

# Durch Rechenoperationen erzeugte systematische Abweichungen

## Systematic Deviations Generated by Arithmetic Operations

Lothar Lenzmann

Die systematische Abweichung wird nicht nur durch unkalibrierte Messgeräte oder unsachgemäße Messverfahren hervorgerufen. Erwartungstreue Beobachtungen können durch Rechenoperationen zu nicht erwartungstreuen Zufallsvariablen konvertiert werden. Bei den Winkelfunktionen und dem Satz des Pythagoras in der Grundstücksmessung sind die Auswirkungen in der Praxis i. d. R. nicht gravierend. Im behandelten Zahlenbeispiel jedoch ergibt sich erst dann in Polarkoordinaten die richtige Lösung, wenn man die dort auftretende systematische Abweichung korrekt berücksichtigt!

**Schlüsselwörter:** Erwartungstreue Beobachtungen, Rechenoperationen, systematische Abweichungen

*Systematic deviations are not only caused by uncalibrated instruments or inadequate measurement methods. Rather, calculations may transform unbiased observations into biased random variables. With trigonometric functions the Pythagorean theorem in the property measurement the effects usually are not relevant in practice. In the treated example however, the correct solution only results in the polar coordinates if the systematic deviation occurring there is precisely taken into account!*

**Keywords:** Unbiased observations, transformations, systematic deviations

### 1 EINLEITUNG

Geodätische Rechnungen und Abbildungen /Großmann 1964/ basieren auf reellen und ggf. komplexen Zahlen. Gemessene Größen hingegen sind Realisierungen, die nicht allein von ihren Zahlenwerten, sondern ganz wesentlich von der zugehörigen Zufallsvariablen geprägt werden. Mathematische Operationen, wie z. B. eine Transformation, verändern das stochastische Modell der ursprünglichen Zufallsvariablen und können systematische Abweichungen erzeugen. /Lösler 2020/ und /Reinking 2022/ gehen vom linearen Modell aus und beschreiben die zutreffende Stochastik ausreichend durch die entsprechende Varianzkovarianzmatrix. Systematische Abweichungen berücksichtigen sie nicht. Bei den hier betrachteten systematischen Abweichungen erzielt man das richtige Ergebnis nur dann, wenn man das zutreffende stochastische Modell verwendet. Nachfolgend soll für einige Berechnungsvorgänge in der Geodäsie die korrekte Lösung dargelegt werden.

### 2 SYSTEMATISCHE ABWEICHUNGEN, ERZEUGT DURCH RECHENOPERATIONEN

#### 2.1 Systematische Abweichung des Sinus und des Cosinus eines gemessenen Winkels

Die geodätische Winkelmessung ist von-Mises-verteilt und somit genähert normalverteilt. Der Erwartungswert einer Beobachtung sei  $\lambda$  und die zugehörige Varianz  $\sigma^2$ . Jede erwartungstreue Messung setzt sich zusammen aus dem Erwartungswert und der jeweiligen zufälligen Abweichung  $\varepsilon$ . Aufgrund des Additionstheorems gilt

$$E\{\sin(\lambda + \varepsilon)\} = \sin(\lambda) E\{\cos(\varepsilon)\} + \cos(\lambda) E\{\sin(\varepsilon)\}. \quad (1)$$

Der Cosinus ist eine gerade Funktion. In seiner Reihenentwicklung treten nur Glieder mit geradem Exponenten auf. Deren Erwartungswerte verschwinden nicht! Mit der Reihe für den Cosinus erhält man

$$\cos(\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^4/24 - + \dots \quad (2)$$

sowie

$$E\{\cos(\varepsilon)\} = E\{1 - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^4/24 - \dots\}. \quad (3)$$

