

# Berechnung von tangential anschließenden Ersatzkreisen in der Konturmesstechnik

## Determining Substitute Circles Using Tangential Connection in Contour Metrology

Hero Weber

Zur Messung geometrischer Größen werden in der Fertigungsmesstechnik häufig scannende Messgeräte eingesetzt, mit denen die Werkstückoberfläche punktweise in ihren Koordinaten erfasst wird. Zentraler Bestandteil der Auswertung ist die Approximation der Punkte durch geometrisch ideale Ersatzelemente, die häufig nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen wird. In diesem Beitrag wird am Beispiel der Kreisberechnung in der Konturmesstechnik gezeigt, wie durch die Einführung von geometrischen Nebenbedingungen des tangentialen Anschlusses mess- und anwendungstechnisch vorteilhafte Ergebnisse möglich sein können.

**Schlüsselwörter:** Ersatzelemente, Koordinatenmesstechnik, Konturmesstechnik, Ausgleichsrechnung, Fertigungsmesstechnik

*In production measuring metrology we frequently use scanning measuring devices, which measure coordinates of surface points. Approximating these points using geometric ideal substitute elements is an essential part of evaluation and we often use the method of least squares to determine these elements. Using the example of circle determination in contour metrology in this article we shall see, how geometric additional conditions like tangential connection with substitute elements bring us benefiting results in our applications.*

**Keywords:** Substitute element, coordinate metrology, contour metrology, method of least squares, production measurement metrology

### 1 EINLEITUNG

In der Geodäsie und ihren Teildisziplinen, insbesondere der Ingenieurvermessung und Photogrammetrie, ist die Ausgleichung von Messabweichungen seit fast 200 Jahren ein zentraler Bestandteil zur Gewinnung von Messergebnissen. Durch immer ausgefeiltere Rechenansätze können aus Messungen, die mit relativ großen Messabweichungen behaftet sind, Ergebnisse mit relativ kleinen Unsicherheiten geschätzt werden. Der Aufbau der Grundlagennetze der Landesvermessung Ende des 19. Jahrhunderts oder die rasante Entwicklung der Nahbereichsphotogrammetrie sind ohne Ausgleichsrechnung undenkbar. Im folgenden Beitrag sollen nun ähnliche, weitergehende und auch gänzlich unterschiedliche Auswertestrategien aus einer anderen technischen Disziplin vorgestellt werden: Im Maschinenbau

beschäftigt sich die Fertigungsmesstechnik insbesondere mit dem Messen und Prüfen geometrischer Größen an Werkstücken.

Ein gefertigtes Werkstück besitzt immer Abweichungen von seinen konstruktiven Vorgaben (Nennmaßen). Liegen diese Abweichungen innerhalb vorgegebener Toleranzen, ist die vorgesehene Verwendung des Werkstücks (die Werkstückfunktion) sichergestellt. Typische Werkstücke sind Kurbel- und Nockenwellen, Einspritzdüsen oder auch ganze Motorblöcke, an denen die Abweichungen mit teilweise kleiner als 1 µm toleriert sein können. Diese Abweichungen zu prüfen, ist nun eine Hauptaufgabe der Fertigungsmesstechnik. Besonders häufig müssen Form-, Lage- und Maßabweichungen sowie einzelne Rauheitskenngrößen geprüft werden.

Zu diesem Zweck wird in der Fertigungsmesstechnik die Oberfläche von Werkstücken mit Koordinaten-, Form- oder Oberflächenmessgeräten entlang von linienhaften Schnitten gescannt; diese Abtastung erfolgt meist berührend mit einer Tastkugel (z.B. Rubin-kugel mit 1 mm Durchmesser), einer Tastschneide (z.B. Stahlschneide mit 25 µm Durchmesser) oder einer Tastspitze (z.B. Diamantspitze mit 1 µm Radius). Ergebnis der Messung sind 2D- oder 3D-Koordinaten von Punkten, deren Abstände zueinander kleiner 1 µm sein können; die Auflösung der Koordinaten kann feiner als wenige Nanometer sein. Um nun aus dieser detailliert erfassten, mit Gestaltabweichungen behafteten Werkstückoberfläche einen zeichnungsgerechten Prüfentscheid zu gewinnen, werden die erfassten Messpunkte durch geometrisch ideale Formelemente approximiert (z.B. Geraden, Kreise, Ebenen, Zylinder oder auch Kegel und Kugeln).

