

Konzept zur Realisierung eines Prototypen zur sachgerechten Auswertung von polaren Beobachtungen

Concept of a Realisation of a Prototype for Adequate Evaluation of Polar Measurements

Michael Lösler, Cornelia Eschelbach

Um das hohe Potenzial von gegenwertigen Tachymetern und Lasertrackern in der Messtechnik vollständig zu nutzen, sind eine sachgerechte Auswertung der Messdaten und eine transparente Bestimmung der Messunsicherheiten unumgänglich. Insbesondere die interdisziplinäre Zusammenarbeit erfordert nicht nur eine einheitliche Terminologie sondern auch transparente *Genauigkeitsmaße*. Mit dem Leitfaden zur Ermittlung von Messunsicherheiten (GUM) wurde eine international und fachübergreifend anerkannte Strategie erarbeitet, Messunsicherheiten zu bestimmen und anzugeben. Ungeachtet des Leitfadens fehlen dem Messtechniker vorrangig softwareseitige Umsetzungen, die ihm bei seiner täglichen Arbeit und der Anwendung des GUM unterstützen. In diesem Beitrag wird zunächst für Polarmesssysteme, insbesondere Lasertracker, ein umfassendes Konzept zur Bestimmung des Unsicherheitsbudgets beschrieben, welches neben zufällig streuenden Abweichungen auch systematische Einflüsse berücksichtigt. Im zweiten Teil wird eine Auswertestrategie auf Basis verketteter Quaternionentransformationen vorgeschlagen, welches dieses Konzept zur Bildung des stochastischen Modells innerhalb der Ausgleichung berücksichtigt.

Schlüsselwörter: Bündelausgleichung, GUM, Messunsicherheit, Quaternion, Transformation

Appropriate analysis and comprehensive determination of measuring uncertainties are essential components for tapping the full potential of current total station and laser tracker measurements. Especially interdisciplinary cooperation necessitates not only the same terminology but also transparent error propagation. The Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) was established to provide strategies for error propagation in a mutual consent. Unfortunately software applications, which follow GUM, are still rare for the daily use. This paper is divided in two sections; firstly, a compensation model for polar measurement systems, in particular laser tracker systems, is derived, which regards random error and systematic error propagation. Secondly, a bundle adjustment algorithm based on quaternion-transformations is described. This bundle adjustment includes the compensation model within the analysis process.

Keywords: Bundle adjustment, GUM, uncertainty in measurement, quaternion, transformation

1 BESTIMMUNG VON INSTRUMENTENPARAMETERN UND DEREN UNSICHERHEITEN

Bei jedem Messprozess treten unweigerlich zufällige und systematisch wirkende Abweichungen auf, die die Qualität des erhaltenen

Messwertes und dessen Unsicherheit beeinflussen. Eine erste Abschätzung über die zu erwartenden Messunsicherheiten eines Instrumentes liefern die Hersteller durch die Spezifikation. Die Art und Weise der dort gemachten Angabe ist jedoch meist uneinheitlich,

sodass es ohne detailliertere Zusatzinformationen zu Fehlinterpretationen kommen kann. Erst nachdem Angaben wie bspw. Standardabweichung, Unsicherheit, Toleranz oder MPE (Maximum Permissible Exposure, auch Maximum Permissible Error) normiert sind, ist ein direkter Vergleich möglich. Einen umfassenden Überblick über die aktuellen konkurrierenden Genauigkeitsmaße gibt /Hennes 2007/.

Ungeachtet der Art der Genauigkeitsangabe werden bei gegenwärtigen Instrumenten Unzulänglichkeiten von Hardwareeigenschaften wie bspw. Exzentrizitäten oder Achsschiefen rechnerisch über geeignete Korrekturmodelle kompensiert. Einige der systematisch wirkenden Einflüsse wie bspw. Kippachs- oder Zielachsabweichungen lassen sich in einfachen Feldverfahren ermitteln und direkt im Instrument als Korrekturparameter hinterlegen. Andere Größen wie z.B. die Frequenzabweichung können hingegen nur im Labor ermittelt werden. Die Güte der bestimmten Kalibrierungsparameter kann u.a. aus Wiederholungsmessungen abgeleitet werden. Durch die Berücksichtigung dieser gerätespezifischen Parameter werden jedoch Korrelationen zwischen den Messwerten hervorgerufen. Unzureichende Korrekturwerte wirken systematisch und verfälschen die ausgegebenen Messwerte in ähnlicher oder gar gleicher Weise. Die Messunsicherheit einer 3D-Koordinate hängt somit nicht allein von den unabhängig zu betrachtenden Genauigkeiten der einzelnen Beobachtungstypen ab, sondern ist auch maßgeblich von der Qualität der Kalibrierungsparameter beeinflusst.

Diese Herangehensweise, alle in einem Messprozess bekannten und unbekanntem Einflussparameter zu identifizieren und durch Quantifizierung der zugehörigen Unsicherheit zu berücksichtigen, ist im Leitfaden zur Ermittlung von Messunsicherheiten (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement 1995; GUM) dargelegt. Seit 1995 (bzw. seit 1999 in der erweiterten Fassung) gibt es mit diesem Leitfaden eine weitgehend internationale und branchenübergreifende Anleitung, wie die Unsicherheit eines in einem Prozess ermittelten Messwertes anzugeben ist. Insbesondere auf die Arbeiten von /Heister 2001/, /Heister 2002/, /Heister 2010/, /Kutterer, Schön 2004/, /Sommer, Siebert 2004/ und /Hennes, Heister 2007/ zur sachgerechten Unsicherheitsbudgetierung nach GUM sei an dieser Stelle verwiesen.

