



Zur Berechnung des Refraktionseinflusses bei gegenseitiger trigonometrischer Höhenmessung

O. A. Mozzuchin

An praktischen Beispielen wird die Berechnung des Refraktionseinflusses bei der gegenseitigen trigonometrischen Höhenübertragung unter Anwendung der Ähnlichkeits- und Modellierungstheorie aufgezeigt und belegt, dass sich mit höchst einfachen Mitteln für bestimmte Bereiche der geodätischen Praxis der Einfluss der Refraktion eliminieren lässt.

1 Grundlagen

Wegen der Beugung des optischen Strahls in der Atmosphäre (Refraktion) lassen sich die technischen Möglichkeiten moderner geodätischer Instrumente, die die Geradlinigkeit des Visierstrahls voraussetzen, nur ungenügend nutzen. Diesem Problem wurde während der Entwicklungsgeschichte der Geodäsie große Aufmerksamkeit geschenkt.

Eine Methode zur Bestimmung von Refraktionskorrekturen im Nivellement ist in [8, 9, 10] behandelt. Diese Methode nutzt die Ähnlichkeitstheorie, die Erscheinungen als ähnlich betrachtet, wenn sie von gleicher physikalischer Natur sind und sich durch Analogie und Modellbildung übertragen lassen. Die Grundlagen dieser Theorie wurden am Anfang des vorigen Jahrhunderts u.a. in den Werken von Nusselt, W., Buckingham, E., Rayleigh formuliert. Anschließend wurden ihre Ideen systematisiert und in der Wärmephysik, Hydromechanik, Meteorologie usw. benutzt.

Die Haupteigenschaft der auftretenden Phänomene besteht in der Existenz von dimensionslosen Komplexen, die einen und denselben Zahlenwert beibehalten:

$$\pi = idem, \tag{1}$$

wobei idem „entsprechend gleich“ bedeutet.

Beim einseitigen trigonometrischen Nivellement gilt nach [1, 6, 7]:

$$a = \frac{\bar{\gamma} \cdot z}{\gamma_1^{0,2}} = idem, \tag{2}$$

Mit den drei Parametern: integraler Temperaturgradient $\bar{\gamma}$, Höhe des Strahls z und Temperaturgradient γ_1 in der Höhe $z = 1$ m, die am Versuchsobjekt (dem Modell) bestimmt werden. In diesem Fall findet man die gesuchte Variable

für das Naturobjekt (auszuführende Messung) anhand der Korrelation

$$\bar{\gamma} = a \cdot \gamma_1^{0,2} / z. \tag{3}$$

γ_1 und z können leicht gemessen werden. Die Größe des systematischen Fehlers bestimmt man nach der bekannten Formel:

$$\rho = 39,5pT^2S^2(0,0342 - \bar{\gamma}) \cdot 10^{-6}, \tag{4}$$

mit dem Luftdruck p (mb), der Lufttemperatur T (K) und der Strecke S zwischen den Messpunkten. Hieraus kann der integrale Temperaturgradient, dessen Vorzeichen in Abhängigkeit von der Höhe bei fallender Lufttemperatur positiv ist, mit folgender Formel berechnet werden:

$$\bar{\gamma} = 0,0342 - \left(\frac{\rho_0 \cdot T^2}{39,5 \cdot p \cdot S^2} \right) \cdot 10^{-6}, \tag{5}$$

mit $\rho_0 = h - h_0$ Differenz der Messergebnisse zwischen der trigonometrischen Höhenübertragung und dem geometrischen (präzisen) Nivellement.

Der geometrische Parameter z in der Formel (3) kann durch die mittlere Höhe z_m ersetzt werden, die entweder nach der Simpson-Formel oder mit Hilfe der komplexen Zahl $z = (z_{cp} \cdot J)^{0,7}$ bestimmt wird. Hier ist J die Höhe des Instruments; diese Art der Ermittlung von z wird bevorzugt, wenn die Messungen von Stativen ausgeführt werden.

Der zu bestimmende Wert h besteht aus zwei Größen: Eine dieser Größen ist eine gesuchte Konstante, und die andere ist eine reguläre Variable, die als systematischer Fehler auftritt.

