

# Die vierte Seite des Dreiecks

## The Fourth Side of the Triangle

Bernhard Heckmann, Christian Heckmann, Matthias Heckmann

Der australische Mathematiker B. F. Sherman hat 1993 eine bemerkenswerte geometrische Betrachtung in einem ebenen Dreieck angestellt, deren Ergebnis er als die „vierte Seite des Dreiecks“ bezeichnet. Dieser Ansatz ist in Deutschland allerdings nahezu unbekannt geblieben. Da das Dreieck bei klassischen Vermessungen die zentrale geometrische Figur darstellt, sollen Shermans Überlegungen auch den Geodätinnen und Geodäten in Deutschland in Grundzügen vorgestellt werden. Zwar hat „die vierte Seite des Dreiecks“ für das Vermessungswesen keinerlei praktische Auswirkungen, dennoch ist sie ein interessantes geometrisches Kuriosum.

**Schlüsselwörter:** Kreise am Dreieck, Seiteneigenschaften, geometrische Kuriosität, B. F. Sherman

*The fourth side of the triangle results from a particular geometric approach on a plane triangle. Findings were first published in 1993 by Australian mathematician B. F. Sherman. In Germany, this treatise is relatively unknown. The triangle is the most important geometric figure in traditional surveying. Therefore Sherman's considerations should be presented to German surveyors in an adequate technical journal. While not having any effect on practical surveying itself, the fourth side of the triangle provides an interesting geometrical curiosity nonetheless.*

**Keywords:** Circles at triangles, side properties, geometric curiosity, B. F. Sherman

### 1 VORBEMERKUNGEN

Auch wenn die Überschrift dieses Beitrags zunächst an den Kriminalroman „Des Dreiecks vierte Seite“ von Ellery Queen aus dem Jahr 1965 erinnern mag, geht es im Folgenden um ein fachliches Thema aus der Geometrie. Deshalb müsste unser provokanter Titel eigentlich jede Geodätin und jeden Geodäten aufhorchen lassen, denn Dreiecke gehören im Vermessungswesen zu den elementaren geometrischen Grundlagen. Ein Dreieck hat aber nur drei Seiten, wie kommt jetzt auf einmal eine vierte Seite dazu? Und welche Auswirkungen hat dies? Um es vorweg zu nehmen – diese mysteriöse „vierte Seite des Dreiecks“ ist durch eine spezielle geometrische Betrachtung in einem ebenen Dreieck entstanden, die B. F. Sherman von der Universität Adelaide (Australien) 1993 angestellt hat /Sherman 1993/. Bislang ist dieser Ansatz allerdings kaum bekannt, wir haben im Internet lediglich eine weitere englischsprachige Abhandlung aus dem Jahr 2012 gefunden /Yiu 2012/. Zudem gibt es eine kurze Erläuterung per Video auf YouTube /VSauce 2021/, ebenfalls in Englisch. Auch wenn „die vierte Seite im Dreieck“ letzten Endes keinen direkten Bezug zum Vermessungswesen hat, möchten wir Sherman's interessanten Ansatz in dieser Fachzeitschrift einmal näher vorstellen.

### 2 KREISKONSTRUKTIONEN AM EBENEN DREIECK

Wir betrachten ein beliebiges ebenes Dreieck mit den Eckpunkten A, B, C und den Seiten a, b, c. Zu diesem Dreieck lassen sich drei verschiedene Kreise mit jeweils besonderen Eigenschaften konstruieren:

1. Der Außenkreis (AK) durch die drei Eckpunkte A, B und C (siehe *Abb. 1*, blauer Kreis, wird auch als Umkreis bezeichnet). Die Dreiecksseiten a, b und c sind in diesem Kreis Sehnen. Der Kreismittelpunkt  $M_{AK}$  ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zu den Dreiecksseiten a, b und c, die jeweils in  $M_a$ ,  $M_b$  und  $M_c$  errichtet wurden (blaue Geraden).
2. Der Inkreis (IK), zu dem die Dreiecksseiten a, b und c Tangenten sind (siehe *Abb. 2*, grüner Kreis). Der Kreismittelpunkt  $M_{IK}$  ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in den Eckpunkten A, B und C (grüne Geraden).
3. Der Feuerbach-Kreis (FK) mit dem Mittelpunkt  $M_{FK}$ , der durch die Mittelpunkte  $M_a$ ,  $M_b$  und  $M_c$  der Dreiecksseiten a, b und c verläuft und die Seiten im Regelfall auch schneidet (siehe *Abb. 3*, roter Kreis). Dieser Kreis ist nach dem deutschen Mathematiker Karl