Der Leitfaden sieht eine Bestimmung der kombinierten Standardunsicherheit vor, die aus Standardunsicherheiten der Ermittlungsmethoden A und B resultieren. Der Teil A wird dabei aus statistischen Analysen bspw. von Beobachtungsreihen ermittelt und entspricht im weitesten Sinn dem klassischen Verfahren der Varianzfortpflanzung bzw. der Ausgleichsrechnung. Mit Teil B werden alle Unsicherheiten zusammengefasst, die nicht durch statistische Analysen abgeleitet werden können. Diese zusätzlichen Informationen der Ermittlungsmethode B ergänzen somit die Unvollständigkeit der im Teil A berücksichtigten Einflüsse und führen zu realistischeren Abschätzungen der Messunsicherheiten. Insbesondere die Abschätzungen für Teil B erfordern detaillierte Kenntnisse über den jeweiligen Messprozess, sodass diese stets individuell und problembezogen zu erfolgen hat. Die Ermittlungsmethode A hingegen umfasst die Budgetierung aller Unsicherheiten, die sich aus quantifizierbaren Abweichungen ergeben. Insbesondere zählen hierzu ermittelte Unsicherheiten von Korrektur- und Kalibrierwerten, die sich ihrem funktionalen Zusammenhang entsprechend beobachtungsübergreifend auswirken können. Grundsätzlich ist zwischen bekannten sys-

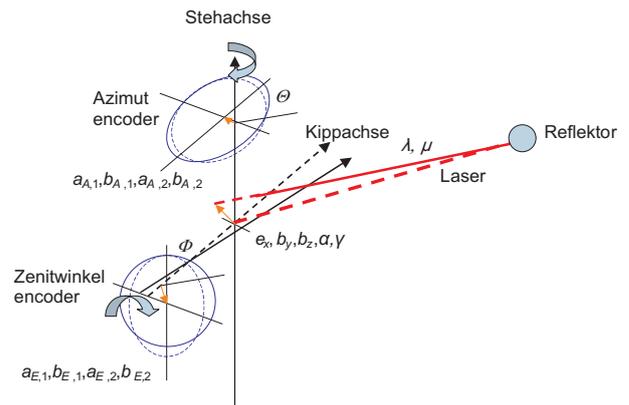


Abb. 1 | Geometrisches Modell eines Lasertrackers mit Kalibrierungsparametern /Hughes u.a. 2011/

tematischen und unquantifizierbaren systematischen Messabweichungen zu unterscheiden (vgl. DIN 1319-1). Während nicht-bestimmbare Abweichungen im Teil B zu modellieren sind, erfolgt die Berücksichtigung von bekannten systematischen Abweichungen entsprechend ihres funktionalen Zusammenhangs als Korrektur, deren Unsicherheit je nach Eigenschaft als Typ A oder B mitgeführt werden muss. In diesem Beitrag werden nur Einflüsse betrachtet, die quantifizierbar und somit im Teil A zu berücksichtigen sind.

/Hughes u.a. 2011/ leiten für Lasertracker, deren Streckenmess-einheit im Instrumentenkopf integriert ist, ein Kalibrierungsmodell ab, mit dem Instrumentenparameter und deren Standardabweichungen vom Anwender durch ein Prüfverfahren selbstständig ermittelt werden können. Bei diesem Modell handelt es sich um eine Modifikation des Kompensationsansatzes von /Muralikrishnan u.a. 2009/, bei dem zunächst ein ideales Lasertrackermodell zugrunde gelegt wird.

- Die beiden Rotationsachsen, im Weiteren als Stehachse und Kippachse bezeichnet, schneiden sich rechtwinklig in einem Punkt, der mit dem Ursprung des Streckenmessteils zusammenfällt.
- Der Messstrahl des Streckenmessteils fällt zusammen mit der Zielachse und steht wiederum rechtwinklig auf der Kippachse des Instruments.
- Der Normalenvektor der Teilkreisebene fällt mit der jeweiligen mechanischen Rotationsachse zusammen.
- Die Teilkreise weisen keine Exzentrizität auf, sodass sich der Durchstoßpunkt der Rotationsachse exakt im Zentrum des zugehörigen Teilkreises befindet.

Die Abweichungen von dieser Idealvorstellung sind in *Abb. 1* dargestellt und lassen sich durch 16 Modellparameter beschreiben, deren Werte individuell für jeden Lasertracker zu bestimmen sind (*Tab. 1*).

Die korrigierte Strecke \hat{d} ergibt sich hierbei aus einem additiven und einem streckenabhängigen Anteil. Für die Korrektur der Richtungswinkel $\hat{\Theta}$ und Zenitwinkel $\hat{\Phi}$ werden die Encoderabweichungen durch eine Fourier-Reihe approximiert, vgl. /Muralikrishnan u.a. 2010/. /Hughes u.a. 2011/ schlagen hierbei einen Entwicklungsgrad von $n_q = 2$ vor.

$$\hat{d} = (1 + \mu)d + \lambda \quad (1)$$

Parameter	Beschreibung
λ	Instrumentenseitige Additionskonstante
μ	Maßstab
e_x	Offset zwischen Stehachse und Kippachse
b_y	Laseroffset in y-Richtung
b_z	Laseroffset in z-Richtung
α	Kippachsabweichung
γ	Zielachsabweichung
$a_{A,1}$	Azimutencoderabweichung (Fourierkoeffizient erster Ordnung)
$b_{A,1}$	Azimutencoderabweichung (Fourierkoeffizient erster Ordnung)
$a_{A,2}$	Azimutencoderabweichung (Fourierkoeffizient zweiter Ordnung)
$b_{A,2}$	Azimutencoderabweichung (Fourierkoeffizient zweiter Ordnung)
$a_{E,0}$	Höhenindexabweichung
$a_{E,1}$	Zenitwinkelencoderabweichung (Fourierkoeffizient erster Ordnung)
$b_{E,1}$	Zenitwinkelencoderabweichung (Fourierkoeffizient erster Ordnung)
$a_{E,2}$	Zenitwinkelencoderabweichung (Fourierkoeffizient zweiter Ordnung)
$b_{E,2}$	Zenitwinkelencoderabweichung (Fourierkoeffizient zweiter Ordnung)

Tab. 1 | Parameter der Kalibrierung eines Lasertrackers nach /Hughes et al. 2011/

$$\hat{\Theta} = \Theta + \sum_{q=1}^{n_q} [a_{A,q} \cos q\Theta + b_{A,q} \sin q\Theta] \quad (2)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + a_{E,0} + \sum_{q=1}^{n_q} [a_{E,q} \cos q\Phi + b_{E,q} \sin q\Phi] \quad (3)$$

