Die Gaußsche Vermutung – ein in der Geodäsie wenig bekannter Geniestreich des Fürsten der Mathematiker

N. Rösch, F. Zimmermann

Im vorliegenden Beitrag wird eine der vielen herausragenden Leistungen von C. F. Gauß gewürdigt. Es handelt sich dabei um eine Arbeit zur Zahlentheorie, die in der Entwicklung einer Gleichung zur Abschätzung der Anzahl von Primzahlen in einem gegebenen Intervall gipfelt. Die zum damaligen Zeitpunkt unbewiesene Gleichung wurde unter dem Namen „Gaußsche Vermutung" in die Fachliteratur übernommen. Etwa ein Jahrhundert später wurde sie bewiesen und ist heute als Primzahlsatz bekannt.

1 Einleitung

Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) hat auf vielen Gebieten Herausragendes geleistet. Schon aus seiner Jugend sind zahlreiche Anekdoten überliefert, die früh seine überdurchschnittliche Begabung erkennen ließen. Eine davon besagt beispielsweise, dass Gauß bereits im Alter von drei Jahren seinen Vater auf einen Fehler bei einer Lohnabrechnung hingewiesen hat. Gauß selbst sagte von sich – möglicherweise nicht ohne ironischen Unterton – dass er eher rechnen als sprechen konnte. Auch die Arbeiten, um die es in diesem Beitrag geht, hat Gauß bereits in seiner Jugend aufgenommen.
Im Jahr 1794, also im Alter von siebzehn Jahren, hatte Gauß die Methode der kleinsten Quadrate entwickelt, auf Basis derer im Jahr 1802 die Position des Kleinplaneten Ceres wiedergefunden werden konnte. Dieser war etwa ein Jahr zuvor zwar entdeckt worden, konnte aber in Unkenntnis der genauen Umlaufbahn nicht mehr beobachtet werden. Durch die Bahnberechnung des Ceres wurde Gauß weit über die Grenzen Deutschlands hinaus bekannt.