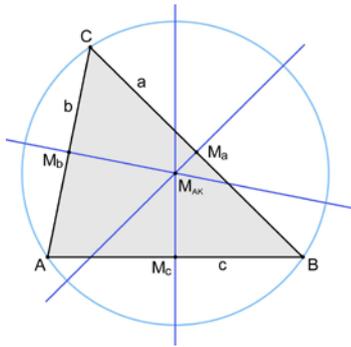


Abb. 1 | Dreiecks-Außenkreis mit Kreismittelpunkt  $M_{AK}$

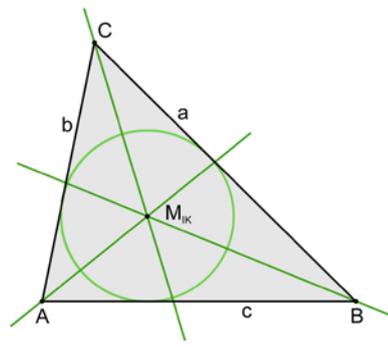


Abb. 2 | Dreiecks-Inkreis mit Kreismittelpunkt  $M_{IK}$

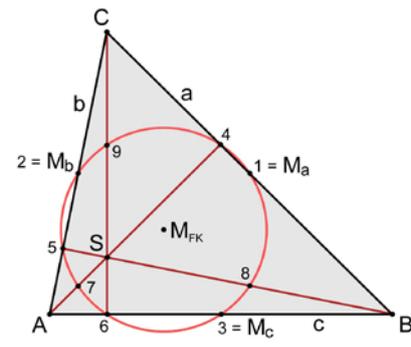


Abb. 3 | Feuerbach-Kreis oder Neunpunkte-Kreis mit dem Mittelpunkt  $M_{FK}$

Wilhelm Feuerbach (\* 30. Mai 1800 in Jena, † 12. März 1834 in Erlangen) benannt, der 1822 eine Ausarbeitung zu verschiedenen Eigenschaften dieses Kreises verfasst und publiziert hat (aus /Wikipedia 2022a, b/ entnommen). Außerhalb Deutschlands ist die Bezeichnung „Neunpunkte-Kreis“ (engl. „nine-point circle“) üblich.

Die Bezeichnung „Neunpunkte-Kreis“ beruht auf folgenden Eigenschaften:

- Der Kreis verläuft durch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten (Punkt 1 =  $M_a$ , Punkt 2 =  $M_b$  und Punkt 3 =  $M_c$ ).
- Der Kreis verläuft außerdem durch die Fußpunkte der Höhen (rote Geraden) auf denselben Dreiecksseiten (Punkte 4, 5 und 6).
- Der Kreis verläuft zusätzlich durch die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte, d. h. der Strecke zwischen einem Dreieckseckpunkt und dem Schnittpunkt S der Höhen (Punkte 7, 8 und 9).

Bemerkenswert ist zudem, dass der Radius des Feuerbach-Kreises ( $r_{FK}$ ) genau halb so groß ist wie der Radius des Außenkreises ( $r_{AK}$ ) (aus /Wikipedia 2022a/ entnommen):

$$r_{AK} = 2 \times r_{FK}.$$

Dass die Punkte 1 bis 9 (siehe Abb. 3) auf einem Kreis liegen, hatte der berühmte Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (\* 15. April 1707 in Basel, † 18. September 1783 in St. Petersburg) bereits 1765 nachgewiesen, weshalb der „Feuerbach-Kreis“ historisch korrekter als „Euler-Kreis“ bezeichnet werden müsste /Wikipedia 2022c/.