## 2 STAND DER BERECHNUNG VON ERSATZKREISEN

Das in der Fertigungsmesstechnik wohl am häufigsten geprüfte Formelement ist der Kreis. Vier unterschiedliche Strategien gibt es, nach denen eine gescannte Kreiskontur durch einen Kreis approximiert bzw. ersetzt werden kann. Hierzu werden beide Mittelpunktkoordinaten und der Kreisradius so variiert bis das Approximationskriterium

erfüllt ist (drei Freiheitsgrade). Nach welchem Kriterium die Approximation durchgeführt wird, richtet sich nach dem Ziel der Messung; in der Praxis sind die Unterschiede der Auswertungen durchaus bedeutsam für den Prüfentscheid (Abb. 1).

Für *Formprüfungen* ist stets das Minimum-Kriterium zu verwenden: Zur Rundheitsprüfung wird die erfasste Kreiskontur durch einen Minimum-Kreis ersetzt, bei dem die größte Abweichung zur Istkontur minimiert wird („Minimum Zone Circle“, MZCir). Die zwei konzentrischen Kreise berühren die Istkontur in nur jeweils zwei Punkten. Für die *Lageprüfung* ist neben dem zu prüfenden Element immer auch ein sogenanntes Bezugselement erforderlich, das in der Konstruktionszeichnung eingetragen ist; die beiden konzentrischen Kreise berühren sich in jeweils nur einem Punkt. Beispiel: *An einer Welle bezieht sich die Rundlaufprüfung immer auf eine Achse und es wird ein Minimum-Kreis berechnet, dessen Mittelpunkt auf dieser Bezugsachse liegen muss. Für diese Kreisapproximation steht also nur noch ein Freiheitsgrad zur Verfügung (Kreisradius).*

Sollen eine Welle und eine Buchse miteinander gepaart werden, so erfordert die *Durchmesserprüfung* bei der Kreisberechnung das Hüll- und Pferch-Kriterium: Ein Hüll-Kreis umschließt die gesamte Istkontur bei kleinstmöglichem Durchmesser („Minimum Circumscribed Circle“, MCCir), ein Pferch-Kreis liegt mit größtmöglichem Durchmesser innerhalb der Kontur („Maximum Inscribed Circle“,

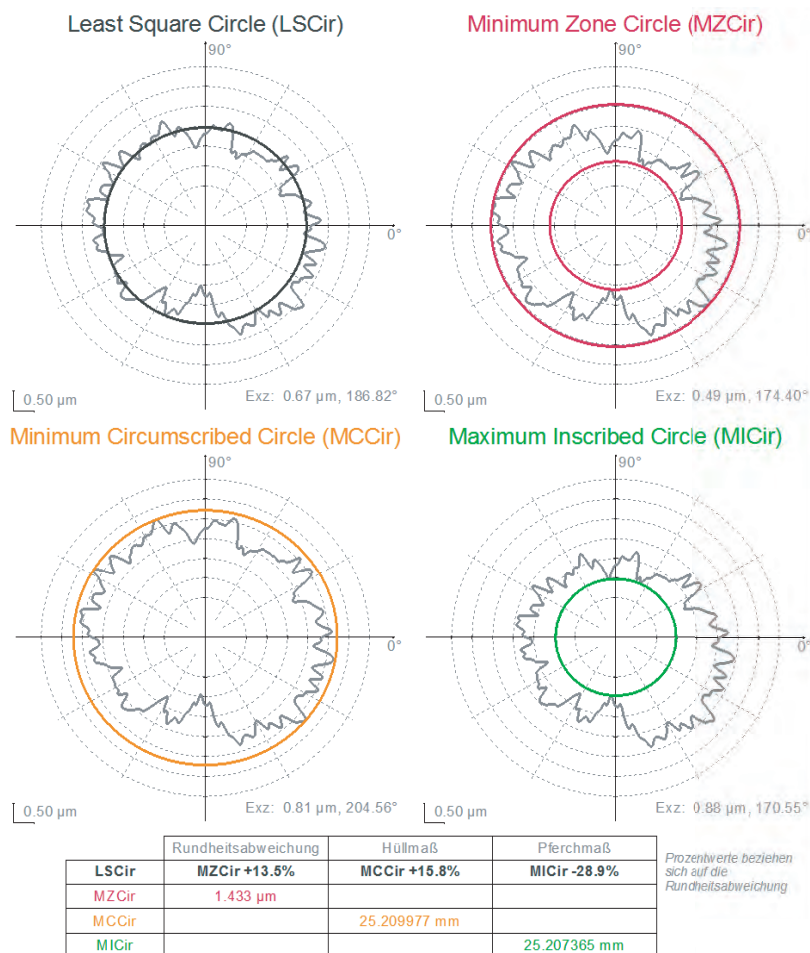


Abb. 1 | Unterschiede der vier Auswertestrategien zur Berechnung von Ersatzkreisen an einem Praxisbeispiel. Dargestellt sind tabellarisch die Maß- und Rundheitsabweichungen des „least-square“-Kreises bezogen auf die funktionsorientierten Auswertungen.