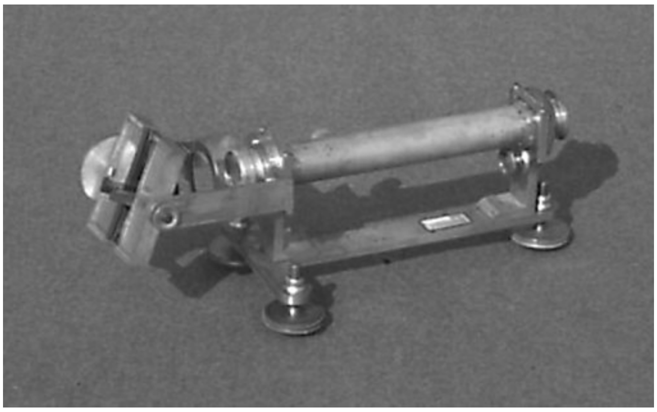

Abb. 1: Der Heliotrop

Aber auch auf dem Gebiet der Instrumentenentwicklung hatte sich Gauß hervorgetan. Der Heliotrop, dessen Entwicklung ein Nebenprodukt der hannoveranischen Gradmessung war, wurde ebenfalls von ihm entwickelt und konstruiert. Dieses Instrument hat vielen Geodäten das Leben wesentlich erleichtert. Der Gelehrte soll dabei durch die Reflexionen von Sonnenlicht an einem Fenster zu dieser Geräteentwicklung angeregt worden sein ([5]).
Die Geodäsie als wissenschaftliche Disziplin hat vom Wirken von C. F. Gauß ganz besonders profitiert. Neben den schon aufgezählten Beiträgen hat er u.a. auch die mathematischen Grundlagen für die konformen Koordinaten gelegt, ohne die die Landesvermessung, wie wir sie heute kennen, nicht möglich wäre. Darüber hinaus ist der Name Gauß mit zahlreichen weiteren mathematischen Fragestellungen verknüpft, die mehr oder weniger Bezug zur Geodäsie haben. Hier wären im Besonderen die Gaußschen Zahlenebene, das Gaußsche Eliminationsverfahren, die Gaußsche Glockenkurve, die Gaußsche Schmiegungskugel, die Gaußschen Fundamentalgrößen, die Gaußsche Krümmung, das Gauß-Markov-Modell ebenso wie die zuvor schon angesprochenen Gaußschen isometrischen Koordinaten zu nennen.
Der in diesem Beitrag behandelte Sachverhalt ist in erster Linie kein geodätischer. Er hat vielmehr ein Teilgebiet der Mathematik zum Thema, nämlich die Zahlentheorie. Gegenstand dieses Wissenschaftszweiges sind die Eigenschaften der ganzen Zahlen und damit auch die der Primzahlen. Die Wertschätzung, die Gauß selbst der Zahlentheorie entgegenbrachte, ist uns in einem Zitat überliefert: „Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften, und die Zahlentheorie ist die Königin der Mathematik."
Die Zahlentheorie betrachtet die Primzahlen als die Atome, aus denen die übrigen ganzen Zahlen gebildet bzw. zusammengesetzt werden können (Fundamentalsatz der Zahlentheorie). Dass ihre Anzahl unendlich groß ist, hat Euklid (ca. 365 v. Chr. – ca. 300 v. Chr.) schon in seinem Buch *Die Elemente* durch einen ebenso einfachen wie überzeugenden Widerspruchsbeweis nachgewiesen.
Da dieser Beweis für die Vermutung von Gauß nicht unbedeutend ist, soll er an dieser Stelle kurz wieder gegeben

werden. Die Behauptung lautet zunächst: Die Anzahl der Primzahlen ist beschränkt, es gibt demnach eine höchste Primzahl. Wir nehmen also an, wir hätten die Menge P der Primzahlen gefunden. Addiert man jetzt zum Produkt der Menge dieser Primzahlen die Zahl eins dazu, dann ist diese Zahl nicht durch die Primzahlen aus P darstellbar. Setzt man jetzt voraus, dass jede natürliche Zahl durch eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren darstellbar ist – und dieser Sachverhalt war zu Zeiten von Euklid bereits bekannt – , dann ist das ein Widerspruch zur Aussage: Die Menge P enthält alle Primzahlen. Folglich ist ihre Anzahl nicht beschränkt.
Auch heute haben die Primzahlen nichts von ihrer Bedeutung eingebüßt. Denn neben der Relevanz, die sie nach wie vor für die Mathematik haben, bauen wichtige Verschlüsselungs-techniken der modernen Datenkommunikation (RSA, ein asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren) auf den Eigenschaften der Primzahlen auf. Denn es ist sehr einfach zwei Primzahlen miteinander zu multiplizieren, aber sehr schwierig eine bekannte Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Aufgrund dieser Eigenschaft eignen sich Primzahlen hervorragend zur Implementierung so genannter Falltüralgorithmen, die in eine Richtung sehr einfach zu durchlaufen sind, deren Umkehrung aber äußerst schwierig bzw. nahezu unmöglich ist.

