Robuste Schätzung der Transformationsparameter einer räumlichen Helmert-Transformation

Robust Parameter Estimation of the Spatial Helmert-Transformation

Michael Lösler

Der Least-Median-Square gilt als ein robustes Schätzverfahren, welches auch bei einer großen Anzahl an Ausreißern i. d. R. zufriedenstellende Lösungen liefert, sodass er gerade bei automatisierten Prozessen Anwendung findet. Kanani (2000) evaluiert in ihrer Dissertation die Eignung dieses Schätzers für lineare Transformationen in der Ebene und erzielt vielversprechende Ergebnisse. Ausgehend von diesen Erkenntnissen wird das Verfahren auf den räumlichen Fall unter Zuhilfenahme einer Quaternion übertragen und es werden die Transformationsparameter einer 3D-Helmert-Transformation robust geschätzt.

Schlüsselbegriffe: **Transformation, Quaternion, Least-Median-Square, Reweighted-Least-Square, Robustes Schätzverfahren**

The Least-Median-Square is classified as a robust estimator, which also provides a reliable solution while the data set contains a large amount of outliers. For this reason, the estimator is often integrated in automated systems. Kanani (2000) evaluates the Least-Median-Square in the fields of linear 2D transformation and derives promising solutions. Based on her dissertation, in this work the Least-Median-Square will be assessed for transformation in space using quaternion algebra.

Keywords: **Transformation, Quaternion, Least-Median-Square, Reweighted-Least-Square, Robust Estimator**

AVN
ALLGEMEINE VERMESSUNGS-NACHRICHTEN

Dieser Beitrag wurde nach Begutachtung als
PEER REVIEWED PAPER
angenommen.
Tag der Einreichung: 03. Februar 2011

1 Motivation

Die Geodäsie ist mit der Methode der kleinsten Quadratsumme, die Gauß Anfang des 19. Jahrhunderts entwickelte, eng verbunden. Die positiven Eigenschaften dieser Methode als erwartungstreuer Schätzer sowie die leichte Implementierung in rechnergestützte Auswerteprogramme haben zu einer schnellen Verbreitung beigetragen. Bei der Auswertung von Messdaten kann daher die Methode der kleinsten Quadratsumme als Standardverfahren bezeichnet werden, da sie unter der Annahme normalverteilter Messwerte die wahrscheinlichste bzw. plausibelste Lösung liefert. In der Realität lässt sich diese Forderung nach normalverteilten Messwerten i. d. R. nicht erfüllen, sodass Abweichungen zu einer verzerrten Schätzung führen können. Insbesondere können grobe Messfehler, oft auch als Ausreißer bezeichnet, zu komplett unbrauchbaren Ergebnissen führen (Niemeier 2008).

Seit Mitte des letzten Jahrhunderts bis in die Gegenwart werden Verfahren zur Parameterschätzung mit dem Ziel entwickelt, weitgehend resistent gegenüber Ausreißern zu sein. Ein ausführlicher Überblick dieser sogenannten robusten Schätzer kann u. a. Jäger et al. (2005) entnommen werden. Derartige Verfahren sollen dabei die klassische Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadratsumme nicht ersetzen sondern lediglich ergänzen (Wicki 1999).

Gerade bei automatisierten Prozessen oder autonomen Anwendungen sind robuste Schätzverfahren nicht mehr wegzudenken. Als ein besonders resistenter Schätzer gilt hierbei der Least-Median-Square, der in vielen geodätischen Anwendungen bereits Einzug gehalten hat. So liefert ein mit dem Least-Median-Square vergleichbares Verfahren zur automatischen Bestimmung von Näherungskoordinaten sehr gute Ergebnisse und deckt zuverlässig grobe Fehler auf (Vetter 1992). Blankenbach und WILLERT (2009) wenden die Methode bei der Indoor-Positionierung erfolgreich an, wo es aufgrund von Störungen immer wieder zu z.T. erheblichen Fehlmessungen kommt. Die Eignung des Least-Median-Square für lineare 2D-Transformationen untersucht KANANI (2000) und erzielt zufriedenstellende Lösungen. Dieses Konzept soll in diesem Beitrag noch einmal aufgegriffen werden und um die dreidimensionale Helmert-Transformation erweitert werden.

