsilon' = \frac{x_j + a(y_j - b)}{1 + a^2} \text{ und } \upsilon'' = \frac{x_j + a(y_j - B)}{1 + a^2}$$

berechnet und in (12) bzw. (13) eingesetzt; für $p_j(\upsilon') < q_j(\upsilon'')$ wird $\upsilon_j = \upsilon'$ gesetzt und f zu C hinzugefügt und andernfalls $\upsilon_j = \upsilon''$ gesetzt und j zu D hinzugefügt. Gleichzeitig werden $|C|$ und $|D|$ und V aufdatiert. Am Ende wird V dadurch nicht größer. $C^{(t)} = C$ und $D^{(t)} = D$ sind bestimmt.

Schritt 3:
Jetzt sind a, b und B neu zu berechnen, indem mit den gefundenen Werten υ_j $(j = 1, \ldots, m)$ die Zielfunktion

$$V(C,\ D,\ a,\ b,\ B) = \sum_{j\in C}\left((\upsilon_j - x_j)^2 + (a\upsilon_j + b + y_j)^2\right)$$

$$+ \sum_{j\in D}\left((\upsilon_j - x_j)^2 + (a\upsilon_j + B - y_j)^2\right) \tag{16}$$

minimiert wird. Die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial b} = \frac{\partial V}{\partial B} = 0$$

liefern drei lineare Gleichungen für die drei Unbekannten $a,\ b,\ B$:

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \upsilon_j^2 & \sum_{j\in C} \upsilon_j & \sum_{j\in D} \upsilon_j \\ \sum_{j\in C} \upsilon_j & |C| & 0 \\ \sum_{j\in D} \upsilon_j & 0 & |D| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \upsilon_j y_j \\ \sum_{j\in C} y_i \\ \sum_{j\in D} y_i \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Nach dessen Lösung setzen wir $a^{(t+1)} = a$, $b^{(t+1)}) = b$, $B^{(t+1)} = B$.

Schritt 4:
wir setzen $t := t + 1$ und kehren zurück nach Schritt 2, falls noch eine Verkleinerung von V stattgefunden hat oder falls t eine vorzugebende obere Schranke nicht überschritten hat.

6 Ein Beispiel für ein Paar paralleler Geraden

Diesmal benutzen wir wieder $m = 12$, aber andere Datenpunkte als in Abschnitt 3:

x	5	0	2	3	6	7	−2	0	1	4	5	2
y	3	2	1	3	3	6	3	4	5	6	8	7

Die Punkte sind zusammen mit zwei verschiedenen Anfangslösungen für $f = .25$ (ausgezogen) und $f = .5$ (gestrichelt) in Fig. 3 gezeichnet. In beiden Fällen war $a^{(0)} = .519$; im ersten Fall war $b^{(0)} = 1.072$, $B^{(0)} = 4.572$ und im zweiten Fall war $b^{(0)} = -.678$, $B^{(0)} = 6.322$. Für beide Startlösungen wurde nach 7 Iterationen dasselbe Ergebnis $a = .635$, $b = .566$, $B = 4.442$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, $V = 6.739$ gefunden (ebenso für $f = .75$ und $f = 1$), das in Fig. 4 visualisiert ist. Es ist uns nicht gelungen, ein Beispiel zu finden, bei dem sich C und D nach Schritt 1 noch ändern, was wie in Abschnitt 3 auf die gute Qualität der Startwerte schließen lässt.

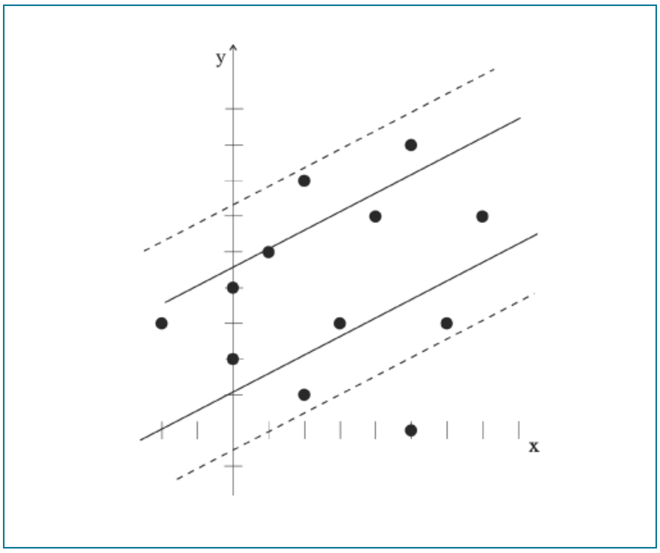

Fig. 3

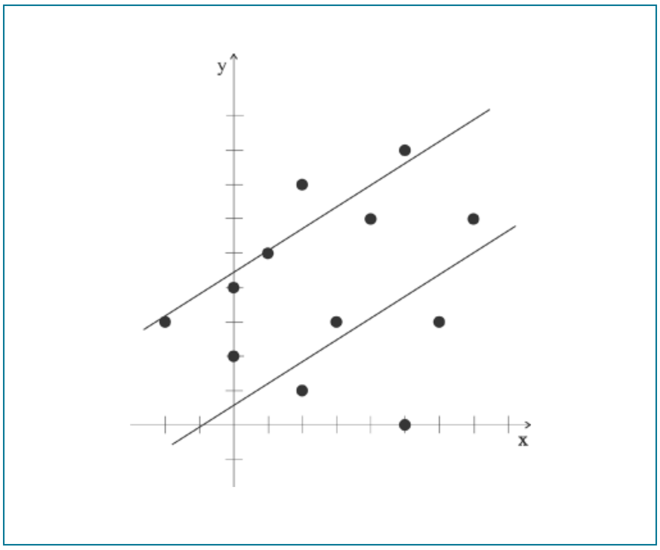

Fig. 4

Literatur

[1] Späth, H.: Algorithmen für elementare Ausgleichsmodelle, R. Oldenbourg-Verlag, München 1973.
[2] Späth, H.: Minimum Zone Kreis und Kugel mittels sequentieller linearer Optimierung, AVN 106, 292–294 (1999).
[3] Späth, H.; Watson, G. A.: Smallest circumscribed, largest inscribed, and minimum zone circle of sphere via sequential linear programming. Math. Comm. 6, 29–38 (2001).
[4] Späth, H.: Konzentrische Kegelschnitte (außer Kreise) gibt es nicht. AVN 107, 258–260 (2000).

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Helmuth Späth, Fakultät V, Institut für Mathematik, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Postfach 25 03, D-26111 Oldenburg, Germany. e-mail: spaeth@mathematik.uni-oldenburg.de

Zusammenfassung

Gegeben seien Datenpunkte in der Ebene, die an einem Kreisring bzw. an einem Paar paralleler Geraden gemessen worden sind. Es wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, das einerseits die beste Zuordnung der Punkte zu einem der beiden Kreise bzw. einer der beiden Geraden anstrebt und andererseits jeweils die Summe der beiden entsprechenden (orthogonalen) Abstandsquadratsummen minimiert. Numerische Beispiele für dieses zweistufige Iterationsverfahren werden angegeben.