2 Primzahlen und Primzahltabellen

Zunächst lohnt es sich, die Definition dessen, was eine Primzahl ist, näher zu beleuchten. Unsere heutige Definition kann sehr einfach erläutert werden: Alle Zahlen, die nur durch eins und sich selbst teilbar sind, werden Primzahlen genannt. Euklid vertrat noch eine etwas andere Auffassung. Für ihn war eins gar keine Zahl, sondern vielmehr eine Einheit. Demnach waren für Euklid alle Zahlen prim, die nur durch diese Einheit darstellbar waren. Da die Größe selbst aus dieser Einheit abgeleitet war, entfiel damit die Division durch sich selbst.
Wie in der Einleitung bereits erwähnt, kommt den Primzahlen in der Zahlentheorie eine Schlüsselrolle zu. Denn eine ihrer erstaunlichsten Eigenschaften ist die, dass sich ausgehend von einer gegebenen Zahl oder einem Intervall, nicht ohne weiteres feststellen lässt, welches die nächst folgende Primzahl ist. Die Darstellung der Primzahlen im Intervall [0,100] in Abbildung [2] soll dies verdeutlichen.
Die Treppenfunktion, die entsteht, wenn man die aufsummierte Anzahl der Primzahlen über den Zahlen des Intervalls darstellt, zeigt keine erkennbare Regelmäßigkeit. Zumindest dann nicht, wenn man sich die einzelnen Stufen der Treppe ansieht.
Die vergleichbare Darstellung der Primzahlen im Zahlenbereich bis 1000 zeigt demgegenüber schon einen erstaunlich glatten Verlauf und lässt in Folge dessen eine gewisse Regelmäßigkeit vermuten. Diese bezieht sich allerdings lediglich auf den gesamten Verlauf der Kurve, nicht aber auf die einzelne „Treppenstufen". Diese Eigenschaft beschäftigt die Zahlentheoretiker schon seit Jahrhunderten.
In diesem Zusammenhang stellt sich zunächst die Frage, wie man die Primzahlen systematisch finden kann. Die älteste bekannte Lösung ist das so genannte „Sieb des Eratosthenes". Dieses Verfahren geht, wie der Name schon vermuten lässt, auf den Griechen Eratosthenes von Kyrene (ca. 284 v. Chr. – 202 v. Chr.) zurück.
Der Algorithmus, auf dem dieses Verfahren beruht, basiert auf einer Liste, die die Zahlen des Intervalls von 2 bis N enthält. Beginnend mit der ersten Zahl werden dann deren Vielfache aus der Liste gestrichen, bis die obere Intervallgrenze erreicht ist. Danach wird mit der nächst höheren Zahl der Liste, die noch nicht gestrichen wurde, ebenso verfahren. Der Algorithmus bricht ab, wenn man bei der Zahl $n = \sqrt{N}$ angelangt ist. Die nach Abschluss des Verfahrens verbliebenen Zahlen der Liste sind dann prim.
Dieser Algorithmus wurde im Laufe der Zeit optimiert. Die letzte dieser Optimierungen wurde von Atkin und Bernstein entwickelt. Sie ist unter dem Namen „Sieb des Atkin" in die Literatur eingegangen ([1]).
Auf der Basis derartiger Algorithmen können Tabellen erstellt werden, die die Anzahl der Primzahlen für – zumindest theoretisch – beliebige Zahlenbereiche abdecken. Um die Arbeit von Gauß entsprechend würdigen zu können muss man sich vor Augen führen, dass die Primzahltabellen zu seiner Zeit weit weniger umfangreich waren, als die, auf die wir heute zurückgreifen können. Es bestand