2 Räumliche Helmert-Transformation

Die allgemeine Transformationsgleichung, um Koordinaten von einem System X_L in ein anderes X_G zu überführen, lautet

$$X_{G,i} = T + mRX_{L,i}, \tag{1}$$

worin m ein Maßstab, T ein 3×1-Verschiebungsvektor und R eine 3×3-Rotationsmatrix sind. Liegen keine Transformationsparameter vor, so können diese aus n homologen Punkten abgeleitet werden. Das nicht-lineare Gleichungssystem kann bei Vorgabe geeigneter Näherungswerte iterativ gelöst werden (z.B. BLEICH und ILLNER 1989).

Besonders elegant lassen sich die unbekannten Transformationsparameter in geschlossener Form mittels einer Quaternion bestimmen (z.B. HORN 1986, SHEN et al. 2006). Hierzu sind die auf den jeweiligen Schwerpunkt $\tilde{X}_L$ bzw. $\tilde{X}_G$ reduzierten Koordinaten x_L bzw. x_G zu bilden. Fasst man die beiden Systeme jeweils als eine $n \times 3$-Matrix G bzw. L auf, so lautet deren Produkt S

$$S = L^T G = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Die Quaternion q, durch die die Rotation beschrieben wird, entspricht dabei dem zum größten Eigenwert gehörenden Eigenvektor der symmetrischen Matrix N, die aus den Elementen von S gebildet wird.

$$N = \begin{bmatrix} S_{xx}+S_{yy}+S_{zz} & S_{yz}-S_{zy} & S_{zx}-S_{xz} & S_{xy}-S_{yx} \\ & S_{xx}-S_{yy}-S_{zz} & S_{xy}+S_{yx} & S_{zx}+S_{xz} \\ & & -S_{xx}+S_{yy}-S_{zz} & S_{yz}+S_{zy} \\ & & & -S_{xx}-S_{yy}+S_{zz} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Die Umformung von q, mit

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \mathbf{q} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \\ &\text{und} \quad i^2 + j^2 + k^2 = ijk = -1, \end{aligned} \tag{4}$$

in eine äquivalente Rotationsmatrix R lautet

$$R = (q_0^2 - \mathbf{q}^T\mathbf{q})I + 2\mathbf{q}\mathbf{q}^T - q_0^2[q\,\times], \tag{5}$$

worin $[q\,\times]$ die schiefsymmetrische Matrix

$$[q\,\times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

ist (NITSCHKE und KNICKMEYER 2000).

Der Maßstab m ergibt sich zu

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{G,i}^T R x_{L,i}}{\sum_{i=1}^{n} x_{L,i}^T x_{L,i}}, \tag{7}$$

sodass der noch fehlende Translationsvektor T aus

$$T = \tilde{X}_G - mR\tilde{X}_L \tag{8}$$

bestimmt werden kann. Wird in (1) die Rotationsmatrix durch (5) parametriert, so ist die Schätzung der unbekannten Transformationsparameter auch mit der Methode der kleinsten Quadratsumme möglich. Jedes homologe Punktpaar bringt dabei drei Gleichungen mit.