Wegen  $E\{\varepsilon^2\} = \sigma^2$  ergibt sich unter Vernachlässigung höherer Potenzen von  $\varepsilon^2$ :

$$E\{\cos(\varepsilon)\} \approx 1 - \sigma^2/2. \quad (4)$$

Der Sinus ist eine ungerade Funktion. In seiner Reihenentwicklung treten nur Glieder mit ungeradem Exponenten auf:

$$\sin(\varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^3/6 + \varepsilon^5/120 - \dots \quad (5)$$

sowie

$$E\{\sin(\varepsilon)\} = E\{\varepsilon - \varepsilon^3/6 + \varepsilon^5/120 - \dots\}. \quad (6)$$

Der Erwartungswert  $E\{\varepsilon\}$  verschwindet definitionsgemäß. Vernachlässigt man höhere Potenzen in der Reihenentwicklung, ergibt sich

$$E\{\sin(\varepsilon)\} \approx 0. \quad (7)$$

Die Beziehung (Gl. (7)) lautet damit näherungsweise

$$E\{\sin(\lambda + \varepsilon)\} \approx \sin(\lambda)(1 - \sigma^2/2). \quad (8)$$

Der entsprechende Ansatz auf den Erwartungswert des Cosinus übertragen, ergibt

$$E\{\cos(\lambda + \varepsilon)\} \approx \cos(\lambda)(1 - \sigma^2/2). \quad (9)$$

**Anmerkung:** Es ist zu vermuten, dass der Erwartungswert der geraden Potenzen in Gl. (3) die entsprechenden geraden Potenzen von  $\sigma$  annimmt und der Erwartungswert der ungeraden Potenzen in Gl. (6) verschwindet. Damit ließen sich Gl. (8) und Gl. (9) geschlossen darstellen:

$$E\{\sin(\lambda + \varepsilon)\} = \sin(\lambda) \cos(\sigma) \quad (10)$$

und

$$E\{\cos(\lambda + \varepsilon)\} = \cos(\lambda) \cos(\sigma). \quad (11)$$

Aus erwartungstreuen, gemessenen Winkeln wird eine nichterwartungstreue Schätzung für den zugehörigen Sinus- bzw. Cosinuswert. Das Bias  $1 - \sigma^2/2$  (bzw.  $\cos \sigma$ ) wirkt stets reduzierend.

## 2.2 SYSTEMATISCHE ABWEICHUNG DES STRECKENQUADRATS

Gemessene Strecken sind Realisierungen der entsprechenden Zufallsvariablen. Diese werden in der Regel als normalverteilt vorausgesetzt. Neben dem eindimensionalen Streckenquadrat gelte als Streckenquadrat auch die Summe der Quadrate der rechtwinkligen Komponenten einer Strecke. Diese Struktur ergibt sich z.B. beim Aufmaß im Katasterwesen.

### 2.1.1 Systematische Abweichung des eindimensionalen Streckenquadrats

Das Streckenquadrat berechne sich aus der normalverteilten, erwartungstreuen Strecke  $S$  mit der Varianz  $\sigma^2$ . Ihr Erwartungswert sei

$E\{S\}$ , ihre zufällige Abweichung sei  $\varepsilon_s$  mit dem Erwartungswert 0. Der Erwartungswert von  $S^2$  ergibt sich über

$$S^2 = [E\{S\} + \varepsilon_s]^2 \quad (12)$$

zu

$$E\{S^2\} = E\{E\{S\}^2 + 2E\{S\}\varepsilon_s + \varepsilon_s\varepsilon_s\}. \quad (13)$$

Wegen

$$E\{\varepsilon_s\} = 0 \text{ und } E\{\varepsilon_s\varepsilon_s\} = \sigma^2 \quad (14)$$

ergibt sich aus Gl. (13)

$$E\{S^2\} = E\{S\}^2 + \sigma^2 \text{ bzw. } E\{S\}^2 = E\{S^2\} - \sigma^2. \quad (15)$$

Die systematische Abweichung des eindimensionalen Streckenquadrats beträgt  $\sigma^2$ .