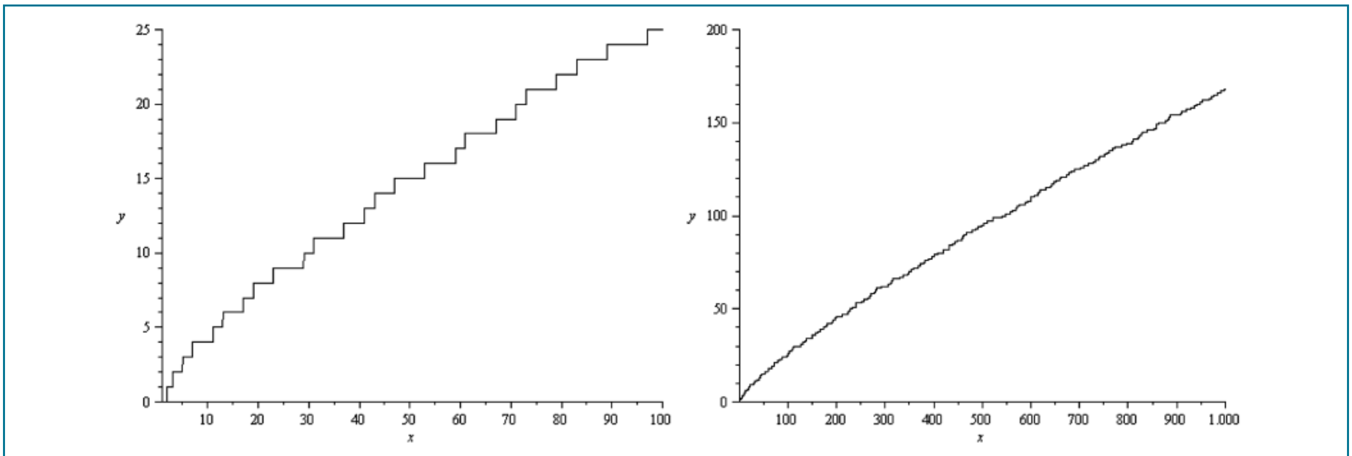

Abb. 2: Die Darstellung der Primzahlen bis 100 und bis 1000 als Treppenfunktion

Tab. 1: Übersicht über Entwicklung von Primzahlentafeln (aus [2])

Name	Jahr	Zahlenbereich
L. Fibonacci	1202	$P < 10^2$
F. van Schooten	1657	$P < 10^4$
J.G. Krüger	1746	$P < 10^5$
J.C. Burckhardt	1807/1814	$P < 3{*}10^6$
Z. Dase	1862	$6{*}10^6 < P < 9{*}10^6$
J. Glaisher	1879/1883	$3{*}10^6 < P < 6{*}10^6$
D.N. Lehmer	1909/1914	$P < 10^7$

darüber hinaus auch gar keine Veranlassung, diese Tabellen zu erweitern, da deren praktischer Nutzen nicht zu erkennen war.
Von den zahlreichen Mathematikern, die sich mit der Erstellung von Primzahlentabellen beschäftigten sind einige in Tabelle 1 aufgezählt. Ein Jahr, bevor Gauß geboren wurde, publizierte Antonio Felkel eine Tabelle, die insgesamt 408 000 Primzahlen umfasste. Da die Tabelle faktisch unverkäuflich war, wurden die weiteren Arbeiten eingestellt. Unter den herausragenden Leistungen, die auf diesem Gebiet erbracht wurden, ist abschließend noch die Arbeit von Kulik zu nennen, der nach zwanzigjähriger Anstrengung eine Tabelle für Primfaktoren bis 100 Millionen erstellt hat. Die Ergebnisse wurden allerdings nie veröffentlicht.
Wie Tabelle 2 zeigt, wird der mittlere Abstand zwischen den Primzahlen für größer werdende Zahlenbereiche ebenfalls immer größer. D.h., die Anzahl der Primzahlen nimmt ab. Im Intervall [2,1000] beispielsweise beläuft sich in Abständen von 100er Schritten ihre Anzahl auf 25, 21, 16, 16, 17, 14, 16, 14, 15 und wieder 14. Im Intervall [10 000 000, 10 001 000] dagegen unter den sonst gleichen Bedingungen nur noch auf 2, 6, 6, 6, 5, 4, 7, 10, 9 und 6. Die Anzahl ist mithin nur noch etwa 1/3 so groß.
Ergänzend zu den bisherigen Ausführungen zu den Primzahlen soll noch kurz auf die so genannte Primfaktorzerlegung, also der Zerlegung einer Zahl N in ihre Primfaktoren eingegangen werden. Auch auf diesem Gebiet waren viele Mathematiker tätig. Ein früher Ansatz zur systematischen Zerlegung einer Zahl in ihre Primfaktoren wurde von Pierre de Fermat (1601 – 1665) entwickelt. Weitere Arbeiten gehen auf Leonhard Euler (1707 – 1783) und auf Legendre zurück, um hier nur einige der bekanntesten Mathematiker auf diesem Gebiet zu nennen. Legendre wird uns später in einem ähnlichen Zusammenhang nochmals beschäftigen.