Da jeder Messvorgang aber auch weiterhin als stochastischer Prozess aufzufassen ist, lässt sich mit den genannten Instrumentenabweichungen nicht das komplette Unsicherheitsbudget einer Messung beschreiben. Neben den systematisch wirkenden Instrumentenparametern sind daher weitere stochastisch unabhängige Einflüsse zu berücksichtigen. Diese punktbezogenen Einflüsse ergeben sich bspw. aus der sich ändernden Meteorologie zwischen den Messungen oder durch die Verwendung unterschiedlicher Reflektoren. Die individuellen Einflussgrößen rufen im statischen Betrieb demnach keine zusätzlichen Korrelationen zwischen den Beobachtungen hervor und können für alle Beobachtungstypen durch einen konstanten Anteil τ und einen entfernungsabhängigen Anteil ξ parametrisiert werden. Das endgültige funktionale Modell der Beobachtungsgrößen ergibt sich zu:

$$\hat{d} = (1 + \mu + \xi_d)d + \lambda + \tau_d, \quad (4)$$

$$\hat{\Theta} = \Theta + \tau_\Theta + \frac{\xi_\Theta}{d} \varrho + \sum_{q=1}^{n_q} [a_{A,q} \cos q\Theta + b_{A,q} \sin q\Theta], \quad (5)$$

$$\hat{\Phi} = \Phi + \tau_\Phi + \frac{\xi_\Phi}{d} \varrho + a_{E,0} + \sum_{q=1}^{n_q} [a_{E,q} \cos q\Phi + b_{E,q} \sin q\Phi]. \quad (6)$$

Die Umrechnung der polaren Beobachtungsgrößen in kartesische Koordinaten erfolgt unter Berücksichtigung der Exzentrizität e_x zwischen Steh- und Kippachse, den Offsets des Distanzmessers b_y und b_z , der Kippachsabweichung α und der Zielachsabweichung γ . Die kartesischen Koordinaten \mathbf{p} ergeben sich in vektorieller Form zu

$$\mathbf{p}(\hat{\Theta}, \hat{\Phi}, \hat{d}) = \mathbf{p}_0 + \mathbf{b}(\hat{\Theta}, \hat{\Phi}) + \hat{d}\mathbf{n}(\hat{\Theta}, \hat{\Phi}). \quad (7)$$

Der Vektor \mathbf{p}_0 beschreibt die lokale Koordinate des Instrumentenstandpunktes, der Vektor \mathbf{p} berücksichtigt die lateral wirkenden Exzentrizitäten e_x , b_y und b_z , während im Vektor \mathbf{n} die Winkel α und γ kompensiert werden:

$$\mathbf{b}(\hat{\Theta}, \hat{\Phi}) = \mathbf{R}_\Theta^z \begin{bmatrix} e_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{R}_\Theta^z \mathbf{R}_\alpha^x \mathbf{R}_{\hat{\Phi}-\frac{\pi}{2}}^y \mathbf{R}_{-\alpha}^x \begin{bmatrix} -e_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{n}(\hat{\Theta}, \hat{\Phi}) = \mathbf{R}_\Theta^z \mathbf{R}_\alpha^x \mathbf{R}_{\hat{\Phi}-\frac{\pi}{2}}^y \mathbf{R}_{-\alpha}^x \mathbf{R}_\gamma^z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{R} eine Rotationsmatrix, die eine Drehung um die im Supindex angegebene Achse um den im Subindex angegebenen Winkel beschreibt.

/Hughes u.a. 2011/ schlagen zur Bestimmung der 16 Modellparameter (Tab. 1) und deren Standardabweichungen ein Messfeld von 15 schematisch im Raum verteilten Messpunkten vor. Von vier Standpunkten aus mit dem Lasertracker gemessen, liefern die Koordinaten die nötige Überbestimmung, um in einer Ausgleichsrechnung nach dem Gauß-Helmert-Modell über Gleichung (7) die Modellparameter und deren Unsicherheit zu berechnen.

Die Anwendung des Varianz-Kovarianz-Fortpflanzungsgesetzes auf Gleichung (7) liefert eine Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{C} , die die Standardunsicherheiten $\mathbf{u}_{\mathbf{p}_i}$ der gemessenen Punkte \mathbf{p}_i in Abhängigkeit der Unsicherheiten der instrumenten- und punktseitigen Modellparameter enthält. Während die punktseitigen Parameter lediglich Korrelationen zwischen den Koordinatenkomponenten eines Punktes hervorrufen, führen die instrumentenseitigen Kalibrierwerte auch zu Korrelationen zwischen den Punkten. Gesteht man darüber hinaus auch dem Standpunkt eine Unsicherheit $\mathbf{u}_{\mathbf{p}_0}$ in allen drei Raumrichtungen zu, die zum Beispiel durch Vibrationen oder thermische Effekte im Umfeld des Instrumentes hervorgerufen werden, so wird das stochastische Modell durch insgesamt 25 Einflussgrößen parametrisiert.

2 QUATERNIONEN-BASIERTER ALGORITHMUS ZUR VERKETTUNG VON INSTRUMENTENSTANDPUNKTEN

Insbesondere beim Zusammenführen von Lasertracker-Daten aber auch beim Verknüpfen von Tachymetermessungen, bei denen ein einheitlicher Messhorizont nicht gewährleistet werden kann, hat sich die verkettete Koordinatentransformation – häufig auch als Bündelausgleichung bezeichnet – als Alternative zur direkten Auswertung der polaren Beobachtungen etabliert. Die Auswertung erfolgt hierbei in zwei Schritten. Zunächst werden lokale Subsysteme für jeden Standpunkt gebildet und aus den polaren Beobachtungstriplets kartesische Koordinaten bestimmt. In einem zweiten Schritt werden diese Subsysteme ineinander transformiert und so in ein einheitliches globales Zielsystem überführt. Das globale Datum wird dabei aus gegebenen homologen Punktpaaren definiert. Zur Verkettung der einzelnen Subsysteme stehen neben den homologen Passpunkten alle Punkte zur Verfügung, die mehrfach bestimmt und somit in verschiedenen Subsystemen vorhanden sind.