MICir)/Heinrichowski 1989/. Beide Ersatzkreise berühren die Istkontur in nur drei Punkten.

Für viele andere Prüfaufgaben wie z.B. *Abstands- oder Positionsprüfungen* wird in der Praxis häufig das „least-square“-Verfahren genommen (z.B. „Least Square Circle“, LSCir). Grund für diese nicht immer normgerechte Wahl ist die Robustheit dieses Verfahrens hinsichtlich evtl. vorhandener Ausreißer, da – anders als bei den normgerechten Verfahren – „least-square“-Elemente über alle Messpunkte gemittelt werden (Wirkung ähnlich wie bei einem starken Tiefpassfilter).

Anders als in der Koordinaten- oder Formmesstechnik überdecken in der *Konturmesstechnik* – bedingt durch die Gerätetechnik – Kreisprofile lediglich ein Segment von kleiner als  $180^\circ$ . Hier finden die Minimum-, Hüll- und Pferch-Kreise keine Anwendung, da ihre Berechnung mathematisch oder auch anwendungstechnisch nicht sinnvoll ist. Eine spezielle Art der Kreisberechnung jedoch kennt auch die Konturmesstechnik: Für Werkstückkonturen kann die Position eines Kreisbogens toleriert sein über den Mittelpunkt eines Kreises, der bei vorgegebenem Radius in die erfasste Kontur des Kreisbogens „fallen gelassen“ wird. Um diesen Kreis berechnen zu können, stehen der Auswertung zwei Freiheitsgrade (die beiden Mittelpunktkoordinaten) zur Verfügung.

### 3 TANGENTIAL ANSCHLIESSENDE ERSATZKREISE

Nachfolgend sollen nun Berechnungen von „least-square“-Kreisen vorgestellt werden, die durch die Einführung neuer Nebenbedingungen in der messtechnischen Anwendung Vorteile bieten können /Patentschrift 2012/.

### 3.1 SYSTEMATIK

Der tangentialer Anschluss eines „least-square“-Kreises an die häufig verwendeten Formelemente Gerade, Kreis und Punkt wird nachfolgend systematisiert. Die drei Freiheitsgrade des freien „least-square“-Kreises werden also auf zwei, einen oder sogar null Freiheitsgrade reduziert. Beispiel 1: Für die bestmögliche Einpassung eines Kreises unter der Nebenbedingung des tangentialen Anschlusses an eine Gerade stehen noch *zwei Freiheitsgrade* der Einpassung zur Verfügung (z.B. Radius und eine Koordinate des Mittelpunktes). Beispiel 2: Für die bestmögliche Einpassung eines Kreises unter der Nebenbedingung des tangentialen Anschlusses an zwei Geraden steht noch *ein Freiheitsgrad* der Einpassung zur Verfügung (z.B. Radius). Durch drei Anschlusselemente (also drei Nebenbedingungen) ist ein Ersatzkreis immer eindeutig definiert, d.h. die Berechnung eines „least-square“-Kreises ist gar nicht möglich, da *kein Freiheitsgrad* vorhanden ist. Beispiel: Kreis durch drei Punkte.

Die Fälle der Kreisberechnung mit *zwei Freiheitsgraden*, in denen ein Ersatzkreis tangential an ein festes Ersatzelement anschließen soll, zeigt *Abb. 2*; für das Anschlusselement Kreis sind abhängig vom Krümmungsverhalten zwei Fälle zu unterscheiden.

Beim tangentialen Anschluss eines Ersatzkreises an zwei Elementen steht für den Approximationskreis lediglich noch *ein Freiheitsgrad* zur Verfügung; meist wird der Radius variiert (*Abb. 3*). Sobald an mindestens einen Kreis angeschlossen wird, sind wieder verschiedene Krümmungsfälle zu unterscheiden.