Der große Vorteil gegenüber den klassischen Rotationsmatrizen ist, dass faktisch keine Näherungswerte benötigt werden (GIELSDORF 2007). Im nachfolgenden wird daher diese Darstellung gewählt, sodass neben der Translation T und dem Maßstab m die vier Parameter der Quaternion q zu bestimmen sind. Der entstehende Rangdefekt wird durch die Nebenbedingung behoben, die Länge der Quaternion auf 1 zu normieren.

$$q^T q = 1 \tag{9}$$

3 Robuste Bestimmung der Transformationsparameter

Der Least-Median-Square nutzt die positiven Eigenschaften, die der Median beim Vorliegen von vielen groben Fehlern hat, aus. Die Minimierungsfunktion lautet

$$\min \operatorname*{med}_i v_i^2 \tag{10}$$

und minimiert den Median der quadrierten Verbesserungen (ROUSSEEUW 1984). Hierzu werden von den $3n$ Beobachtungsgleichungen u_j ausgewählt, mit denen das Gleichungssystem (1) eindeutig lösbar ist, und zu einem Subsample zusammengefasst. Im Fall der räumlichen Helmert-Transformation ist $u = 7$. Die Anzahl aller möglichen Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge ergibt sich hierbei aus (Jäger et al. 2005)

$$m_{max} = \binom{3n}{u}. \tag{11}$$

Subsamples, bei denen sich kein reguläres Gleichungssystem ergibt, sind dabei unzulässig (KANANI 2000). Mit dem aus diesem Subsample abgeleiteten Transformationsparametersatz P_j werden nun für alle Punkte die quadratischen Verbesserungen v_i^2 gebildet und der Median bestimmt. Diese Prozedur wird für alle möglichen Kombinationen analog wiederholt. Die Lösung von (10) entspricht letztlich dem Subsample, bei dem der Median am kleinsten ist. Bei einer geringen Anzahl an homologen Punkten ist die Anzahl an Permutationen im Prinzip unproblematisch. Zum einen ist jeweils nur ein kleines System von 8 Gleichungen zu lösen, zum anderen lässt sich der Berechnungsprozess elegant parallelisieren. Bei einer großen Anzahl an identischen Punkten steigt nach (10) auch die Anzahl der Permutationen extrem an. Aus diesem Grund kann die Anzahl der zufällig ausgewählten Subsamples m_{Sub} begrenzt werden, wenn ungefähr bekannt ist, wie groß der prozentuale Anteil ε an konterminierten Daten ist, und eine Wahrscheinlichkeit α, mit der mindestens ein fehlerfreies Subsample gezogen wird, vorgegeben wird (Rousseeuw und Leroy 2003).

$$m_{Sub} = \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln[1-(1-\epsilon)^u]} \tag{12}$$

Soll demnach bspw. mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.9 % mindestens ein fehlerfreies Subsample gezogen werden, so ist unabhängig von der Gesamtanzahl der Punkte n bei einem Anteil von 30 % fehlerbehafteten Daten $m_{Sub} = 81$. Statistisch gesehenen bedeutet dies, dass bei einem von 1000 Fällen kein fehlerfreies Subsample gezogen und somit keine plausible Lösung gefunden wird. In der Praxis kann bei heutiger Rechentechnik über diese Mindestanzahl an Subsamples problemlos hinausgegangen werden, sodass dann die Wahrscheinlichkeit, ein fehlerfreies Subsample zu ziehen, gegen eins bzw. 100 % strebt.
Da der mittels Least-Median-Square abgeleitete Transformationsparametersatz P_j lediglich aus u Beobachtungen abgeleitet wird, ist diese Lösung zwar eine robuste aber keine optimale im Sinne der Methode der kleinsten Quadratsumme. Rousseeuw und Leroy (2003) schlagen daher ein sich anschließendes Reweighted-Least-Square vor, welches fehlerfreie Messwerte in die finale Lösung mit einbezieht und gleichzeitig Ausreißer ausschließt. Als erste Näherung der unbekannten Parameter wird dabei die Lösung des Least-Median-Square herangezogen. Die Gewichte der einzelnen Beobachtungen w_i ergeben sich aus

$$w_i = \begin{cases} 1, & wenn \left|\frac{v_i}{\sigma_0}\right| \leq k \\ 0, & ansonsten \end{cases} \tag{13}$$

worin k so zu wählen ist, dass der endgültige Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ des Reweighted-Least-Square vergleichbar mit dem geschätzten Varianzfaktor der Methode der kleinsten Quadratsumme bei fehlerfreien Daten, und σ_0^2 eine robuste Schätzung des unbekannten Varianzfaktors ist (Kanani 2000).