Die geometrische Konstruktion des Feuerbach-Kreises erfolgt am einfachsten als Außenkreis des Dreiecks, das durch die Mittelpunkte der Seiten a, b und c (d. h. durch die Punkte  $M_a$ ,  $M_b$  und  $M_c$  bzw. 1, 2 und 3) gebildet wird (siehe Abb. 4, kleineres dunkelgraues Dreieck). Der Mittelpunkt  $M_{FK}$  ist dabei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auf den Dreiecksseiten 1–2, 2–3 und 3–1.

Aus Abb. 4 geht ebenfalls hervor, dass nach der Konstruktion des Dreiecks 1-2-3 über die Seitenmittelpunkte das Ausgangsdreieck A-B-C in vier ähnliche und gleichgroße kleine Dreiecke zerlegt wird:

- Die hellgrauen Dreiecke A-3-2 (links unten), 3-B-1 (rechts unten) und 2-1-C (oben), die dieselbe Ausrichtung haben wie das Dreieck A-B-C.
- Das dunkelgraue Dreieck 1-2-3 in der Mitte, welches auf dem Kopf steht bzw. um  $180^\circ$  verdreht ist.

Die Fläche jedes der vier kleinen Dreiecke beträgt  $\frac{1}{4}$  der Fläche des Ausgangsdreiecks A-B-C. Die Seiten der kleinen Dreiecke sind jeweils halb so lang wie die des Ausgangsdreiecks.

Aus diesen Relationen heraus folgt übrigens auch die zuvor bemerkte Eigenschaft, dass der Radius  $r_{FK}$  des (roten) Feuerbach-Kreises, der gleichzeitig Außenkreis des Dreiecks 1-2-3 ist, genau halb so groß ist wie der Radius  $r_{AK}$  des (blauen) Außenkreises des Ausgangsdreiecks A-B-C (siehe Abb. 1)!

### 3 DIE VIERTE SEITE DES DREIECKS

Stellt man das Ausgangsdreieck A, B, C und die drei beschriebenen Kreise gemeinsam grafisch dar, dann lässt sich in diese geometrische Figur im Regelfall noch eine weitere Gerade einfügen (siehe Abb. 5, orange Linie), die als neue Seite d bezeichnet wird und folgende Eigenschaften erfüllt:

- Die neue Seite d ist Sehne im (blauen) Außenkreis.
- Die neue Seite d ist Tangente zum (grünen) Inkreis.
- Der Mittelpunkt  $M_d$  der neuen Seite d liegt auf dem (roten) Feuerbach-Kreis.

Diese neue Seite d besitzt also bezüglich des Außenkreises, des Inkreises und des Feuerbach-Kreises dieselben geometrischen Eigenschaften wie die Dreiecksseiten a, b und c. Daher wird sie auch als „vierte Seite des Dreiecks“ bezeichnet.

Diese Betrachtung geht auf B. F. Sherman von der Universität Adelaide (Australien) zurück, der 1993 den Fachbeitrag „The fourth side of a triangle“ publiziert hat /Sherman 1993/. Leider konnten zur Person B. F. Sherman keine weiteren verlässlichen biografischen Daten über das Internet ermittelt werden.

Die exakte grafische oder analytisch-geometrische Konstruktion dieser vierten

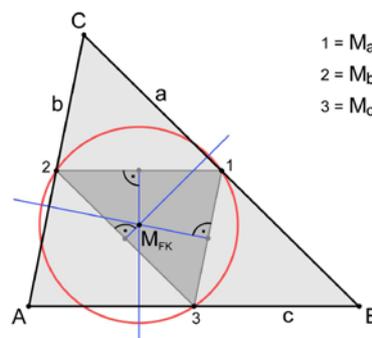


Abb. 4 | Konstruktion des Mittelpunktes des Feuerbach-Kreises  $M_{FK}$

Dreiecksseite  $d$  ist allerdings ziemlich kompliziert. Eine Herleitung auf der Grundlage baryzentrischer Koordinaten findet sich im englischsprachigen Artikel von Paul Yiu /Yiu 2012/, der im Internet als sieben-seitige PDF-Datei heruntergeladen werden kann. Darin wird die „vierte Seite des Dreiecks“ weniger spektakulär als „Sherman-Linie“ des Dreiecks bezeichnet. Wir möchten auf die von Paul Yiu dargestellte Lösung aber hier nicht weiter eingehen, da dies den Rahmen unseres lediglich informativen Beitrags sprengen würde.