Das Resultat der gegenseitigen trigonometrischen Höhenmessung h_m enthält den systematischen Fehler [4, 5]:

$$\delta = h_m - h_0 = 0,5(\rho_1 - \rho_2) = 0,5(\rho_1 + \rho_2) \frac{\rho_1/\rho_2 - 1}{\rho_1/\rho_2 + 1}. \tag{6}$$

Dabei entsprechen $\rho_1 = h_1 - h_0$, $\rho_2 = h_2 - h_0$, $\rho_\Sigma = \rho_1 + \rho_2 = h_1 - h_2$, wobei der Index 1 die Messungen kennzeichnet, die zum höher gelegenen Punkt durchgeführt werden; während der Index 2 die Messungen angibt, die zum tiefer gelegenen Punkt ausgeführt werden.

In dimensionsloser Form gilt für Gl. (6):

$$C = \frac{\rho_1/\rho_2 - 1}{\rho_1/\rho_2 + 1} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{2\delta}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{7}$$

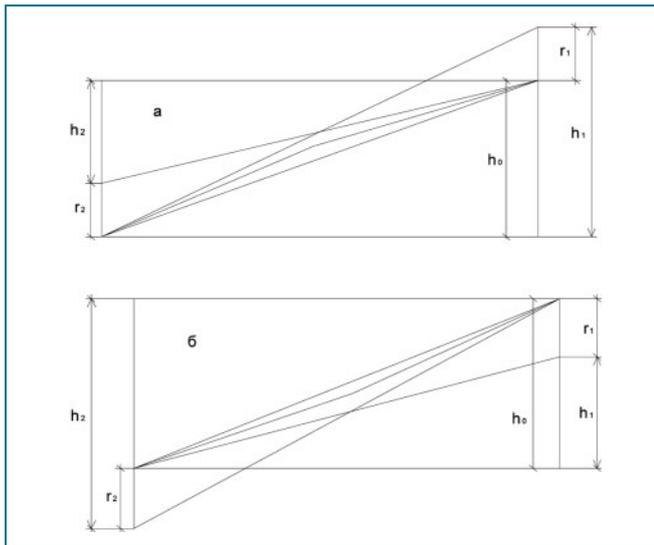


Abb. 1: Schema zum Einfluss der Refraktion bei gegenseitiger trigonometrischer Höhenmessung

Da die Summe der Parameter ρ_Σ bei gegenseitiger Höhenmessung bekannt ist, kann die Bestimmung des Koeffizienten C mit der Bestimmung der gesuchten Zahlendifferenz $\rho_1 - \rho_2$, und folglich mit dem systematischen Fehler δ gleichgesetzt werden. Anhand der Formel (4) erhalten wir:

$$\rho_1 - \rho_2 = 39,5 \cdot p \cdot T^{-2} \cdot S^2 (\bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1) \cdot 10^{-6}, \quad (8)$$

$$\Delta \bar{\gamma} = \bar{\gamma}_2 - \bar{\gamma}_1 = \frac{(\rho_1 - \rho_2) \cdot T^2}{39,5 \cdot p \cdot S^2} \cdot 10^6. \quad (9)$$

Die charakteristische Besonderheit der bodennahen Luftschicht ist die Ausbildung einer Konvektionsunterschicht von 15–20 m Höhe in den Tagesstunden des Sommers. Infolge der Zunahme der Luftdichte in dieser Unterschicht mit der Höhe ist ein optischer Strahl nach unten gewölbt (Abbildung a in Abb. 1) und bei umgekehrter Messrichtung nach oben (Abbildung b in Abb. 1). Die systematischen Fehler $\rho_1, \rho_2, \rho_\Sigma$ sind im ersten Fall negativ und im zweiten Fall positiv. Die tatsächliche Größe des Temperaturgradienten in der Unterschicht übersteigt den Gradienten der Autokonvektion $\gamma_A = 0,0342 \text{ K/m}$ ($\bar{\gamma} \geq \gamma_A$). Außerhalb seiner Grenzen gilt ($\bar{\gamma} \leq \gamma_A$).