$$\sigma_0 = 1.4826\left(1+\frac{5}{n-u}\right)\sqrt{\underset{i}{med}\, v_i^2} \tag{14}$$

Durch den Faktor 1.4826 führt (14) im Fall normalverteilter Fehler zu einer erwartungstreuen und robusten Schätzung des Varianzfaktors σ_0^2 (Jäger et al. 2005). Um bei geringer Redundanz einem zu optimistisch geschätzten Varianzfaktor entgegenzuwirken, schlagen Rousseeuw und Leroy (2003) darüber hinaus den empirisch ermittelten Korrekturfaktor $1 + 5/(n-u)$ vor, der bei großer Redundanz gegen eins strebt.
Der endgültige Varianzfaktor ergibt sich schließlich aus

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i v_i^2}{\sum_{i=1}^n w_i - u}}. \tag{15}$$

Jede Beobachtung, deren *robuste* normierte Verbesserung somit größer als die vorgegebene Schranke k ist, wird mit Null gewichtet und von der Ausgleichung ausgeschlossen. Ein zu klein gewähltes k steigert daher das Risiko, einen Fehler 2. Art zu begehen (False Positive), während ein zu großer Wert für k die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art erhöht.
Auch wenn der Least-Median-Square beim Vorliegen von vielen groben Fehlern durch das Ausnutzen der robusten Eigenschaften des Medians i. d. R. noch eine brauchbare Lösung liefert, ist dies nicht garantiert. Bestimmte geometrische Konstellationen können sogar dazu führen, dass der Least-Median-Square seine robusten Eigenschaften einbüßt und unplausible Resultate liefert (vgl. Atkinson und Weisberg 1991, Kampmann 1993, Xu 2005). Eine mögliche Modellmodifikation, die einem Scheitern entgegenwirken soll, schlagen Atkinson und Weisberg (1991) vor, indem sie die Gesamtredundanz innerhalb der Subsamples erhöhen. Statt der notwendigen Anzahl an Beobachtungsgleichungen u werden hierbei $u + s$ Beobachtungsgleichungen zu einem Subsample zusammengefasst.

4 Beispiel

Das nachfolgende Zahlenbeispiel in Tabelle 1 enthält 7 homologe Punkte im Start- bzw. Zielsystem und ist Shen et al. (2006) entnommen. Zu bestimmen sind die

Tabelle 1: Homologe 3D-Punkte (Shen et al. 2006)

	Startsystem			Zielsystem		
Pkt.nr.	X (m)	Y (m)	Z (m)	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	4157222.543	664789.307	4774952.099	4157870.237	664818.678	4775416.524
2	4149043.336	688836.443	4778632.188	4149691.049	688865.785	4779096.588
3	4172803.511	690340.078	4758129.701	4173451.354	690369.375	4758594.075
4	4177148.376	642997.635	4760764.800	4177796.064	643026.700	4761228.899
5	4137012.190	671808.029	4791128.215	4137659.549	671837.337	4791592.531
6	4146292.729	666952.887	4783859.856	4146940.228	666982.151	4784324.099
7	4138759.902	702670.738	4785552.196	4139407.506	702700.227	4786016.645

Tabelle 2: Transformationsparameter aus fehlerfreien Daten (MdkQ)

Parameter	MdkQ
T_x	641.8804 m
T_y	68.6553 m
T_z	416.3982 m
m	1.0000055825
q_0	–0.9999999999
q_1	–0.0000024204
q_2	0.0000021664
q_3	0.0000024073