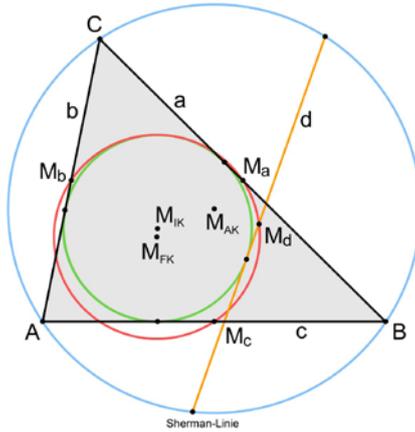


Abb. 5 | Shermans vierte Seite des Dreiecks (Prinzip aus /Yiu 2012, Figure 1/ entnommen)

erfüllt die Bedingung von Sherman's vierter Dreiecksseite, weshalb es beim gleichseitigen Dreieck unendlich viele Möglichkeiten gibt, eine Sherman-Linie zu konstruieren (siehe Abb. 6 und Abb. 7, wobei der grüne Inkreis durch den roten Feuerbach-Kreis überdeckt wird).

## 4.2 Gleichschenkliges Dreieck

Im gleichschenkligen Dreieck fällt die Mitte der ungleich langen Grundseite (in den folgenden Abb. 8–10 jeweils die Seite  $c$ ) mit dem Höhenfußpunkt zusammen. Daher ist der Feuerbach-Kreis in diesem Fall nur ein Achtpunkte-Kreis. Die betreffende Höhe bildet gleichzeitig die Symmetrieachse für das

gleichschenklige Dreieck. Die Mittelpunkte des Außen-, In- und Feuerbachkreises ( $M_{AK}$ ,  $M_{IK}$  und  $M_{FK}$ ) liegen allesamt auf dieser Symmetrieachse. Nachfolgend werden die Besonderheiten bei den gleichschenkligen Dreiecken bei drei verschiedenen geometrischen Ausprägungen einzeln betrachtet.

### a) gleichschenklig-spitzwinkliges Dreieck (Abb. 8)

Die drei Kreismittelpunkte  $M_{AK}$ ,  $M_{IK}$  und  $M_{FK}$  liegen alle innerhalb des Dreiecks auf der Höhe zur Grundseite  $c$ . In Abb. 8 lässt sich durch grafisches Probieren mit einem Lineal feststellen, dass es im gleichschenklig-spitzwinkligen Dreieck neben den Dreiecksseiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  keine weitere Gerade gibt, die Sehne im blauen Außenkreis sowie Tangente im grünen Inkreis ist und deren Mittelpunkt zusätzlich auf dem roten Feuerbach-Kreis liegt. Insofern ist in derartigen Dreiecken keine zusätzliche Sherman-Linie konstruierbar.

### b) gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Abb. 9)

Im gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck (siehe Abb. 9) sind die beiden Katheten ( $a$  und  $b$ ) gleich lang und jeweils identisch mit der Höhe zur anderen Kathete. Dadurch fallen zwei Höhenfußpunkte mit dem Dreieckspunkt  $C$ , in dem der rechte Winkel liegt, zusammen. Dies hat zur Folge, dass sowohl der Außenkreis (blau) als auch der Feuerbach-Kreis (rot) durch diesen Punkt verlaufen. Der Mittelpunkt des Außenkreises liegt ebenfalls auf dem Feuerbach-Kreis.

Der Außenkreis im rechtwinkligen Dreieck ist auch der Thales-Kreis über der Hypotenuse  $c$ . Somit stellt die Grundseite  $c$  dessen Kreisdurchmesser dar, weshalb der Kreismittelpunkt  $M_{AK}$  mit  $M_c$  identisch ist. Die Kreismittelpunkte  $M_{IK}$  und  $M_{FK}$  liegen innerhalb des Dreiecks.