2 Theoretische Begründung

Nach Einsetzen der Korrelation (3) in (8) zeigt sich, wenn die Parameter γ_1 und z auf den Linienendpunkten gleich sind, dass ihr Einfluss auf das Ergebnis des gegenseitigen Nivellements unbedeutend ist. Die Größe und das Vorzeichen des systematischen Fehlers δ werden durch die Koeffizienten a_1 und a_2 (vgl. Gl. (2)) bestimmt, die zu Messungen mit positiver und negativer Neigung gehören. Betrachten wir als Modell gleichzeitige gegenseitige Messungen von Stativen aus, zwischen denen die Größe h_0 durch hochpräzises Nivellement bestimmt ist, so lassen sich die Parameter $\rho_1, \rho_2, \rho_\Sigma$ berechnen. Wenn dann die Temperaturgradienten $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_m$ mit der Formel (5) ermit-

telt werden bzw. für die Berechnung von $\bar{\gamma}_m$ die Beziehung $0,5 \rho_\Sigma$ benutzt wird, können hieraus dimensionslose Zahlen abgeleitet werden:

$$k_1 = \bar{\gamma}_1 / \bar{\gamma}_m, k_2 = \bar{\gamma}_2 / \bar{\gamma}_m, k = \Delta \bar{\gamma} / \bar{\gamma}_m. \quad (10)$$

Diese lassen sich bei der Ermittlung der Integralgradienten (und schließlich der Korrekturen) mit den Naturobjekten bestimmen:

$$\bar{\gamma}_1 = k_1 \cdot \bar{\gamma}_{cp}, \bar{\gamma}_2 = k_2 \cdot \bar{\gamma}_{cp}, \Delta \bar{\gamma} = k \cdot \bar{\gamma}_{cp}. \quad (11)$$

Das Verhältnis der Zahlen k_1, k_2, k bleibt unveränderlich in den Grenzen der Gruppe solcher Erscheinungen. Der Begriff „Gruppe“ schließt die Bedingungen ein, durch die Messungen auf dem Modell begleitet werden: Die Tagesstunden im Sommer bei warmem, klarem Wetter (labile thermische Stratifikation).

3 Messungen am Modellobjekt

Gleichzeitige gegenseitige Messungen sind im Gebiet von Nizhny Novgorod auf einer Linie mit $S = 620,5 \text{ m}$, $h_0 = 1759 \text{ mm}$; $z_m \sim 3 \text{ m}$ im Juli ($T = 293 \text{ K}$, $p = 1010 \text{ mb}$) von Stativen auf den Basisendpunkten ausgeführt worden. Die Messergebnisse sind in Tabelle 1 aufgelistet:

Zum Beispiel wurden um 11 Uhr $h_1 = 1727 \text{ mm}$, $h_2 = -1838 \text{ mm}$ gemessen. Daraus ergibt sich: $\rho_1 = 1727 - 1759 = -32 \text{ mm}$; $\rho_2 = -1838 + 1759 = -79 \text{ mm}$; $\rho_\Sigma = -h_2 + h_1 = -111 \text{ mm}$. In Spalte 7 werden die Werte für den Koeffizienten C gezeigt, die vom Vorhandensein der Gesetzmäßigkeit in der Veränderung der Parameter ρ_1 und ρ_2 zeugen.

Mit den Mittelwerten erhalten wir nach Vertauschung in (5): $\bar{\gamma}_1 = 0,2522 \text{ K/m}$; $\bar{\gamma}_2 = 0,4254 \text{ K/m}$; $\bar{\gamma}_{cp} = 0,3388 \text{ K/m}$.

Anhand von [11] ergibt sich daraus: $k_1 = 0,74$; $k_2 = 1,26$; und die systematischen Fehler können nach den Formeln berechnet werden:

$$\rho_1 = 39,5 p T^2 S^2 (0,0342 - k_1 \bar{\gamma}_m) \cdot 10^{-6},$$

$$\rho_2 = 39,5 p T^2 S^2 (0,0342 - k_2 \bar{\gamma}_m) \cdot 10^{-6}. \quad (12)$$

Danach ist es nicht schwer $\delta = 0,5 (\rho_1 - \rho_2)$ zu berechnen, was auch mit Hilfe der Korrelation gefunden werden kann:

$$\delta = 19,75 \cdot p \cdot T^{-2} \cdot S^2 \cdot k' \cdot \bar{\gamma}'_m, \quad (13)$$

$k' = \Delta \bar{\gamma}'_m \cdot \bar{\gamma}'_m$ wird mit Hilfe des zweiten Gliedes der Formel (5) berechnet, da die Konstante $0,0342 \text{ K/m}$ in der Differenz der Zahlen $\rho_1 - \rho_2$ nicht auftritt. Den Angaben in der Tabelle 1 entsprechend erhalten wir $k' = 0,1732 / -0,03046 = -0,57$.