Bei einer algorithmischen Umsetzung ist man grundsätzlich bestrebt, ein funktionales Modell mit positiven Konvergenzeigenschaften zu formulieren. Insbesondere das Beschreiben der räumlichen Drehungen für die hier relevante 7-Parameter Helmert-Transformation erfordert Alternativen zu den nicht-linearen Rotationsmatrizen mit Eulerwinkeln. Zwar existiert für infinitesimale Drehwinkel ein lineares Modell, jedoch sind die mit diesem Modell einhergehenden Einschränkungen impraktikabel. Eine alternative Möglichkeit ist die Parametrierung der Drehung durch eine Quaternion /Kuipers 1999/. Zum einen existieren keine Einschränkungen bezüglich der Größe der Drehwinkel und zum anderen sind die hierbei auftretenden Gleichungen bilinear, sodass positive Konvergenzeigenschaften vorausgesetzt werden können /Gielsdorf 2007/, /Luhmann 2010/, /Lösler 2011/. Im nachfolgenden soll daher ausschließlich diese Darstellung näher betrachtet werden, einen Überblick über weitere Alternativen liefern /Knickmeyer, Nitschke 1994/.

Die allgemeine Transformationsgleichung, um die beiden Systeme \mathbf{x}^I und \mathbf{x}^{II} ineinander zu überführen, lautet:

$$\mathbf{x}^I = \mathbf{T} + m\mathbf{R}\mathbf{x}^{II}, \tag{10}$$

worin $\mathbf{T} = [t_x \ t_y \ t_z]^T$ die Translation, m den Maßstab und \mathbf{R} die Drehung zwischen beiden Systemen beschreibt (z.B. /Heck 2011/). Werden dabei die Drehungen mittels einer Quaternion q beschrieben, so ergibt sich \mathbf{R} aus

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

worin

$$q = q_0 + \dot{\mathbf{q}} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \text{ und } i^2 + j^2 + k^2 = ijk = -1 \tag{12}$$

ist (z.B. /Lösler 2011/).

Im Zuge der Bündelausgleichung sind pro Subsystem somit nun neben dem Maßstab m und der Translation \mathbf{T} die 4 Elemente der Quaternion q zu bestimmen. Die Eindeutigkeit von q wird dabei durch Normierung erreicht

$$q^T q = 1. \tag{13}$$

Durch zusätzliche Bedingungsgleichungen kann die Anzahl der zu bestimmenden Transformationsparameter pro Subsystem implizit vorgegeben werden. So ist es i.d.R. unerwünscht, für jedes lokale System einen eigenen Maßstab zu schätzen. Ferner könnte es erforderlich sein, das Rotieren um bestimmte Koordinatenachsen zu unterbinden – etwa dann, wenn eine Möglichkeit zur Horizontierung der Instrumente bestand oder ein Subsystem den Messhorizont bei der Auswertung definieren soll. Die sieben möglichen Restriktionen, um jeweils einen Helmert-Parameter festzuhalten, lauten

$$t_x = 0 \tag{14}$$

$$t_y = 0 \tag{15}$$

$$t_z = 0 \tag{16}$$

$$m - 1 = 0 \tag{17}$$

$$\phi = q_2q_3 - q_0q_1 = 0 \tag{18}$$

$$\theta = q_1q_3 + q_0q_2 = 0 \tag{19}$$

$$\psi = q_1q_2 - q_0q_3 = 0 \tag{20}$$

wobei das Festhalten der Drehung um die jeweilige Koordinatenachse aus der Rotationssequenz

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\phi^x \mathbf{R}_\theta^y \mathbf{R}_\psi^z \tag{21}$$

resultiert /Kuipers 1999/.

Das Ausgleichungsmodell kann als Gauß-Markov-Modell mit Restriktionen formuliert und iterativ gelöst werden, z.B. /Jäger u.a. 2005/

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{O} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{22}$$

worin \mathbf{A} die Jacobimatrix, die die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten \mathbf{X} enthält und $\mathbf{P} = \mathbf{C}_\Pi^{-1}$ die Gewichtsmatrix der (reduzierten) Beobachtungen \mathbf{l} ist, die aus dem stochastischen Modell resultiert, die Matrix \mathbf{B} die Koeffizienten der Zusatzbedingungen beinhaltet und \mathbf{k} der Korrelatenvektor ist. Nach jedem Iterationsschritt i werden die Zuschläge \mathbf{X}_i mit den Näherungswerten \mathbf{X}_{i-1} akkumuliert und als neue Näherung \mathbf{X}_i in die nächste Iteration eingeführt. Die Berechnung wird i.A. abgebrochen, wenn die Zuschläge \mathbf{x} einen bestimmten Grenzwert unterschreiten. Näherungswerte für die zu schätzenden Transformationsparameter der einzelnen Subsysteme können dabei aus dem in /Shen, Chen, Zheng 2007/ vorgeschlagenen Verfahren mittels Eigenwertzerlegung oder durch die von /Arun,

Huang, Blöstein 1987/ hergeleitete Methode mittels Singulärwertzerlegung zuverlässig gewonnen werden. Mittels dieser ersten Näherung lassen sich sodann auch Näherungskordinaten für die im globalen System zu bestimmenden Koordinaten berechnen.

Betrachtet man die lokalen Koordinaten als Beobachtungen im Ausgleichsmodell (22), so beschreiben die geschätzten Transformationsparameter $[t_x \ t_y \ t_z \ q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ m]^T_j$ eine Transformation vom globalen System ins j te lokale Subsystem. Die Berücksichtigung etwaiger Messunsicherheiten erfolgt im stochastischen Modell (23).

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{C}_j & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \mathbf{C}_n \\ \mathbf{0} & & & & & & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

Da für die originären polaren Messwerte im Allgemeinen gute Genauigkeitsinformationen vorliegen, kann für jedes Subsystem j eine eigene Varianz-Kovarianz-Matrix \mathbf{C}_j mittels Varianzfortpflanzungsgesetz bestimmt und im stochastischen Modell berücksichtigt werden, wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben. Abhängigkeiten zwischen den n Subsystemen werden hierbei vernachlässigt, da diese zu einer sehr komplexen Modellbildung führen können. So ist die Verwendung von nur einem Instrument nicht gleichzusetzen mit einem einheitlichen Kalibrierparametersatz, insbesondere wenn sich der Messprozess über einen längeren Zeitraum erstreckt. Bei kurzen Messprozessen können sich darüber hinaus durch gleiche Bedingungen andere Nebendiagonalblockmatrizen ergeben, auch wenn gleichzeitig mit unterschiedlichen Instrumenten gemessen wird, anstatt nur mit einem. Ferner führt die Verarbeitung vollbesetzter Matrizen bei großen Netzen zu einem erheblichen Anstieg der Rechenzeit und des Ressourcenverbrauchs, der ggf. die verfügbare Hardware übersteigt und damit die Auswertung unmöglich macht. Im Vergleich zu einer konventionellen Netzausgleichung, bei der auf der Hauptdiagonale von \mathbf{C}_j i.d.R. lediglich 3×3 Blockmatrizen angeordnet sind, ergeben sich durch die Berücksichtigung der o.g. Einflüsse bei allen Messungen auf einem Standpunkt vollbesetzte \mathbf{C}_j . Im Unterschied zur konventionellen Ausgleichung sind somit alle auf einem Standpunkt bestimmten Punkte über die systematisch wirkenden Einflüsse miteinander korreliert.