In Abb. 9 kann man durch grafisches Probieren mit einem Lineal ebenfalls feststellen, dass auch in gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken keine zusätzliche Sherman-Linie konstruierbar ist.

### c) gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck (Abb. 10)

Im gleichschenklig-stumpfwinkligen Dreieck liegt nur der Mittelpunkt des Inkreises  $M_{IK}$  innerhalb des Dreiecks. Die beiden anderen Kreismittelpunkte  $M_{AK}$  und  $M_{FK}$  liegen außerhalb.

## 4 DREIECKS-SONDERFÄLLE

Es soll allerdings noch ein Blick auf die Kreise bei vier besonders konfigurierten Dreiecken geworfen werden, nämlich das gleichseitige, das gleichschenklige, das gleichschenklig-rechtwinklige und das allgemeine (ungleichschenklige) rechtwinklige Dreieck. Dabei wird der Feuerbach-Kreis, der weniger bekannt ist als der Außenkreis und der Inkreis, jeweils etwas genauer betrachtet.

### 4.1 Gleichseitiges Dreieck

Im gleichseitigen Dreieck fällt der Inkreis mit dem Feuerbach-Kreis zusammen, da die Mittelpunkte der Dreiecksseiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  auch gleichzeitig die Höhenfußpunkte sind. Bildlich gesprochen würden in Abb. 3 die Punkte 1 und 4, 2 und 5 sowie 3 und 6 zusammenfallen, weshalb der Feuerbach-Kreis die Dreiecksseiten nicht schneidet, sondern lediglich berührt (genau wie der Inkreis). Er ist in diesem Spezialfall also nur ein „Sechspunkte-Kreis“.

Der Außenkreis verläuft konzentrisch zum Inkreis bzw. zum Feuerbach-Kreis, daher fallen die Kreismittelpunkte  $M_{AK}$ ,  $M_{IK}$  und  $M_{FK}$  allesamt im Punkt  $M$  zusammen. Jede Tangente an den Inkreis

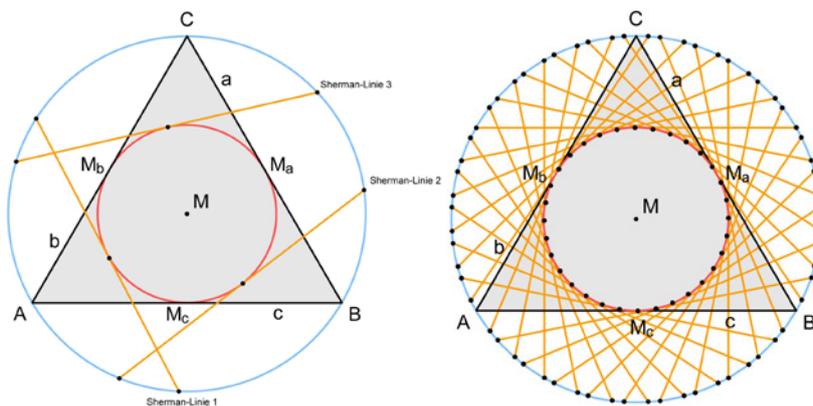


Abb. 6 und Abb. 7 | Die Sherman-Linien beim gleichseitigen Dreieck

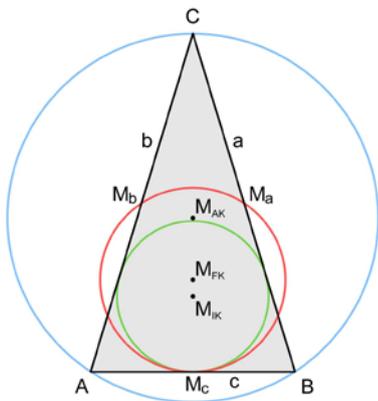


Abb. 8 | Außenkreis, Inkreis und Feuerbach-Kreis beim gleichschenklig-spitzwinkligen Dreieck