4 Prüfen der Methode

4.1 Refraktionsuntersuchungen im Gebiet von Lvov

Die Untersuchungen wurden im Vorgebirge der Karpaten im September ausgeführt [2]. Die Lufttemperatur betrug etwa $15 \text{ }^\circ\text{C}$ bei einem Luftdruck von 990 mb . Die Messungen erfolgten von Stativen aus mit $S = 2835,8 \text{ m}$;



Tab. 1

Lfd. Nr.	Zeit, Stunde	ρ_1 , mm	ρ_2 , mm	ρ_Σ , mm	$\rho_1 - \rho_2$, mm	C
1	2	3	4	5	6	7
1	11,0	- 32	- 79	- 111	47	- 0,42
2	11,5	- 37	- 59	- 96	22	- 0,23
3	12,0	- 40	- 68	- 108	28	- 0,26
4	12,5	- 46	- 70	- 116	24	- 0,21
5	13,0	- 36	- 73	- 109	37	- 0,34
6	14,0	- 44	- 70	- 114	24	- 0,21
	Mittel	- 39	- 70	- 109	31	- 0,28

Tab. 2

Lfd. Nr.	Zeit, Stunde	ρ_{01} , mm	ρ_{02} , mm	$\rho_{0\Sigma}$, mm	$\rho_{01} - \rho_{02}$, mm	ρ_1 , mm	ρ_2 , mm	$\rho_1 - \rho_2$, mm
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	81	119	200	- 38	74	124	- 57
2	10	65	96	16	- 31	60	100	- 46
3	11	34	81	125	- 44	46	77	- 36
4	14	28	56	84	- 28	31	52	- 24
5	16	33	104	137	- 71	51	85	- 39
	Mittel	48	91	139	- 43	51	87	- 40

$h_0 = 20427$ mm; $z_m \sim 30$ m. Die Messergebnisse finden sich in den Spalten 3–6 der Tabelle 2.

Die mit dem Index 0 gekennzeichneten Spalten entsprechen Ergebnissen, die mit Hilfe unmittelbarer Messungen erzielt wurden. In den Spalten 7–9 sind die Werte angegeben, die mit den Angaben der Spalte 5 und dem Einsatz der mit dem Modell erhaltenen Koeffizienten berechnet wurden.

Die Mittel der gemessenen δ_0 und der berechneten systematischen Fehler δ sind praktisch gleich, was von der Effektivität der Methode zeugt. Es sei angemerkt, dass die Messungen nur in der Höhe auszuführen sind, die größer als die Höhe der Konvektionsunterschicht ist.

Die Ausgangsdaten der nächsten Beispiele sind dem Werk [3] entlehnt. Die Messungen wurden im flachen Gelände (Moskauer Gebiet) ausgeführt. Der prinzipielle Unterschied zu den Modellmessungen besteht in den unterschiedlichen Instrumentenhöhen auf den Linienendpunkten.

4.2 Messungen in der Konvektionsunterschicht mit unterschiedlichen Instrumentenhöhen

Die Größen ρ_{01} und ρ_{02} wurden auf einer Linie von 1006 m bei einer Höhe des Zielstrahls $z_m \sim 3,5$ m erhalten. Es wurde von Stativen mit Höhen von $J_1 = 1,5$ m und $J_2 = 2,4$ m im Juli bei $T = 298$ K und $p = 994$ mb beobachtet.

Die in Spalte 8 (Tab. 3) mit Hilfe der Modellwerte berechneten systematischen Fehler zeigen Werte, die in ihrer Größe nahe bei δ_0 liegen, aber mit umgekehrten Vorzeichen. In diesem Fall muß man für die Bestimmung des Vorzeichens die Berechnung der Parameter ρ_1 und ρ_2 nach den Formeln (3,4) mit Hilfe des komplexen Parameters z vornehmen.