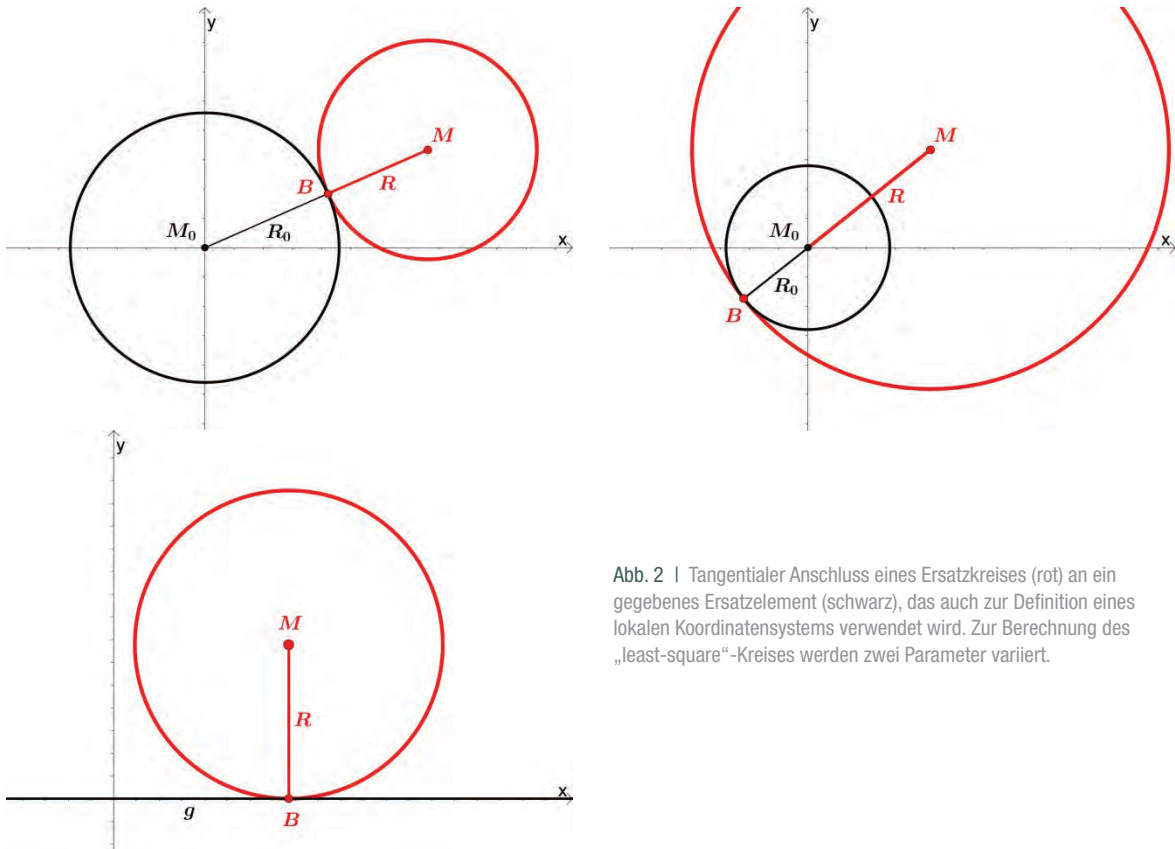


Abb. 2 | Tangentialer Anschluss eines Ersatzkreises (rot) an ein gegebenes Ersatzelement (schwarz), das auch zur Definition eines lokalen Koordinatensystems verwendet wird. Zur Berechnung des „least-square“-Kreises werden zwei Parameter variiert.

### 3.2 Exemplarische Beschreibung zweier Algorithmen

Der Ansatz, um aus  $n$  Messpunkten mit  $(x_i, y_i)$  mit  $i = [0, n[$  einen „least-square“-Kreis ohne Nebenbedingungen mit den drei Freiheitsgraden Radius  $R$  und Mittelpunkt  $(x_M, y_M)$  zu berechnen, ist bekannt:

$$d_i = \|\vec{x}_i - \vec{x}_M\| - R = \sqrt{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2} - R$$

$$f(R, x_M, y_M) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2} - R \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

Die Zielfunktion  $f$  ist dann minimal, wenn die Parameter  $R, x_M, y_M$  so gefunden sind, dass die drei partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial R}, \frac{\partial f}{\partial x_M}, \frac{\partial f}{\partial y_M}$  Null werden. Es existieren Lösungsverfahren, die ohne Startwerte direkt das Ergebnis liefern.

#### 3.2.1 Algorithmus 1: Ersatzkreis tangential an zwei Geraden

Nach einer Koordinatentransformation, durch die der Nullpunkt des Koordinatensystems im Schnittpunkt  $P_0$  der Tangenten  $g_1$  und  $g_2$  liegt und die  $y$ -Achse symmetrisch zu diesen verläuft (Abb. 3), liegen die beiden Tangenten in folgender Form (Steigung  $m$  der Tangenten, Steigungswinkel  $\alpha = \text{atan} m$ ) vor:

$$g_1: y = m \cdot x \qquad g_2: y = -m \cdot x$$

Der Radius  $R$  des gesuchten „least-square“-Kreises ist der freie Parameter. Abhängig von diesem Parameter erhalten wir die gesuchten Mittelpunktkoordinaten zu

$$x_M = 0 \qquad y_M(R) = \frac{R}{\cos \alpha}$$

Für die Abweichungen der Messpunkte  $(x_i, y_i)$  mit  $i = [0, n[$  zum gesuchten Kreis gilt

$$\begin{aligned} d_i &= \|\vec{x}_i - \vec{x}_M\| - R = \sqrt{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2} - R \\ &= \sqrt{x_i^2 + \left( y_i - \frac{R}{\cos \alpha} \right)^2} - R \end{aligned}$$