Tab. 2: Die Anzahl und der mittlere Abstand zwischen den Primzahlen

Zahlenbereich	Anzahl Primzahlen	Mittler Abstand
10	4	2,5
10^2	25	4,0
10^3	168	6,0
10^4	1229	8,1
10^5	9592	10,4
10^6	78498	12,7
10^7	664579	15,0
10^8	5761455	17,4
10^9	50847534	19,7
10^{10}	455052511	22,0

3 Der erste Ansatz von Gauß

Es wurde bereits gesagt, dass es nicht möglich ist, das Auftreten von Primzahlen vorherzusagen. Gauß nahm das zur Kenntnis und stellte sich die Frage, ob nicht wenigstens die Anzahl der zu erwartenden Treffer für ein bestimmte Intervall vorhergesagt werden kann. Der Idee liegt somit ein statistischer Ansatz zu Grunde. Dieser geht davon aus, dass über den Einzelfall keine genaue Aussage getroffen werden kann, dass dies aber über eine genügend große Anzahl bzw. über ein genügend großes Intervall doch möglich sein könnte.
Die letzte Spalte in Tabelle 2 stützt diese Auffassung, denn sie macht deutlich, dass mit Anwachsen des Zahlenraums der mittlere Abstand der Primzahlen von einer Zehnerpotenz zur nächsten einem gewissen Gesetz zu genügen scheint. Denn die Differenz zwischen 10^a und 10^{a+1} ist zumindest im angegebenen Zahlenraum bis 10^{10} (ab der Zahl 10 000) konstant, sofern man sich bei der Zahlendarstellung auf die erste Nachkommastelle beschränkt.
Auf der Grundlage dieser Feststellung vermutete Gauß einen Zusammenhang zwischen dem Auftreten von Primzahlen und dem natürlichen Logarithmus. Zur Ermittlung der Anzahl der Primzahlen im Intervall [2,x] fand Gauß die nachstehende Gleichung:

$$\pi(x) = \frac{x}{\log(x)}.$$

Wobei in dieser Formel der Buchstabe π nicht für die Kreiszahl, sondern für die Anzahl der Primzahlen steht. Der Logarithmus im Nenner bezeichnet den natürlichen, wie weiter oben bereits erwähnt wurde. Diese Gleichung muss allerdings als eine erste Näherung betrachtet werden, die Gauß weiter verbesserte. In der nachstehenden Tabelle sind für einige Zahlenbereiche der tatsächliche und der nach Gauß berechnete Wert gegenübergestellt. Die letzte Spalte dieser Tabelle, die das Verhältnis aus geschätzter und tatsächlicher Anzahl von Primzahlen wiedergibt, scheint sich zumindest im angegebenen Bereich dem Grenzwert 1 zu nähern.
Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) publizierte im Jahr 1808 eine überarbeitete Fassung einer bereits 10 Jahre zuvor erschienen Arbeit, mit dem Titel *Théorie des Nombres*, worin er die Vermutung äußerte, dass sich die Anzahl der Primzahlen in einem bestimmten Zahlenbereich nach der Formel

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln(x) - 1{,}08366}$$

Tab. 3: Die tatsächliche und die angenäherte Anzahl der Primzahlen

X	π(x)	x/ln(x)	Verhältnis
10^1	4	4	1,000
10^2	25	22	0,880
10^3	168	145	0,863
10^4	1229	1086	0,880
…	…	…	…
10^{10}	455052511	434294482	0,954
10^{11}	4118054813	3948131653	0,959
10^{12}	37607912018	36191206825	0,962
…	…	…	…
10^{20}	2220819602560918840	2171472409516259138	0,978
10^{21}	21127269486018731928	20680689614440563222	0,979