Unter Berücksichtigung der zuvor gemachten Angaben erhalten wir: $\rho_1 = 81$ mm, $\rho_2 = -53$ mm. Hieraus ergibt sich $C = 0,21$, womit sich der systematische Fehler δ mit

Tab. 3

Lfd. Nr.	Zeit, Stunde	ρ_{01} , mm	ρ_{02} , mm	δ_0 , mm	C_0	γ_1 K/m	δ , mm
1	2	3	4	5	6	7	8
1	8	- 44	- 25	- 10	0,27	0,07	20
2	10	- 95	- 55	- 20	0,27	0,16	21
3	12	- 117	- 68	- 25	0,26	0,18	26
4	14	- 156	- 71	- 42	0,37	0,17	32
5	16	- 91	- 50	- 20	0,29	0,16	20
	Mittel	- 101	- 54	- 23	0,29	0,15	24



Tab. 4

Lfd. Nr.	Zeit, Stunde	ρ_{01} , cm	ρ_{02} , cm	δ_0 , cm	C_0	γ_1 , K/m	δ , cm
1	2	3	4	5	6	7	8
1	7,4	338	292	23	0,07	0,11	22
2	9,3	266	226	20	0,10	0,25	17
3	11,3	230	208	11	0,05	0,25	15
4	13,5	248	204	22	0,10	0,25	16
5	17,5	311	279	16	0,05	0,20	21
	Mittel	279	242	18	0,07	0,21	18

Hilfe der in der Tabelle aufgeführten Werte berechnen lässt, aber weniger genau, weil $C < C_0$ ist.

4.3 Messungen von Signaltürmen aus

Die Messungen wurden am 28. Juni ($T = 293$ K, $p = 994$ mb) auf einer Linie mit den Charakteristiken $S = 16881$ m; $z_m \sim 35$ m; $J_1 = 12,6$ m; $J_2 = 8,6$ m ausgeführt.

In Analogie zum vorigen Beispiel finden wir auf Grund der Formeln (3,4) $\rho_1 = 311$ cm, $\rho_2 = 269$ cm, $C = 0,07$. Nach Multiplizieren der Summen ρ_{01} und ρ_{02} mit 0,07 ergeben sich die Größen δ in Spalte 8 (Tab. 4). Diese Werte liegen nahe bei den gemessenen.

4.4 Zweiseitige Messungen in der Konvektionsunterschicht bei extrem differierenden Instrumentenhöhen

Die Messungen wurden stündlich im Laufe von 3 Tagen (16–18 August) auf einer Linie von 11 919,2 m bei einer Höhe des Zielstrahls $z_m \sim 23$ m von einem Stativ ($J_1 = 1,5$ m) und einem Signalturm mit $J_2 = 14,1$ m im Juli durchgeführt, beginnend in den Morgenstunden (7–8 Uhr) und in den Abendstunden abschließend. Die

Lufttemperatur betrug 20–25 °C bei einem Luftdruck von etwa 987 mb.

Die Größen δ in den Spalten 5,9,13 (Tab. 5) wurden mit Hilfe der Gradienten berechnet, die in den Spalten 3,7,11 aufgeführt sind; die letzteren mit Hilfe der Parameter ρ_Σ . Bei einem Vergleich der systematischen Fehler wird man feststellen, dass diese ähnlich sind, weil am 17. und 18. August bei positiven Temperaturgradienten gemessen wurde. Was den ersten Beobachtungstag betrifft, so veränderten sich die Werte δ_0 von einer Stunde zur anderen nicht nur nach der Größe sondern auch nach dem Vorzeichen. Die Berechnung der Parameter δ ergab keine positiven Ergebnisse. Unter den Bedingungen der Inversion ermöglichte die Einführung von Korrekturen, die Ergebnisse der Messungen um etwa 50 % zu verbessern.

5 Schlussfolgerung

Die vorgestellten Beispiele belegen, dass der systematisch wirkende Refraktionseinfluss sich aus den Ergebnissen der gegenseitigen trigonometrischen Höhenübertragung für einen weiten Bereich der geodätischen Praxis eliminieren lässt und dies mit höchst einfachen Mitteln, die mit dem System „Modell – Natur“ verbunden sind.