Für den „least-square“-Kreis muss nun durch Variation des Radius  $R$  die Summe der Abweichungsquadrate minimiert werden:

$$\begin{aligned} f(R) &= \sum_{i=0}^{n-1} d_i^2 \\ f(R) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt{x_i^2 + \left( y_i - \frac{R}{\cos \alpha} \right)^2} - R \right)^2 \rightarrow \text{Minimum} \end{aligned}$$

Mithilfe geeigneter numerischer Verfahren kann das Minimum immer iterativ mit hinreichender Genauigkeit gefunden werden (z. B. mit einem frei berechneten „least-square“-Kreis). Für die Koordinaten der beiden Übergangspunkte  $B$  zwischen dem Kreis und beiden Tangenten gilt dann:

$$x_{B_{1,2}} = \pm R \cos \alpha \qquad y_{B_{1,2}} = |x_{B_{1,2}}| \tan \alpha$$

### 3.2.2 Algorithmus 2: Ersatzkreis tangential an einen Kreis

Nach einer Koordinatentransformation, durch die der Nullpunkt des Koordinatensystems im Schnittpunkt  $M_0$  des Bezugskreises liegt (Abb. 2), gilt für den Bezugskreis:

$$K_0 : x^2 + y^2 = R_0^2$$

Der Radius  $R$  und die  $x_M$ -Koordinate des Mittelpunktes sind die beiden freien Parameter des gesuchten „least-square“-Kreises. Abhängig von diesen Parametern erhalten wir die gesuchte  $y_M$ -Koordinate des Mittelpunktes zu

$$y_M(R, x_M) = \pm \sqrt{(R \pm R_0)^2 - x_M^2}$$

Für die Abweichungen der Messpunkte  $(x_i, y_i)$  mit  $i = [0, n[$  zum gesuchten Kreis gilt

$$d_i = \|\vec{x}_i - \vec{x}_M\| - R = \sqrt{(x_i - x_M)^2 + (y_i - y_M)^2} - R$$

$$= \sqrt{x_i^2 + \left(y_i - \sqrt{(R \pm R_0)^2 - x_M^2}\right)^2} - R$$

Für den „least-square“-Kreis muss nun durch Variation von  $R$  und  $x_M$  die Summe der Abweichungsquadrate minimiert werden:

$$f(R, x_M) = \sum_{i=0}^{n-1} d_i^2$$

$$f(R, x_M) = \sum_{i=0}^{n-1} \left( \sqrt{x_i^2 + \left(y_i - \sqrt{(R \pm R_0)^2 - x_M^2}\right)^2} - R \right)^2 \rightarrow \text{Minimum}$$