approximieren lässt. Tatsächlich war die von Legendre vorgestellte Formel im Zahlenbereich bis 10^6 besser, als die, die Gauß vorgeschlagen hatte. In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse gegenübergestellt.
Im direkten Vergleich schien damit die Gleichung von Legendre der von Gauß deutlich überlegen zu sein. Denn selbst im Zahlenbereich bis 10^6 betrug die nach dem Ansatz von Legendre ermittelte Differenz zwischen der geschätzten und der berechneten Anzahl der Primzahlen dem Betrag nach lediglich 45, während sie sich bei dem nach Gauß berechneten Algorithmus auf 6116 belief.
An dieser Stelle lohnt es sich, einen Blick auf Tabelle 1 zu werfen. Auch wenn diese Zusammenstellung nur einen groben Überblick über die Art und Aufbau der Primtabellen gibt, so wird dennoch deutlich, dass zum betrachteten Zeitpunkt keine Tabellen jenseits der Grenze 10^6 verfügbar waren. Damit sprach alles für den Ansatz von Legendre. Dennoch hatte der Formalismus von Legendere einen entscheidenden Nachteil. Der Faktor von 1.08633 war nicht zu erklären.
Erst die Berechnung umfangreicherer Primzahltabellen zeigte auf, dass der relative Fehler ab 10^7 anstieg. Dennoch ist der Ansatz von Legendre dem von Gauß auch im Zahlenbereich bis 10^{20} noch überlegen. Denn der Betrag der Differenz spricht immer noch für den Formalismus von Legendre.

Tab. 4: Die Gegenüberstellung der Ansätze von Gauß und Legendre

x	π(x)	x/ln(x) (Gauss)	x/(ln(x) – 1,08633) (Legendre)
10^1	4	4	8
10^2	25	21	28
10^3	168	144	172
10^4	1229	1085	1231
10^5	9592	8685	9588
10^6	78498	72382	78543

4 Das Logarithmische Integral

Gauß hielt allerdings an seiner ursprünglichen Idee fest und fasste sie noch weiter bzw. allgemeiner. Denn sein nächster Ansatz ging davon aus, dass die Dichte für große Primzahlen etwa 1/ln(x) ist. Er schloss dies u.a. aus der Tatsache, dass die Treppenfunktion für große Zahlenbereiche erstaunlich glatt ist. Damit kann die Anzahl der Primzahlen π (x) durch die Reihensumme

$$\pi(x) \approx \frac{1}{\log(2)} + \frac{1}{\log(3)} + ... + \frac{1}{\log(x)}$$

approximiert werden. Gauß entwickelte daraus das so genannte Logarithmische Integral Li mit

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log(t)}$$

In Tabelle 5 sind die Werte, die auf der Basis der Reihensumme, denen, die auf der Basis des Logarithmischen Integrals berechnet worden sind, gegenübergestellt.
Es zeigt sich dabei, dass die Differenz der Ergebnisse zwischen der Berechnung mit dem Logarithmischen Integral und der Reihensumme im Zahlenbereich 10^{12} relativ groß wird. Dies ist vor allem auf das numerische Rauschen bei der Berechnung zurück zu führen. Denn zum einen steigt die Anzahl der Rechenoperationen zur Bestimmung der Reihensumme enorm an und zum anderen wird die Summe selbst immer größer, während demgegenüber der Quotient von 1/ln(x) immer kleiner wird, so dass Probleme hinsichtlich der Exaktheit der Rechenoperationen entstehen. Ab diesem Zahlenbereich ist das Ergebnis, das auf der Basis des Integrals berechnet wurde sicherlich exakter.
Trägt man die Werte von $\pi(x)$ (gepunktet) und dem Logarithmischen Integral (rot durchgezogen) über dem betrachteten Zahlenbereich auf und vergleicht die beiden Graphen, dann stellt man eine erstaunliche Übereinstimmung im gesamten Verlauf bis 10^{21} fest.
Wie Tabelle 5 zeigt, ist das Verhältnis aus tatsächlicher Anzahl der Primzahlen und der durch das Logarithmische

Tab. 5: Die Gegenüberstellung von Reihensumme und Logarithmischem Integral

Zahlenbereich	Reihensumme	Logarithm. Integral	π (x)
10^1	6	5	4
10^2	30	29	25
10^3	177	177	168
10^4	1246	1245	1229
10^5	9630	9629	9592
10^6	78627	78627	78498
10^7	664918	664917	664579
10^8	5762209	5762208	5761455
10^9	50849235	50849234	50847534
10^{10}	455055614	455055614	455052511
10^{11}	4118066401	4118066400	4118054813
10^{12}	37607951957	37607950280	37607912018