Tab. 5

Lfd. Nr.	ρ_Σ , cm	$\bar{\gamma}$, K/m	δ_0 , cm	δ , cm	ρ_Σ , cm	$\bar{\gamma}$, K/m	δ_0 , cm	δ , cm	ρ_Σ , cm	$\bar{\gamma}$, K/m	δ_0 , cm	δ , cm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	302	0,0102	14	– 16	223	0,0164	– 26	– 26	280	0,0128	– 10	– 21
2	225	0,0163	– 8	– 25	207	0,0176	– 31	– 28	150	0,0227	– 23	– 37
3	339	0,0072	29	– 11	150	0,0222	– 51	– 34	80	0,0281	– 47	– 46
4	208	0,0177	– 9	– 28	111	0,0253	– 40	– 40	3	0,0340	– 62	– 56
5	234	0,0156	1	– 24	109	0,0255	– 47	– 40	7	0,0342	– 63	– 56
6	285	0,0115	24	– 18	117	0,0248	– 30	– 38	55	0,0300	– 56	– 50
7	230	0,0159	1	– 25	99	0,0263	– 23	– 41	50	0,0304	– 51	– 50
8	331	0,0079	18	– 12	208	0,0176	– 4	– 28	86	0,0276	– 55	– 45
9	385	0,0036	15	– 7	433	– 0,0004	– 16	0	171	0,0211	– 30	– 34
10	640	– 0,0167	63	26	447	– 0,0016	43	3	-	-	-	-
11	555	– 0,0099	41	16	642	– 0,0172	51	27	-	-	-	-
12	814	– 0,0305	70	48	627	– 0,0160	49	25	-	-	-	-

Literatur

- [1] BINNENBRUCK, B.; LAUMEN, C.; MOZŽUCHIN, O.; SEEGER, G.; WITTE, B.: Anwendung der Ähnlichkeitstheorie zur Berechnung der Refraktion bei der trigonometrischen Höhenübertragung: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. 4/2005, S. 122–127
- [2] DROK, M. K.: Untersuchung des Tagesgangs der Widersprüche der mit trigonometrischem Nivellement erhaltenen Höhenunterschiede im Dreieck. L'vov: Geodez., Kartogr. i Aerofotos. 1. s. 25–34
- [3] IZOTOV, A. A.; PELLINEN, L. P.: Research on terrestrial refraction and methods of geodetic leveling, Works CNII-GAiK, vol.102, Publishing „Geodesy“, Moscow, 1955, 176 p
- [4] MOZŽUCHIN, O. A.: Die nivellitische Refraktion und ihre Berücksichtigung. Vermessungswesen und Raumordnung. 57. H.7 + 8. 1995. s. 407–414
- [5] MOZŽUCHIN, O. A.: Refraction in leveling and a method for its determination – theoretical basis, Acta Geod., Geoph. Hung. vol. 36 (3), 2001. p. 297–312
- [6] MOZŽUCHIN, O. A.: Application of the similarity theory for the computation of refraction in leveling. Acta Geod., Geoph. Hung. Vol. 39 (4). 2004. p. 395–402
- [7] MOZŽUCHIN, O. A.; GORDEEVTCHEV, A. V.: History of Considering Refraction in Leveling. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. 1/2007. S. 3–6
- [8] MOZŽUCHIN, O. A.: Technology for Correcting Refraction in Leveling. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten. 4/2008. S. 146–152
- [9] Patent 1707511 Rossija. Verfahren zur Bestimmung des mittleren integralen Gradienten der Brechzahl der Luft. – MOZŽUCHIN O. A. – Offen 1992. Nr. 3
- [10] Patent 1820213 Rossija. Verfahren zur Bestimmung der Punkthöhen mit dem trigonometrischen Nivellement. – MOZŽUCHIN O. A., – Offen 1993. Nr. 21

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr. Bertold Witte, Universität Bonn, für wertvolle Anmerkungen und Hilfen.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. O.A. MOZŽUCHIN, 603170, Nizžnij Novgorod, Staatliche Akademie der Landwirtschaften, Gagarinstr. 9, Rossija

Summary

After a short introduction into the theory of similarity and modelling and its application for computing refraction corrections in order to improve the results of trigonometric levellings some practical examples are given, which prove the usefulness of this method.