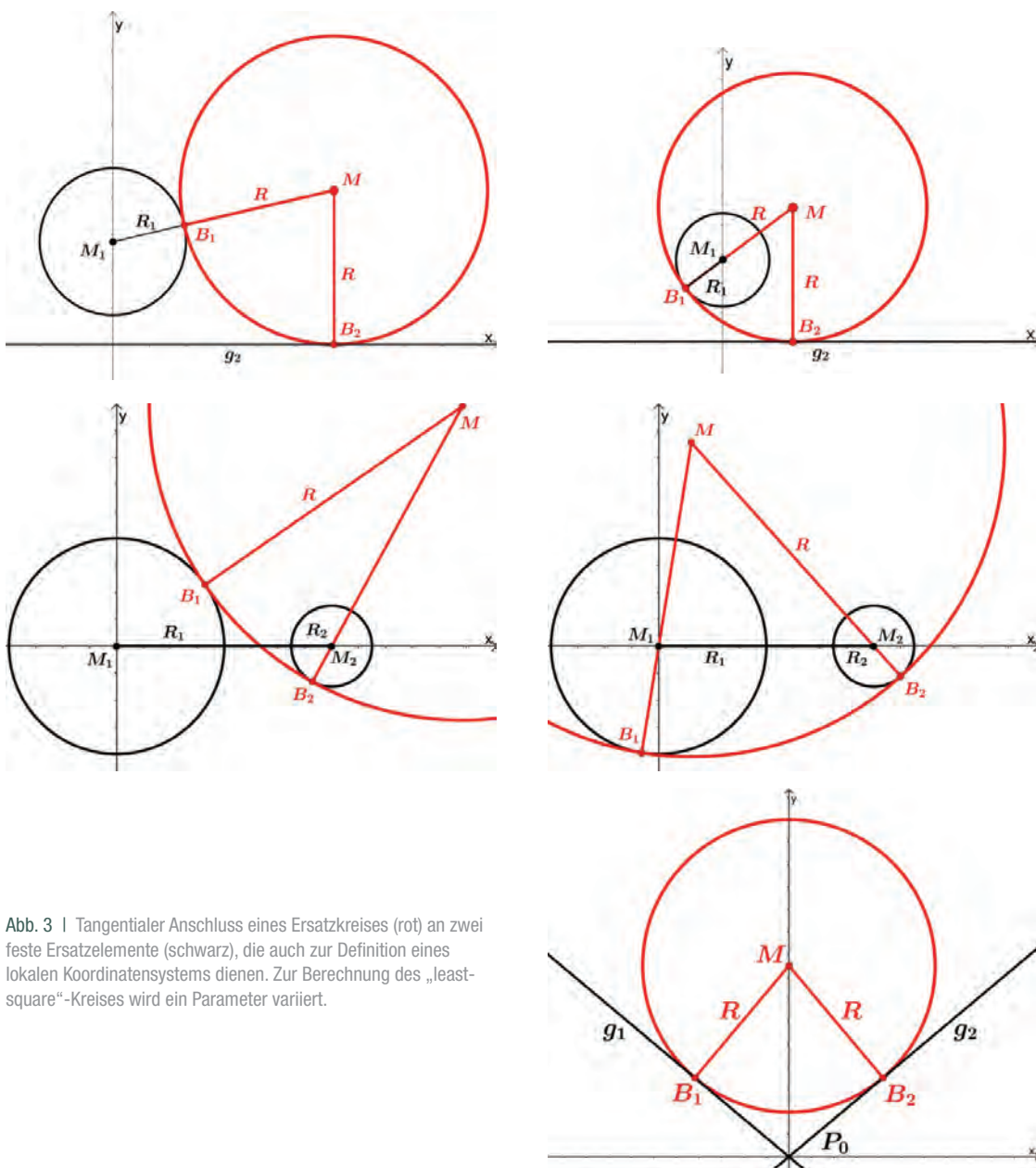


Abb. 3 | Tangentialer Anschluss eines Ersatzkreises (rot) an zwei feste Ersatzelemente (schwarz), die auch zur Definition eines lokalen Koordinatensystems dienen. Zur Berechnung des „least-square“-Kreises wird ein Parameter variiert.

Mithilfe geeigneter numerischer Verfahren kann das Minimum immer iterativ mit hinreichender Genauigkeit gefunden werden (z.B. mit einem frei berechneten „least-square“-Kreis). Für die Koordinaten der beiden Übergangspunkte zwischen dem Kreis und beiden Tangenten gilt dann:

$$x_B = x_M \frac{R \pm R_0}{R_0} \quad y_B = y_M \frac{R \pm R_0}{R_0}$$

## 4 MÖGLICHKEITEN DES PRAKTISCHEN EINSATZES IN DER KONTURMESSTECHNIK

### 4.1 Messortfindung

In der Konturmesstechnik müssen häufig kleinste Profilbereiche den geometrisch idealen Formelementen der Konstruktionszeichnung sicher zugeordnet werden können. Trotz inzwischen kleinster Messpunktabstände von z.B. 0,1 µm sind diese Zuordnungen, und hier insbesondere die Übergänge zwischen den Formelementen, häufig schwierig zu finden. Gerade die Radiusprüfung an Bögen kleiner Winkelsegmente reagiert empfindlich sogar auf kleinere Änderungen an den Grenzen der Profilbereiche.

Schneiden sich benachbarte Formelemente, so können die Übergangspunkte aus Schnitten vorläufig berechneter Ersatzelemente ermittelt werden, um dann aus den vergrößerten Bereichen die Ersatzelemente endgültig zu bestimmen. Häufig aber schließen bei einer Radiusprüfung zwei Geraden *tangential* an das Kreissegment, sodass Schnittberechnungen für die Übergangspunkte nicht sinnvoll erscheinen. Hilfsweise werden in der Praxis mit unterschiedlichem Erfolg Parallelen zur Ersatzgeraden gebildet und mit dem angrenzenden Profilbereich eines Kreisbogens geschnitten, um derart einen Übergangspunkt zu finden; abhängig vom festgelegten Abstand der Parallelen und von Gestaltabweichungen der Werkstückkontur sowie immer auftretenden Messabweichungen variieren die Übergangspunkte mehr oder weniger stark. Aus diesem Grund werden die Profilbereiche meist zu klein gewählt, sodass zwischen diesen Be-

reichen Profilpunkte keinem Formelement zugeordnet werden /Kedziora 2012/.

Berechnen wir nun die Ersatzelemente unter Berücksichtigung ihrer unmittelbaren Nachbarschaft, d.h. unter dem Zwang des tangentialen Anschlusses zu ihren Nachbarelementen, erhalten wir automatisch die bestmöglichen Übergangspunkte als Tangentenpunkte (Abb. 4). Für die Berechnung des Ersatzkreises wurde also die maximal mögliche Anzahl an Messpunkten verwendet.