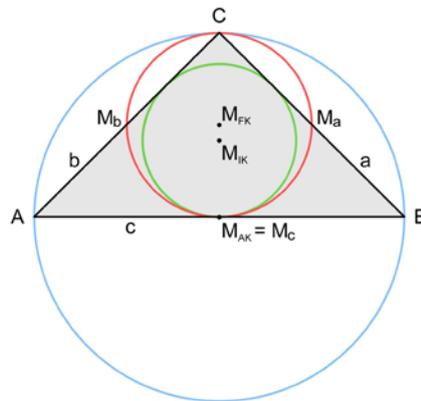


Abb. 9 | Außenkreis, Inkreis und Feuerbach-Kreis beim gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck

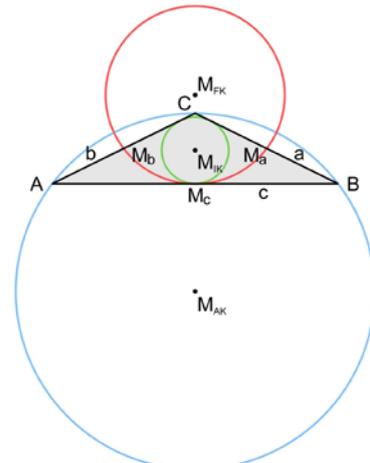


Abb. 10 | Außenkreis, Inkreis und Feuerbach-Kreis beim gleichschenklig-stumpfwinkligen Dreieck

Durch grafisches Probieren mit einem Lineal in *Abb. 10* kann man wiederum feststellen, dass es in gleichschenklig-stumpfwinkligen Dreiecken nicht möglich ist, eine zusätzliche Sherman-Linie zu konstruieren.

Zusammengefasst heißt das, dass in einem gleichschenkligen Dreieck keine vierte Seite konstruiert werden kann. Sherman erklärt dies damit, dass hier die vierte Seite geometrisch mit der Grundseite bzw. der Dreiecksseite *c* zusammenfällt (siehe *Abb. 8 – 10*) und daher nicht explizit sichtbar ist /Sherman 1993, S. 337/.

Nur beim Sonderfall des gleichseitigen Dreiecks löst sich diese Unsichtbarkeit in der Weise auf, dass nun jede Tangente an den Inkreis die Eigenschaften dieser vierten Seite hat und entsprechend dargestellt werden kann (siehe *Abb. 7*).

### 4.3 Allgemeines (ungleichschenkliges) rechtwinkliges Dreieck

Im allgemeinen rechtwinkligen Dreieck (siehe *Abb. 11*) sind die beiden Katheten (*a* und *b*) ungleich lang und jeweils identisch mit der Höhe zur anderen Kathete. Dadurch fallen zwei Höhenfußpunkte mit dem Dreieckspunkt *C*, in dem der rechte Winkel liegt, zusammen. Dies hat zur Folge, dass sowohl der blaue Außenkreis als auch der rote Feuerbach-Kreis durch diesen Punkt verlaufen. Der Außenkreis ist der Thaleskreis über der Hypotenuse *c*. Der Mittelpunkt der Hypotenuse  $M_C$ , durch den der Feuerbach-Kreis verläuft, ist mit dem Mittelpunkt des Außenkreises  $M_{AK}$  identisch.

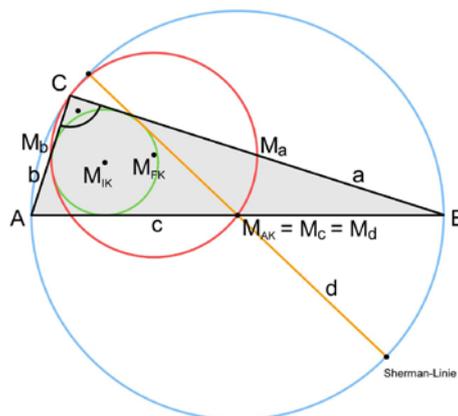


Abb. 11 | Außenkreis, Inkreis und Feuerbach-Kreis beim ungleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck

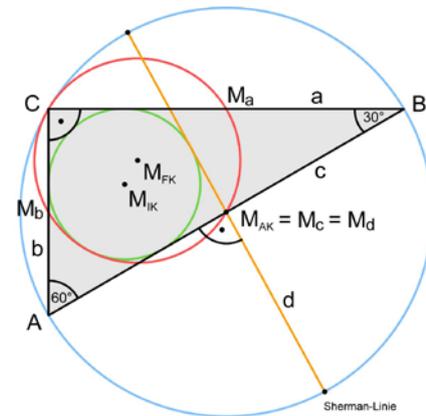


Abb. 12 | Außenkreis, Inkreis und Feuerbach-Kreis beim 30°-60°-90°-Dreieck

Da der Radius des Feuerbach-Kreises  $r_{FK}$  genau halb so groß ist wie der Radius des Außenkreises  $r_{AK}$  (siehe Abschnitt 2), ist die Gerade zwischen  $M_{AK}$  und dem Dreieckspunkt *C* gleichermaßen Radius des (blauen) Außenkreises und Durchmesser des (roten) Feuerbach-Kreises. Somit liegt der Mittelpunkt des Feuerbachkreises  $M_{FK}$  auch genau auf der Mitte der Geraden  $M_{AK}-C$ .

Bei dieser besonderen Dreiecks-Geometrie lässt sich die Sherman-Linie *d* in *Abb. 11* mit einem Lineal sehr einfach grafisch konstruieren: Sie ist – neben der Hypotenuse *c* – die zweite Tangente an den grünen Inkreis, die durch den Mittelpunkt des Außenkreises  $M_{AK}$  verläuft.

Abschließend wurde noch untersucht, in welchem rechtwinkligen Dreieck die Sherman-Linie genau senkrecht zur Hypotenuse verläuft (siehe *Abb. 12*). Diese geometrische Bedingung kann z. B. über die Relationen des Inkreis-Radius  $r_{IK}$  zur kürzeren Kathete *b* und zur Hypotenuse *c* aufgelöst werden. Dazu bezeichnet man den unbekanntes Winkel in *A* mit  $\alpha$  und zeichnet die Winkelhalbierende durch die Punkte *A* und  $M_{IK}$  ein. Danach trägt man den Inkreis-Radius  $r_{IK}$  von  $M_{IK}$  aus sowohl senkrecht zur Kathete *b* als auch

senkrecht zur Hypotenuse  $c$  ein. Aus diesen Hilfskonstruktionen lassen sich folgende Beziehungen entnehmen:

$$\tan \alpha/2 = r_{IK}/(b - r_{IK}) \quad \text{und} \quad \tan \alpha/2 = r_{IK}/(c/2 - r_{IK}).$$

Durch Gleichsetzen der rechten Seiten ergibt sich, dass  $b = c/2$  ist. Die kürzere Kathete (hier:  $b$ ) muss also genau halb so lang sein wie die Hypotenuse (hier:  $c$ ).

Der kleinste Dreieckswinkel, der hier im Punkt B liegt, hat somit exakt den Wert  $30^\circ$  (wegen  $\sin 30^\circ = 0,5$ ). Dementsprechend sind die beiden anderen Dreieckswinkel  $60^\circ$  und  $90^\circ$  groß.

## 5 ZUSAMMENFASSUNG

Die „vierte Seite des Dreiecks“ beruht auf einer speziellen geometrischen Betrachtung eines ebenen Dreiecks durch den australischen Mathematiker B. F. Sherman aus dem Jahr 1993. Dabei werden zunächst die Eigenschaften der drei Dreiecksseiten bezüglich des Außenkreises, des Inkreises und des weniger bekannten Feuerbach- bzw. Neun-Punkte-Kreises zusammengestellt, die da sind:

- Sehne im Außenkreis,
- Tangente an den Inkreis,
- Seitenmittelpunkt liegt auf dem Feuerbach-Kreis.

Danach wird untersucht, ob es in demselben – aus einem Dreieck und drei Kreisen bestehenden – geometrischen Gebilde noch eine weitere Gerade gibt, die dieselben drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllt. Da es diese weitere Gerade im Regelfall auch tatsächlich gibt, kann sie geometrisch als „vierte Seite des Dreiecks“ anschaulich dargestellt werden. In /Yiu 2012/ wird diese Gerade weniger spektakulär als „Sherman-Linie“ bezeichnet.