Das Datum des globalen Zielsystems wird, wie eingangs bereits aufgeführt, durch das Vorgeben von homologen Punkten definiert. Analog zur klassischen Netzausgleichung sind auch bei der Bündelausgleichung verschiedene Netzanschlüsse möglich. Neben der freien Ausgleichung erscheint aber lediglich noch die weiche Lagerung (dynamische Ausgleichung), bei der auch Kovarianzinformationen des Zielsystems Berücksichtigung finden, als zweckmäßig. Der Vorgabe einer a priori Varianz-Kovarianz-Matrix $\mathbf{C}_{\text{Global}}$ für die homologen Punkte im globalen System kann grundsätzlich im Gauß-Helmert-Modell Rechnung getragen werden, z.B. /Neitzel 2010/. Alternativ lässt sich jedoch auch das o.g. Gauß-Markov-Modell (22) durch die Integration von *Pseudobeobachtungen* erweitern, wie /Koch 2002/ zeigt,

$$\mathbf{A}_{\text{Gesamt}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\text{Global}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{Gesamt}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\text{Global}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{II} \end{bmatrix} \quad (24)$$

worin \mathbf{I} eine Einheitsmatrix ist.

Die freie Netzausgleichung, bei der eine Lösung der Parameter bestimmt wird, ohne zusätzlichen Zwang auf die Beobachtungen auszuüben, betrachtet alle Punkte als Unbekannte und minimiert, da neben den Punkten auch Transformationsparameter zu schätzen sind, einen Teil der Spur der Kofaktormatrix \mathbf{Q}_{xx} . Der hierbei auftretende Defekt der Normalgleichung \mathbf{N} beträgt maximal 7 und lässt sich durch das Einführen zusätzlicher Bedingungsgleichungen beheben. Die geränderte Normalgleichung lautet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{G} \\ \mathbf{B}^T & & \\ \mathbf{G}^T & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Die zusätzlichen Datumsbedingungen $\mathbf{G}^T \mathbf{x}$ können aus den vorgegebenen Näherungskordinaten für das globale System mit den von /Illner 1983/ hergeleiteten Transformationsgleichungen aufgestellt werden.

$$\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & z_1^0 & -y_1^0 & 0 & z_2^0 & -y_2^0 & \dots \\ -z_1^0 & 0 & x_1^0 & -z_2^0 & 0 & x_2^0 & \dots \\ y_1^0 & -x_1^0 & 0 & y_2^0 & -x_2^0 & 0 & \dots \\ x_1^0 & y_1^0 & z_1^0 & x_2^0 & y_2^0 & z_2^0 & \dots \end{bmatrix} \quad (26)$$

3 VERGLEICH DER ERGEBNISSE DER BÜNDELAUSGLEICHUNG MIT DER KONVENTIONELLEN LÖSUNG

Intensive Vergleiche zwischen verschiedenen Softwarepaketen zur Auswertung geodätischer Netze haben in den letzten Jahren gezeigt, dass es auch bei gleichen Beobachtungen und identischen a priori Informationen bzgl. der Messunsicherheiten zu unterschiedlichen Lösungen kommt, vgl. /Schwieger, Foppe, Neuner 2010/, /Lösler, Bähr 2010/, /Radomi, Schlösler 2010/, /Herrmann, Lösler, Bähr 2011/. Zum Teil konnten die auftretenden Unstimmigkeiten durch unterschiedliche vorverarbeitende Schritte in der Modellbildung und im stochastischen Modell geklärt werden. Problematischer gestaltete sich jedoch der Vergleich zwischen Programmen, die die originären Messwerte direkt verarbeiten, und Programmen, die eine verkettete Koordinatentransformation zur Parameterschätzung nutzen. Sowohl der von /Herrmann, Lösler, Bähr 2011/ durchgeführte direkte Vergleich der ausgeglichenen Koordinaten als auch der von /Radomi, Schlösler 2010/ publizierte datumsunabhängige Vergleich der Varianzanteile der ausgeglichenen Beobachtungen konnte keine Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der unterschiedlichen Modellansätze liefern.

Mit den Daten eines räumlichen Testnetzes¹, welches u.a. von /Schwieger, Foppe, Neuner 2010/ zum Vergleich von Softwarepaketen benutzt wurde, soll die Lösung des oben beschriebenen Algorithmus mit den Resultaten eines konventionellen Ausgleichungsprogrammes verglichen werden. Bei diesem Netz handelt es sich um ein fiktives Netz, welches aus 12 Punkten besteht. Beobachtet wurden 49 Schrägstrecken, 50 Zenitwinkel und 50 Richtungen in 12 Sätzen. An sämtlichen Beobachtungen sind etwaige Korrekturen und Reduktionen bereits berücksichtigt, sodass bspw. die Erdkrümmung in der weiteren Auswertung zu vernachlässigen ist. Als Beobachtungsgenauigkeit sei für die Richtungen $\sigma_r = 0,3 \text{ mgon}$, für die Vertikalwinkel $\sigma_v = 0,6 \text{ mgon}$ und für die Strecken ein entfernungsabhängiger Genauigkeitsansatz von $\sigma_a = 2 \text{ mm}$ und $\sigma_m = 2 \text{ ppm}$ vorgegeben. Bei diesem einfachen Genauigkeitsansatz werden alle systematisch wirkenden Einflüsse vernachlässigt und lediglich die Unsicherheiten von vier der 25 oben hergeleiteten Parameter berücksichtigt. Die Reduktion des Unsicherheitsbudgets erfolgt nur, um eine direkte Vergleichbarkeit zu konventionellen Netzausgleichungsprogrammen herzustellen.