Tabelle 3: Modifiziertes Zielsystem

	Zielsystem		
Pkt.nr.	X (m)	X (m)	X (m)
1	–4157870.237	664818.678	4775416.524
2	4149691.049	–688865.785	4779096.588
3	4173451.354	690369.375	–4758594.075
4	4177796.064	643026.700	–4761228.899
5	4137659.549	–671837.337	4791592.531
6	–4146940.228	666982.151	4784324.099
7	0	0	0

Transformationsparameter, die beide Systeme ineinander überführen.
In der Annahme eines deterministischen Startsystems und unkorrelierten, gleichgenauen Beobachtungen im Zielsystem ergeben sich die in Tabelle 2 abgedruckten Transformationsparameter.
Um die robusten Eigenschaften des vorgestellten Auswerteansatzes bei der räumlichen Koordinatentransformation zu demonstrieren, wird das Zielsystem derart modifiziert, dass der Punkt 7 in allen drei Komponenten Null ist und bei allen anderen Punkten jeweils eine Koordinatenkomponente negiert wird. Insgesamt liegen somit 9 grobe Fehler vor (Tabelle 3).
Tabelle 4 stellt die Lösung der Methode der kleinsten Quadratsumme den erzielten Ergebnissen des Reweighted-Least-Square Verfahren gegenüber. Während das Ergebnis, welches durch die Methode der kleinesten Quadratsumme abgeleitet wurde, erwartungsgemäß unbrauchbar ist, überzeugt das robuste Schätzverfahren in Anbetracht der hohen Anzahl an Beobachtungsfehlern durch eine erstaunlich gute Lösung.
Anhand der mit (13) abgeleiteten Gewichte lässt sich nachvollziehen, welche Beobachtungen bei der finalen Lösung eingeflossen und welche ausgeschlossen wurden. Die einhergehende Prüfung der Verbesserungen erscheint in diesem Zusammenhang lohnenswert, um die Größe des gewählten Grenzwertes k zu validieren. Tabelle 5 fasst die Gewichte und Verbesserungen der einzelnen Beobachtungsgleichungen zusammen und zeigt, dass alle Modifikationen am Zielsystem aufgedeckt wurden.

Tabelle 4: Transformationsparameter aus fehlerbehafteten Daten (MdkQ vs. RLS)

Parameter	MdkQ	RLS
T_x	262583595.3166 m	668.8674 m
T_y	603095339.0967 m	57.3346 m
T_z	162764263.2167 m	410.3447 m
m	106.2959656784	1.0000037230
q_0	–0.4553808214	–0.9999999999
q_1	–0.5204224268	–0.0000009978
q_2	–0.1569907859	0.0000042020
q_3	0.7050834691	0.0000025278

5 Schlussbetrachtung

Der auf ROUSSEEUW (1984) zurückgehende Least-Median-Square besitzt robuste Eigenschaften gegenüber konterminierten Daten und liefert i.d.R. auch dann noch brauchbare Lösungen, wenn eine große Anzahl an Ausreißern vorliegt. Gerade beim Einsatz von automatisierten Prozessen und autonomen Anwendungen ist der Einsatz solcher robusten Methoden notwendig, um plausible Lösungen zu erzielen. Im Bereich der linearen ebenen Helmert-Transformation evaluiert KANANI (2000) den Einsatz des Least-Median-Square Verfahrens und anschließender Neugewichtung. Hierbei erzielt sie vielversprechende Ergebnisse, weshalb dieses Konzept in diesem Beitrag auf die räumliche Helmert-Transformation über-