Bei unserer gesonderten Betrachtung einiger spezieller Dreiecksformen konnten zudem folgende Aussagen extrahiert werden:

- Fallen die Mittelpunkte der drei Kreise ( $M_{AK}$ ,  $M_{IK}$  und  $M_{FK}$ ) in einem Punkt zusammen, lassen sich unendlich viele Sherman-Linien konstruieren. Dies betrifft das gleichseitige Dreieck (siehe dazu die *Abb. 6* und *Abb. 7*).
- Liegen die Mittelpunkte der drei Kreise auf einer Geraden, lässt sich keine Sherman-Linie konstruieren. Dies betrifft die gleichschenkligen Dreiecke, bei denen die drei Kreismittelpunkte auf der Symmetrieachse – der Höhe und Mittelsenkrechten der Grundseite – liegen (siehe dazu die *Abb. 8 – 10*).
- Spannen die Mittelpunkte der drei Kreise eine Dreiecksfläche auf, lässt sich genau eine Sherman-Linie konstruieren. Dies betrifft alle Dreiecke, die weder gleichseitig noch gleichschenkelig sind (siehe dazu die *Abb. 5*, *Abb. 11* und *Abb. 12*).
- Im ungleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck verläuft die Sherman-Linie durch den Mittelpunkt des Außenkreises  $M_{AK}$  und stellt gleichzeitig dessen Durchmesser dar (siehe dazu die *Abb. 11* und *Abb. 12*).
- Im rechtwinkligen Dreieck mit den „glatten“ Winkeln  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  verläuft die Sherman-Linie rechtwinklig zur Hypotenuse (siehe dazu *Abb. 12*).

Alle diese Betrachtungen haben zwar letzten Endes keine praktische Bedeutung für das Vermessungswesen, befassen sich aber mit einigen durchaus interessanten Grundlagen der Dreiecksgeometrie. Daher war es dem Autorenteam wichtig, die mysteriöse „vierte Seite des Dreiecks“, die in der deutschsprachigen Literatur noch nicht

beschrieben worden ist, zumindest in informativer Weise in einem geodätischen Fachorgan darzustellen.

## HINWEIS ZU DEN ABBILDUNGEN

Alle Illustrationen im Beitrag wurden von Matthias Heckmann, c/o Mindtrigger GbR (Idstein), erstellt, bei dem sich auch alle Urheberrechte befinden.

## LITERATUR

Sherman, B. F. (1993): The fourth side of an triangle. In: Mathematics Magazine 66(1993), 333–337.

VSauce (2021): Do Triangles Have Four Sides? <https://m.youtube.com/watch?v=cFd2c5txlvo> (18.08.2021).

Wikipedia (2022a): Feuerbachkreis. <https://de.wikipedia.org/wiki/Feuerbachkreis> (22.02.2022).

Wikipedia (2022b): Karl Wilhelm Feuerbach. [https://de.wikipedia.org/wiki/Karl\\_Wilhelm\\_Feuerbach](https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Wilhelm_Feuerbach) (22.02.2022).

Wikipedia (2022c): Leonhard Euler. [https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard\\_Euler](https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler) (22.02.2022).

Yiu, P. (2012): Sherman's Fourth Side of a Triangle. In: Forum Geometricorum 12(2012), 219–225. <https://forumgeom.fau.edu/FG2012volume12/FG201220.pdf> (22.02.2022).

### Dipl.-Ing. Bernhard Heckmann



Am Schäfersberg 81 | 65527 Niedernhausen/Ts.  
b-p.heckmann@online.de

### B. Sc. Christian Heckmann



Raiffeisenstraße 25 | 55124 Mainz-Gonsenheim  
christian-heckmann@gmx.net

### Dipl.-Inform. (FH) Matthias Heckmann



Schulze-Delitzsch-Straße 12 | 65510 Idstein  
matt.heckmann@gmx.de