Dieses Netz soll zum einen frei ausgeglichen werden, wobei vier Punkte als Datums- und die übrigen acht als Neupunkte zu betrachten sind, und zum anderen mittels einer dynamischen Ausgleichung berechnet werden, bei der den vier Anschlusspunkten eine Lageunsicherheit von $\sigma_x = \sigma_y = 5 \text{ mm}$ und eine Höhenunsicherheit von $\sigma_z = 2 \text{ mm}$ zugestanden wird. Da durch die fehlende Strecke ein Polartripel unvollständig ist, und somit dieser Punkt in einem Subsystem nicht bestimmt werden kann, werden die zugehörige Richtung und der zugehörige Zenitwinkel vorab aus dem Datenbestand entfernt. Somit liegt für beide Programme ein identisches Datenmaterial vor. In der Bündelausgleichung werden für jedes Subsystem der Maßstab und die Rotation um die x- bzw. y-Achse durch geeignete Bedingungen festgehalten, vgl. Gleichung (14) – (19). Für die Auswertung der originären Beobachtungen kommt das quellcodeoffene Programmsystem Java Graticule 3D (JAG3D) zum Einsatz. Dieses Programm erzielte für dieses Netz qualitativ gleichwertige Ergebnisse wie kommerzielle Produkte /Lösler, Bähr 2010/.

Die ausgeglichenen Koordinaten sind *Tab. 2 – Tab. 5* im Anhang zu entnehmen. Es ist zu erkennen, dass sowohl bei der freien als auch bei der dynamischen Netzausgleichung beide Programme dieselben ausgeglichenen Koordinaten liefern. Auch die abgeleiteten Standardabweichungen für die geschätzten Punkte sind identisch. Die Forderung, dass Ausgleichungsprogramme unabhängig vom implementierten Ausgleichungsmodell bei gleichen Eingangsdaten gleiche Resultate liefern sollen, ist eingehalten. Eine algebraische Umformung des funktionalen Modells ist somit nicht gleichbedeutend mit anderen Resultaten, solange auch das stochastische Modell eine adäquate Berücksichtigung findet. Dies konnte auch mit einem weiteren Testdatensatz² bestätigt werden, welcher vom Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY) zur Verfügung gestellt wurde. Auf das Abdrucken der Ergebnisse wird jedoch aus Platzgründen verzichtet.

Das in der Ausgleichung berücksichtigte stochastische Modell setzt sich bei beiden Testnetzen aus unkorrelierten Polarbeobach-

tungen zusammen, sodass die in der Bündelausgleichung berücksichtigte a priori Kovarianzmatrix (23) lediglich aus 3×3 Blockmatrizen besteht. Das Berücksichtigen aller o.g. Größen im stochastischen Modell hätte jedoch nur einen geringen Einfluss auf das Ausgleichungsergebnis, da die vorgegebenen a priori Standardabweichungen die zu erwartenden Unsicherheiten der Kalibrierparameter deutlich übersteigt. Erst wenn sich die Messunsicherheit in den gleichen Größenordnungen bewegt wie die der Kalibrierparameter, sind signifikante Auswirkungen zu erwarten, wie leicht durch Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetz auf Gleichung (7) bei Vorgabe geeigneter Unsicherheiten nachzuvollziehen ist.

4 SCHLUSSBETRACHTUNG UND AUSBLICK

Insbesondere in der Messtechnik hat zur Angabe von Messunsicherheiten der Leitfaden zur Ermittlung von Messunsicherheiten (GUM) Einzug erhalten. Hierbei sieht der Leitfaden eine Bestimmung der kombinierten Standardunsicherheit vor, die aus Standardunsicherheiten der Ermittlungsmethoden A und B resultieren. Insbesondere die Komponenten des A-Teils lassen sich weitgehend allgemein und projektspezifisch formulieren, sodass eine umfassende Berücksichtigung in Auswerteprogrammen integrierbar ist. Die Modellierung für den Teil A erfolgt über klassische statistische Methoden, die dem Ingenieurgeodäten wohl bekannt sein dürften. Dennoch bleibt dieses Wissen häufig ungenutzt, und lediglich ein einfaches stochastisches Modell findet im Zuge der Netzausgleichung Anwendung.

In diesem Beitrag wird das Kompensationsmodell von /Hughes u.a. 2011/ für Lasertracker aufgegriffen, da hierbei die Instrumentenparameter in einem laborunabhängigen Prüfverfahren ableitbar sind. Dieser Kompensationsansatz wurde derart erweitert, dass ein umfassendes Modell zur Angabe von Koordinatenunsicherheiten im Ergebnis vorliegt, welches neben zufällig streuenden Abweichungen auch quantifizierbare systematische Einflüsse berücksichtigt. Im zweiten Teil wird ein Vorschlag zur vollständigen Integration dieses stochastischen Modells in eine Ausgleichungssoftware beschrieben, der auf der Basis verketteter Quaternionentransformationen arbeitet. Eine konkrete Realisierung liegt im Ergebnis dieser Arbeit als Prototyp vor und erlaubt die Berücksichtigung von 25 messgenauigkeitsbeeinflussenden Faktoren – in gegenwärtigen Programmen ist die Anzahl häufig auf drei beschränkt. Vergleiche zwischen den Ergebnissen der realisierten Bündelausgleichung mit einer konventionellen Ausgleichungssoftware ergaben identische Resultate – sowohl bei den Koordinaten also auch bei den ermittelten Standardabweichungen – sofern auf identische Eingangsdaten geachtet wurde.

Derzeit werden bei der Bildung des stochastischen Modells ausschließlich normalverteilte Größen vorausgesetzt. Die Berücksichtigung unterschiedlicher Verteilungen bei der Ableitung des stochastischen Modells ist eine mögliche zukünftige Aufgabe. Insbesondere das hierbei auftretende Problem der Faltung verschiedener Wahrscheinlichkeitsverteilungen ließe sich dabei elegant mittels einer Monte-Carlo-Simulation umgehen, z.B. /Koch 2008/, /Heister 2010/.