Integral approximierten Anzahl immer kleiner als 1. Gauß vermutete darin eine zweite Gesetzmäßigkeit. Diese besagte, dass die durch Li(x) geschätzte Anzahl der Primzahlen immer größer ist als die tatsächliche. In diesem Fall erwies sich der Instinkt von Gauß als trügerisch, denn diese zweite Vermutung ist heute widerlegt. S. Skewes konnte 1933 als Erster eine obere Schranke für x angeben, unterhalb derer auf jeden Fall $Li(x) - p(x) < 0$ gelten muss ([3] bzw. [4]).
J. E. Littlewood hat sogar bewiesen, dass die obige Differenz beliebig oft positive als auch negative Werte annehmen kann. Allerdings ist der Satz von Littlewood lediglich ein Existenzsatz. D.h., es konnte bislang noch kein x angegeben werden, für das die Differenz $Li(x) - p(x)$ tatsächlich negativ wird.
In diesem Zusammenhang ist weiterhin interessant, einen Vergleich zwischen den Ergebnissen, die man durch die Berechnung mit dem Logarithmischen Integral und denen, die man durch den Ansatz von Legendre erhält, durchzuführen. Auch hier zeigt es sich wieder, dass sich der Vorteil des statistischen Ansatzes erst bei großen Zahlenbereichen bemerkbar macht. Bleibt man im Bereich der Primzahltabellen, wie sie zu Zeiten von Gauß üblich waren, dann bleibt der Legendresche Ansatz (unter

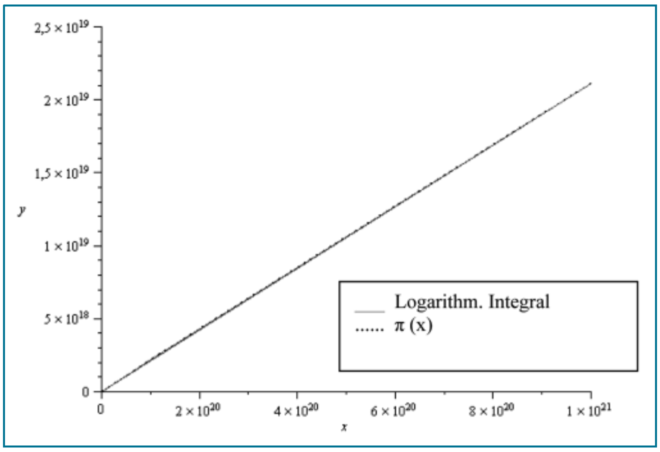

Abb. 3: Das Logarithmische Integral und p(x) als Graph

dem Gesichtspunkt der absoluten Genauigkeit betrachtet) der bessere. Erst im Zahlenraum ab 10^7 erweist sich das Logarithmische Integral als überlegen.
Noch deutlicher wird der Unterschied zwischen den beiden Ergebnissen, wenn man den relativen Fehler betrachtet. Wählt man exemplarisch die beiden Zahlenbereiche von 10^6 und 10^8 aus, dann steigt der relative Fehler bei dem Berechnungsverfahren nach Legendre von 0,6 Promille auf 1,1 Promille an. Im Vergleich dazu wird der relative Fehler unter Anwendung des Logarithmischen Integrals kontinuierlich geringer, erreicht bei 10^6 den Wert von 1,6 Promille und vermindert sich weiter, bis er bei 10^8 auf 0,1 Promille abfällt.