### 4.2 Prüfung der Übergänge zwischen Formelementen

Wie bereits ausgeführt gibt man in der Praxis die Profilbereiche aus „Sicherheitsgründen“ meist kleiner an als in der Zeichnung vorgehen, um eine falsche Zuordnung zu vermeiden. „Lücken“ an den Übergangsstellen zwischen den Formelementen in der Kontur sind die Folge, die sich somit einer messtechnischen Beurteilung entziehen. Schneiden sich die Formelemente, so kann der unmittelbare Bereich des Schnittpunktes beispielsweise als Kantenbruch gleichsam „fliegend“ untersucht werden. Eine Möglichkeit ist die Prüfung sogenannter Kantenbrüche (Abb. 5) /DIN ISO 13715/.

Schließen nun zwei Ersatzelemente (z.B. zwischen Gerade und Kreis) nach Zeichnung und dann auch rechnerisch streng tangential an, können von allen Profilpunkten die Abweichungen normal zum Ersatzelement (überhöht) dargestellt werden (Abb. 6). Unter exakter Kenntnis der Übergangspunkte kann man also beurteilen, wie gut der tangential Anschluss im Herstellprozess realisiert werden konnte.

Der Unterschied zur reinen Linienformprüfung sei an einem Beispiel dargestellt: Bei einem Anschluss eines Kreises tangential an zwei Bezugsgeraden wird für diese spezielle Art der „Formprüfung“ der Kreisradius so lange variiert, bis die „least-square“-Bedingung erfüllt ist. Im Gegensatz hierzu würde bei einer Linienformprüfung eine entsprechende Sollkontur punktweise aus der Nenngeometrie erzeugt und auf diese – in ihren Radien und Winkeln unverändert – die Istkontur durch reine Verschiebung und Drehung eingepasst.

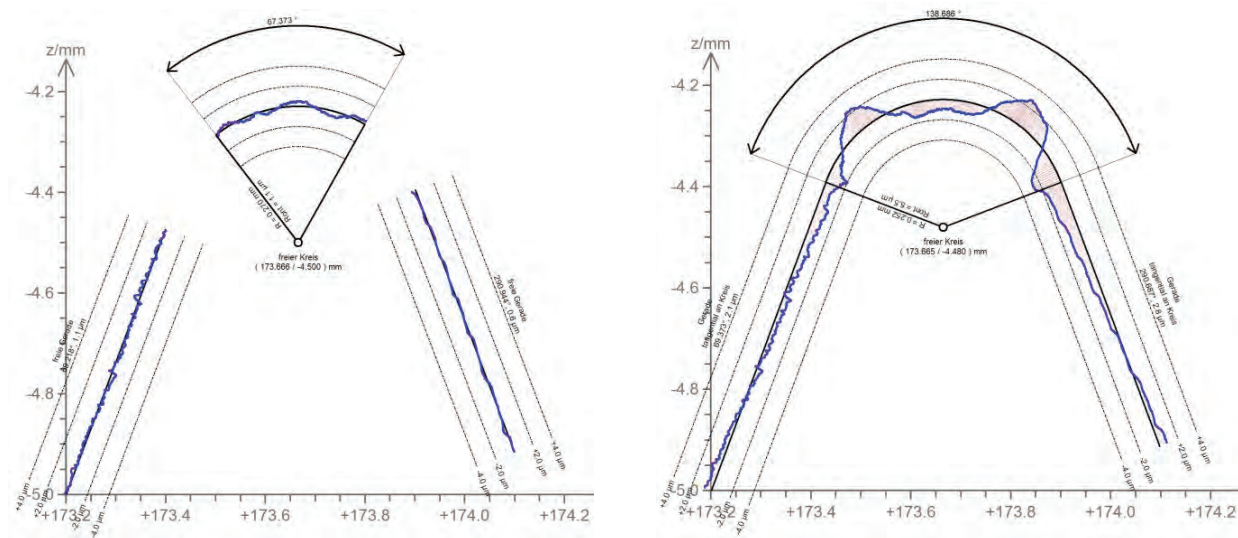
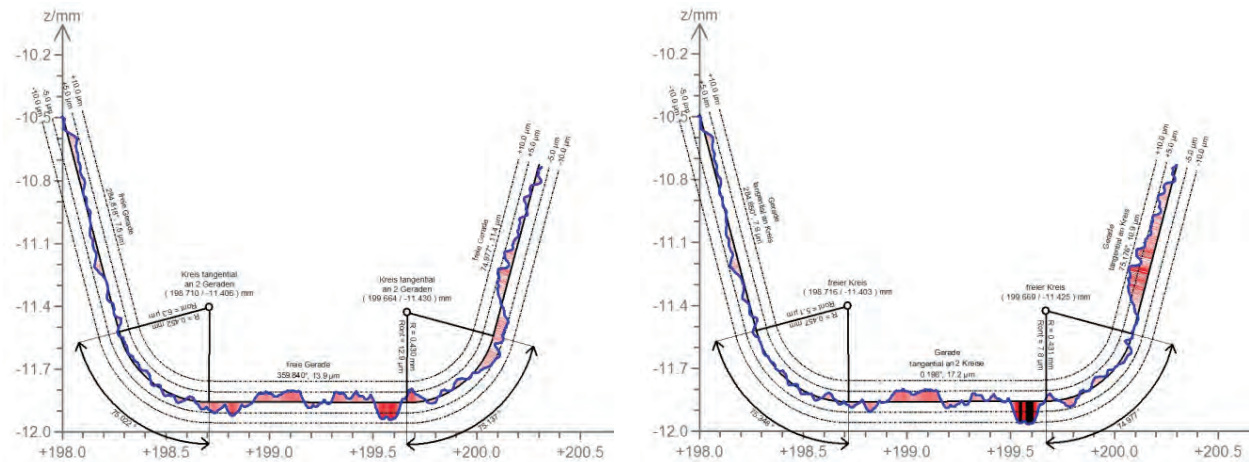