Weiterhin könnten für jedes Subsystem individuelle Varianzfaktoren durch eine Varianz-Komponenten-Schätzung bestimmt und in der Auswertung berücksichtigt werden. Durch die vorgeschlagene Blockdiagonalstruktur der Gewichtsmatrix **P** lässt sich diese Schät-

¹ http://diegeodaeten.de/vergleich_ausgleichungssoftware.html (zuletzt besucht: 31.10.2011)

² <https://wiki-network-adjustment.desy.de/Testcase002> (zuletzt besucht: 31.10.2011)

zung zu Gunsten des von /Förstner 1979/ vorgeschlagenen Verfahrens formulieren, sodass sich rechentechnisch einfach zu handhabende Formeln ergeben /Crocetto, Gatti, Russo 2000/.

Dieser Artikel greift die von /Heister 2010/ angeregte Forderung auf, dem Praktiker nicht nur die Theorie, sondern auch ein Handwerkszeug in Form von Softwarepaketen zur sachgerechten Auswertung bereitzustellen. Es bleibt zu hoffen, dass das hier vorgestellte Konzept dazu beiträgt, eine Brücke zwischen Theorie und Praxis zu schlagen.

LITERATUR

Arun, K. S.; Huang, T. S.; Blostein, S. D. (1987): Least-Squares Fitting of Two 3-D Point Sets. In: IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Nr. 9, 698-700.

Crocetto, N.; Gatti, M.; Russo, P. (2000): Simplified formulae for the BIQUE estimation of variance components in disjunctive observation groups. In: Journal of Geodesy, 74(2000)6, 447-457.

DIN 1319-1: Grundlagen der Messtechnik – Teil 1: Grundbegriffe. Beuth-Verlag, Berlin, 1995.

DIN V ENV 13005: Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. ENV 13005. Beuth-Verlag, Berlin.

Förstner, W. (1979): Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 86(1979)11/12, 446-453.

Gielsdorf, F. (2007): Ausgleichsrechnung und raumbezogene Informationssysteme. Bayer. Akademie der Wissenschaften, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft-Nr. 593.

Heck, B. (2010): Bemerkungen zur räumlichen Helmert-Transformation. In: Vernetzt und ausgeglichen. Geodätisches Institut (Hrsg.), KIT Scientific Publishing, 101-113.

Heister, H. (2001): Zur Angabe von Messunsicherheiten in der geodätischen Messtechnik. In: Heister, H., Staiger, R.: Qualitätsmanagement in der Messtechnik, Beiträge zum 54. DVW-Seminar am 19. und 20. November 2001 in Fulda. Schriftenreihe des DVW, Band 42.

Heister, H. (2002): Zu Genauigkeitsangaben bei geodätischen Instrumenten. Festschrift Univ.-Prof. Dr.-Ing. Bertold Witte zur Emeritierung, Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 73-81.

Heister, H. (2010): Genauigkeitsmaße in der geodätischen Messtechnik. In: Kutterer, H., und Neuner, H.: Qualitätsmanagement geodätischer Mess- und Auswerteverfahren, Beiträge zum 93. DVW-Seminar am 10. und 11. Juni 2010 in Hannover. Schriftenreihe des DVW, Band 61.

Hennes, M. (2007): Konkurrierende Genauigkeitsmaße – Potential und Schwächen aus der Sicht des Anwenders. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 114(2007)7, 136-146.

Hennes, M.; Heister, H. (2007): Neuere Aspekte zur Definition und zum Gebrauch von Genauigkeitsmaßen in der Ingenieurgeodäsie. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 114(2007)11/12, 375-383.

Herrmann, C.; Lösler, M.; Bähr, H. (2011): Comparison of Results from SpatialAnalyzer and Different Adjustment Programs. The 1st International Workshop on the Quality of Geodetic Observation and Monitoring Systems 2011 (QuGOMS'11), 13.-15. April 2011, Garching/München.

Hughes, B. u.a. (2011): Laser Tracker Error Determination Using a Network Measurement. Measurement Science and Technology, 22(2011)4, 1-12.

Illner, I. (1983): Freie Netze und S-Transformation. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 90(1983)5, 157-170.

Jäger, R. u.a. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Herbert Wichmann, Heidelberg.

- Knickmeyer, E. H.; Nitschke, M. (1994): Rotationsparameter – Grundlagen für die Praxis. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 119(1994)9, 455-464.
- Koch, K.-R. (2002): Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauß-Helmert- und im Gauß-Markoff-Modell. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (ZfV), 127(2002)3, 147-152.
- Koch, K.-R. (2008): Evaluation of uncertainties in measurements by Monte Carlo simulations with an application for laserscanning. In: Journal of Applied Geodesy, 2(2008)2, 67-77.
- Kuipers, J. B. (1999): Quaternions and Rotation Sequences: A Primer with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality. Princeton University Press.
- Kutterer, H.; Schön, S. (2004): Alternativen bei der Modellierung von Unsicherheiten beim Messen. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 129(2004)6, 389-398.
- Lösler, M.; Bähr, H. (2010): Vergleich der Ergebnisse verschiedener Netzausgleichsprogramme. In: Vernetzt und ausgeglichen. Geodätisches Institut (Hrsg.), KIT Scientific Publishing, S. 205-214.
- Lösler, M. (2011): Robuste Schätzung der Transformationsparameter einer räumlichen Helmert-Transformation. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 118(2011)5, 187-191.
- Luhmann, T. (2010): Nahbereichsphotogrammetrie – Grundlagen, Methoden und Anwendungen. 3. Auflage, Wichmann, Berlin.
- Muralikrishnan, B. u.a. (2009): Performance Evaluation Tests and Geometric Misalignments in Laser Tracker. In: Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 114(2009)1, 21-35.
- Muralikrishnan, B. u.a. (2010): Measuring Scale Errors in a Laser Tracker's Horizontal Angle Encoder Through Simple Length Measurement and Two-Face System Tests. In: Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology, 115(2010)5, 291-301.
- Neitzel, F. (2010): Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation. In: Journal of Geodesy, 84(2010)12, 751-762.

Radomi, P.; Schlösser, M. (2010): Adjustment with Least Squares Method, two software packages – two results. 11th International Workshop on Accelerator Alignment (IWAA), 13.-17. September 2010, DESY, Hamburg.

Sommer, K.-D.; Siebert, B. R. L. (2004): Praxisgerechtes Bestimmen der Messunsicherheiten nach GUM. In: tm – Technisches Messen, 71(2004)2, 52-66.