Tabelle 5: Gewichte und Verbesserungen der robusten Parameterschätzung

Pkt.nr.	w_x	v_x	w_y	v_y	w_z	v_z
1	0	8315740.357	1	–0.1072	1	–0.0397
2	1	–0.076	0	1377731.6153	1	–0.0218
3	1	0.062	1	0.0167	0	9517188.2806
4	1	–0.028	1	0.0452	0	9522458.1554
5	1	0.042	0	1343674.7258	1	–0.0264
6	0	8293880.4291	1	0.0453	1	0.0879
7	0	4139407.5124	0	702700.2150	0	4786016.5412

tragen wurde. Durch das Ersetzen der oft propagierten Rotationsmatrizen mit Eulerwinkeln durch eine Quaternion entsteht ein einfach zu lösendes System mit bilinearen Verbesserungsgleichungen, welches faktisch keine Näherungswerte mehr benötigt (GIELSDORF 2007). Das aufwendige Bestimmen von Startwerten kann somit entfallen, sodass diese Darstellung grundsätzlich auch bei der nicht-robusten Schätzung zu empfehlen ist. Da grobe Fehler auch ausschließlich in einer Koordinatenkomponente auftreten können, bspw. durch Zahlendreher, erscheint es nicht gerechtfertigt, nur Permutationen mit vollständigen homologen Punkten zuzulassen.

6 Literaturangabe

[1] ATKINSON, A.C., WEISBERG, S. (1991), Simulated annealing for the detection of multiple outliers using least squares and least median of squares fitting. In: Directions in Robust Statistics and Diagnostics I, Stahel, W., Weisberg S. (Hrsg.), Springer, New York, S. 7-20, ISBN: 978-0387975306.

[2] BLANKENBACH, J., WILLERT, V. (2009), Robuster räumlicher Bogenschnitt – Ein Ansatz zur robusten Positionsberechnung in Indoor-Szenarien. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 8/9, S. 320-327.

[3] BLEICH, P., ILLNER, M. (1989), Strenge Lösung der räumlichen Koordinatentransformation durch iterative Berechnung. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 4, S. 133-144.

[4] GIELSDORF, F. (2007), Ausgleichungsrechnung und raumbezogene Informationssysteme. Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft-Nr. 593, München, ISBN: 376-9650328.

[5] HORN, B.K.P. (1987), Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America, 4, S. 629-642.

[6] KAMPMANN, G. (1993), Auswertetechniken bei der überbestimmten Koordinatentransformation. BDVI-FORUM 3/1993, S. 139-152.

[7] KANANI, E. (2000), Robust Esitmators for Geodetic Transformations and GIS. ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ISBN: 978-3906467269.

[8] JÄGER, R., MÜLLER, T., SALER, H., SCHWÄBLE, R. (2005), Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, ISBN: 978-3879073702.

[9] NIEMEIER, W. (2008), Ausgleichungsrechnung – Statistische Auswertemethoden. 2. Auflage, de Gruyter, Berlin, ISBN: 978-3110190557.

[10] NITSCHKE, M., KNICKMEYER, E.H. (2000), Rotation Parameters – A survey of Techniques. Journal of Surveying Engineering, 126, S. 83-105.

[11] ROUSSEEUW, P.J. (1984), Least Median of Squares Regression. Journal of the American Statistical Association, 79, S. 871-880.

[12] ROUSSEEUW, P.J., LEROY, A.M. (2003), Robust Regression and Outlier Detection. John Wiley & Sons, New Jersey, ISBN: 978-0471488552.

[13] SHEN Y.Z., CHEN Y., ZHENG, D.H. (2006), A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. Journal of Geodesy, 80, S. 233-239.

[14] VETTER, M. (1992), Automatische Berechnung zweidimensionaler Näherungskoordinaten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 6, S. 245-255.

[15] WICKI, F. (1999), Robuste Schätzverfahren für die Parameterschätzung in geodätischen Netzen. ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ISBN: 978-3906467160.

[16] XU, P. (2005), Sign-constrained robust least squares, subjective breakdown point and the effect of weights of observations on robustness. Journal of Geodesy, 79, S. 146-159.

Anschrift des Autors:
MICHAEL LÖSLER
Bundesamt für Kartographie und Geodäsie
Richard-Strauss-Allee 11
60598 Frankfurt am Main
E-Mail: michael.loesler@bkg.bund.de