Abb. 4 | Beispiel einer Radiusbestimmung (freier „least-square“ Kreis bei „manueller“ Bereichswahl mit  $R = 0,270$  mm, links); freier „least-square“-Kreis, dessen Tangenten als „least-square“-Geraden die Übergangspunkte liefern, mit  $R = 0,292$  mm; außerdem erhalten wir den Winkel des vollständigen Segments  $138,68^\circ$  (rechts).





**Abb. 8** | Die drei „least-square“-Geraden werden frei bestimmt, die beiden „least-square“-Kreise sind jeweils unter Zwang beidseitig tangential anzuschließen ( $R = 0,452$  bzw.  $0,430$  mm, Segmentwinkel  $75,02^\circ$  bzw.  $75,13^\circ$ , links). Die zwei „least-square“-Kreise werden frei bestimmt, die drei „least-square“-Geraden unter dem Zwang, einseitig bzw. beidseitig anzuschließen ( $R = 0,457$  bzw.  $0,431$  mm, Segmentwinkel  $75,34^\circ$  bzw.  $74,98^\circ$ , rechts).

Beispiel: Berechnung des Radius eines Hüll-Kreises, der tangential an zwei Geraden anschließt. Hierzu müsste aus allen Profilpunkten derjenige gefunden werden, für den der Kreis mit Anschluss an die zwei Tangenten kleinstmöglichen Radius besitzt und dennoch alle Profilpunkte einschließt.

Der Übergang von der 2D-Konturmesstechnik zur 3D-Messtechnik wird zunehmend fließender: Einerseits werden aus 3D-Topographien 2D-Konturprofile zur weiteren Merkmalsberechnung extrahiert, andererseits werden zunehmend Konturmessgeräte um eine Y-Achse erweitert, sodass auch hier quasi 3D-Punktwolken gemessen werden. Räumliche Ersatzelemente, insbesondere Ebene und Zylinder, werden anstelle der vorgestellten ebenen Ersatzelemente in die Punktwolken eingepasst. Die Idee der tangentialen Anschlüsse für 2D-Ersatzelemente soll auf die 3D-Messtechnik erweitert werden. Beispiel: Die zugeordneten Messpunkte können durch einen Ersatzzylinder tangential anschließend an ein oder zwei Ebenen ersetzt werden. Die für die Konturmesstechnik genannten Vorteile sollten sich auch auf die 3D-Messtechnik übertragen lassen.

## LITERATUR

DIN ISO 13715 (2000): Technische Zeichnungen, Werkstückkanten mit unbestimmter Form. 12/2000.

Heinrichowski, M. (1989): Normgerechte und funktionsorientierte Auswertverfahren für punktweise erfasste Standardformelemente. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 1989.

Kedziora, H.-J. (2012): Auswertestrategien zur Verifikation komplexer Konturen. XIII. Internationales Oberflächenkolloquium Chemnitz, 12.-14. März 2012. Tagungsband, 119-126.

Patentschrift DE 10 2011 051 800 B3 (2012): Konturmessgerät und Verfahren zur Konturmessung eines Werkstücks mit tangential aneinanderschließenden Konturgeometrien. 07/2012.

**Prof. Dr.-Ing. Hero Weber**

JADE HOCHSCHULE OLDENBURG  
FACHBEREICH BAUWESEN UND GEOINFORMATION



Ofener Str. 16-19 | D-26121 Oldenburg  
hero.weber@jade-hs.de