Schwieger, V.; Foppe, K.; Neuner, H. (2010): Qualitative Aspekte zu Softwarepaketen der Ausgleichsrechnung. In: Kutterer, H.; Neuner, H.: Qualitätsmanagement geodätischer Mess- und Auswerteverfahren, Beiträge zum 93. DVW-Seminar am 10. und 11. Juni 2010 in Hannover, Schriftenreihe des DVW, Band 61.

Shen Y. Z.; Chen Y.; Zheng D. H. (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. In: Journal of Geodesy, 80(2006)5, 233-239.

Dipl.-Ing. (FH) Michael Lösler

Bahnhofplatz 3 | D-61118 Bad Vilbel
loesler@derletzekick.de



Prof. Dr.-Ing. Cornelia Eschelbach

FACHHOCHSCHULE FRANKFURT AM MAIN
FACHBEREICH ARCHITEKTUR –
BAUINGENIEURWESEN – GEOMATIK

Nibelungenplatz 1 | D-60318 Frankfurt am Main
cornelia.eschelbach@fb1.fh-frankfurt.de



Manuskript eingereicht: 04.12.2011 | Im Peer-Review-Verfahren begutachtet

ANHANG

Pkt.	x [m]	y [m]	z [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]
Datumspunkte						
904	65445,4082	7366,0624	54,3816	0,68	0,75	1,44
905	65286,9516	7465,4457	55,6123	0,85	0,76	1,44
906	64972,4986	6998,0754	67,8340	0,68	0,70	1,07
907	64936,7173	6887,0247	67,7493	0,73	0,62	1,05
908	65032,0279	6483,9113	48,7420	0,75	0,84	1,51
909	65159,5696	6262,1742	46,4467	0,87	0,92	1,64
910	65845,7036	6604,0553	56,0072	0,79	0,83	1,71
911	65924,5621	6756,8719	55,3898	0,86	0,85	1,72
Neupunkte						
101	65128,6565	6856,0737	66,4984	0,70	0,54	0,98
102	65135,3762	6881,9490	66,5094	0,68	0,58	0,99
103	65302,1100	6811,0370	66,6544	0,65	0,61	0,99
104	65308,8275	6836,9011	66,7027	0,66	0,60	1,00

Tab. 2 | Ergebnisse der freien Netzausgleichung mit Teilspurminimierung der originären Messdaten mit JAG3D

Pkt.	x [m]	y [m]	z [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]
Datumspunkte						
904	65445,4082	7366,0624	54,3816	0,68	0,75	1,44
905	65286,9516	7465,4457	55,6123	0,85	0,76	1,44
906	64972,4986	6998,0754	67,8340	0,68	0,70	1,07
907	64936,7173	6887,0247	67,7493	0,73	0,62	1,04
908	65032,0279	6483,9113	48,7420	0,75	0,84	1,51
909	65159,5696	6262,1742	46,4467	0,87	0,92	1,64
910	65845,7036	6604,0553	56,0072	0,79	0,83	1,71
911	65924,5621	6756,8719	55,3898	0,86	0,85	1,72
Neupunkte						
101	65128,6565	6856,0737	66,4984	0,70	0,54	0,98
102	65135,3762	6881,9490	66,5093	0,67	0,58	0,98
103	65302,1100	6811,0370	66,6544	0,65	0,61	0,99
104	65308,8275	6836,9011	66,7027	0,66	0,60	1,00

Tab. 3 | Ergebnisse der freien Netzausgleichung mit Teilspurminimierung mittels Bündelausgleichung

Pkt.	x [m]	y [m]	z [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]
Anschlusspunkte						
904	65445,4085	7366,0629	54,3830	2,55	1,96	1,27
905	65286,9517	7465,4464	55,6136	2,83	1,93	1,27
906	64972,4982	6998,0759	67,8348	1,96	2,24	1,12
907	64936,7168	6887,0247	67,7501	1,92	2,28	1,10
908	65032,0278	6483,9107	48,7421	2,28	2,19	1,32
909	65159,5698	6262,1734	46,4464	2,78	2,07	1,38
910	65845,7037	6604,0551	56,0052	2,11	2,61	1,32
911	65924,5624	6756,8719	55,3879	1,99	2,80	1,33
Neupunkte						
101	65128,6563	6856,0738	66,4990	1,91	1,96	1,15
102	65135,3760	6881,9492	66,5100	1,90	1,97	1,15
103	65302,1099	6811,0371	66,6549	1,89	1,88	1,19
104	65308,8274	6836,9013	66,7032	1,89	1,87	1,19

Tab. 4 | Ergebnisse der dynamischen Ausgleichung mit Berücksichtigung einer Genauigkeit von $\sigma_x = \sigma_y = 5 \text{ mm}$ und $\sigma_z = 2 \text{ mm}$ der Anschlusspunkte in JAG3D

Pkt.	x [m]	y [m]	z [m]	σ_x [mm]	σ_y [mm]	σ_z [mm]
Anschlusspunkte						
904	65445,4085	7366,0629	54,3830	2,55	1,96	1,27
905	65286,9517	7465,4464	55,6136	2,83	1,93	1,27
906	64972,4982	6998,0759	67,8348	1,96	2,24	1,12
907	64936,7168	6887,0247	67,7501	1,92	2,28	1,10
908	65032,0278	6483,9107	48,7421	2,28	2,19	1,32
909	65159,5698	6262,1734	46,4464	2,78	2,07	1,38
910	65845,7037	6604,0551	56,0052	2,11	2,61	1,32
911	65924,5624	6756,8719	55,3879	1,99	2,80	1,33
Neupunkte						
101	65128,6563	6856,0738	66,4990	1,91	1,96	1,15
102	65135,3760	6881,9492	66,5100	1,90	1,97	1,15
103	65302,1099	6811,0371	66,6549	1,89	1,88	1,19
104	65308,8274	6836,9013	66,7032	1,89	1,87	1,19

Tab. 5 | Ergebnisse der dynamischen Ausgleichung mit Berücksichtigung einer Genauigkeit von $\sigma_x = \sigma_y = 5 \text{ mm}$ und $\sigma_z = 2 \text{ mm}$ der Anschlusspunkte mittels Bündelausgleichung