5 Zusammenfassung

Zahlreichen Lesern wird sicherlich die Anekdote bekannt sein, wonach der neunjährige Gauß seinen Lehrer Büttner dadurch verblüffte, dass er die Summe der Zahlen von 1 bis 100 (anderen Quellen zu Folge die von 1 bis 60) in nur wenigen Minuten berechnete (z.B. [6]). Er entdeckte dabei die so genannte Summenformel $0{,}5 * n * (n + 1)$, die schon den Griechen bekannt war. Die hier vorgestellte Vermutung stellt demgegenüber eine Pionierarbeit dar, deren Tragweite erst später aufgedeckt wurde.
Das, was ehemals als die Gaußsche Vermutung bezeichnet wurde, ist heute ein Anachronismus, denn die Vermutung hat sich zwischenzeitlich als wahr bzw. richtig erwiesen.

Tab. 6: Der Vergleich zwischen Logarithmischem Integral und der Gleichung von Legendre

Zahlenbereich	x/(ln(x) – 1,08633) (1)	Logarithm. Integral (2)	p(x) (3)	(3) – (1)	(3) – (2)
10^1	8	5	4	– 4	– 1
10^2	28	29	25	– 3	– 4
10^3	172	177	168	– 4	– 9
10^4	1231	1245	1229	– 2	– 16
10^5	9588	9629	9592	4	– 37
10^6	78543	78627	78498	– 45	– 129
10^7	665140	664917	664579	– 561	– 338
10^8	5768004	5762208	5761455	– 6549	– 753

Zwei Mathematiker – Jacques Salomon Hadamard sowie Charles Jean Gustave Nicolas Baron de la Vallée Poussin – haben nahezu zeitgleich, aber unabhängig voneinander, im Jahr 1896 den Nachweis erbracht, dass der nachstehende Zusammenhang

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\pi(x)}{x}}{\ln(x)} = 1$$

gilt. Diese Gleichung ist heute unter dem Namen Primzahlsatz bekannt. Die Gaußsche Vermutung war somit keine Vermutung mehr, sie war bewiesen.
Gauß hatte damit im Alter von nur sechzehn Jahren – möglicherweise war er sogar noch jünger als er mit den Arbeiten begonnen hat – intuitiv einen Zusammenhang erkannt, dessen Richtigkeit erst etwa 100 Jahre später bewiesen werden konnte. Er hatte damit ein weiteres Mal gezeigt, dass er zu Recht den Titel „Fürst der Mathematiker“ trägt.

Literatur

[1] Atkin, A. O. L.; Bernstein, D. J.: Prime sieves using binary quadratic forms, Math. Comp., 73, 2004, S. 1023 – 103

[2] Bühler, W. K.: Gauss – Eine biographische Studie, 8. Aufl., Springer, 1987

[3] Bundschuh, P.: Einführung in die Zahlentheorie, 5. Aufl., Springer, 2002

[4] Burton, D. M.; Dalkowski, H.: Handbuch der elementaren Zahlentheorie, Heldermann Verlag, 2005

[5] Schlötzer, A.: Der Heliotrop – Geschichte, Konstruktion und Genauigkeit. Königl. Universitätsbücherei Würzburg, 19909

[6] Wussing, H.: Carl Friedrich Gauß – Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 15, Teubner, 1982

Anschrift der Autoren:
Dr.-Ing. Norbert Rösch, Universität Karlsruhe, Geodätisches Institut, Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe, e-Mail: Norbert.Roesch@kit.edu
cand. geod. Frank Zimmermann, Hagsfelder Allee 16, 76131 Karlsruhe, e-Mail: zimfra@gik.uni-karlsruhe.de

Kurzfassung

Es wird die sogenannte Gaußsche Vermutung vorgestellt, die einen elementaren Zusammenhang in der Zahlentheorie vorweg nimmt. Ausgehend von Primzahltabellen hat C. F. Gauß im Alter von etwa sechzehn Jahren eine Gleichung entwickelt, die es erlaubt, die Anzahl der Primzahlen in einem vorgegebenen Intervall zu berechnen. Etwa 100 Jahre später konnte der Formalismus bewiesen werden.

Abstract

The Gauß conjecture is presented which is elementary in today’s number theory. At the age of sixteen C.F. Gauß developed a formula to approximate the total number of prime numbers within a given interval. About 100 years later the formula was proved to be true.