Bezogen auf die jeweils betrachtete Strecke lautet die Beziehung

$$\sqrt{E\{S^2\}} = \sqrt{E\{S\}^2 + \sigma^2}$$

bzw.

$$\sqrt{E\{S\}^2} = E\{S\} = \sqrt{E\{S^2\} - \sigma^2}. \quad (16)$$

### 2.2.2 Systematische Abweichung des Streckenquadrats in der Ebene und im Raum

Die Hypotenuse  $\bar{c}$  in einem rechtwinkligem Dreieck sei berechnet aus  $a$  und  $b$ , den beiden unabhängigen, erwartungstreuen, normalverteilten Katheten mit der gleichen Varianz  $\sigma^2$ . Die zugehörigen Erwartungswerte seien  $E\{\bar{c}\}$ ,  $E\{a\}$  und  $E\{b\}$ ; die zufälligen Abweichungen seien  $\varepsilon_a$  und  $\varepsilon_b$ . Der Erwartungswert des Ausdrucks

$$\bar{c}^2 = a^2 + b^2 = [E\{a\} + \varepsilon_a]^2 [E\{b\} + \varepsilon_b]^2 \quad (17)$$

ergibt sich zu

$$E\{\bar{c}^2\} = E\{a^2\} + E\{b^2\} \quad (18)$$

$$= E\{E\{a\}^2 + E\{b\}^2 + 2E\{a\}\varepsilon_a + 2E\{b\}\varepsilon_b + \varepsilon_a\varepsilon_a + \varepsilon_b\varepsilon_b\}$$

$$= E\{a\}^2 + E\{b\}^2 + 2E\{a\}E\{\varepsilon_a\} + 2E\{b\}E\{\varepsilon_b\} + E\{\varepsilon_a\varepsilon_a\} + E\{\varepsilon_b\varepsilon_b\}.$$

Wegen

$$E\{\varepsilon_a\} = E\{\varepsilon_b\} = 0 \text{ und } E\{\varepsilon_a\varepsilon_a\} = E\{\varepsilon_b\varepsilon_b\} = \sigma^2 \quad (19)$$

resultiert aus Gl. (18)

$$E\{\bar{c}^2\} = E\{a^2\} + E\{b^2\} = E\{a\}^2 + E\{b\}^2 + 2\sigma^2$$

bzw.

$$E\{\bar{c}\}^2 = E\{a\}^2 + E\{b\}^2 = E\{a^2\} + E\{b^2\} - 2\sigma^2. \quad (20)$$

Die systematische Abweichung des zweidimensionalen Streckenquadrats beträgt also  $2\sigma^2$ . Das Bias des dreidimensionalen Streckenquadrats errechnet sich entsprechend zu  $3\sigma^2$ .

Die Wurzel aus dem Erwartungswert der jeweils betrachteten Streckenquadratsumme lautet

$$\sqrt{E\{\bar{c}^2\}} = \sqrt{E\{a^2\} + E\{b^2\}} = \sqrt{E\{a\}^2 + E\{b\}^2 + 2\sigma^2} \quad (21)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sqrt{E\{\bar{c}\}^2} &= E\{\bar{c}\} = \sqrt{E\{a\}^2 + E\{b\}^2} \\ &= \sqrt{E\{a^2\} + E\{b^2\} - 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

### 2.2.3 Bezug zur geodätischen Praxis

Jedem Schüler ist der Satz des Pythagoras ein Begriff. Mit den geläufigen Bezeichnungen lautet er in der Ebene für reelle Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (23)$$

bzw.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (24)$$

Der Satz gilt nicht, wenn die Größen  $a$ ,  $b$  und  $c$  Realisierungen von Zufallsvariablen sind, die z.B. durch Messungen zustande kommen! Die Terme rechter Hand in Gl. (23) und Gl. (24) sind Vorschriften, die dann systematische Abweichungen erzeugen können. Hinsichtlich einiger ausgewählter Erwartungswerte gelten folgende Ungleichungen

$$E\{c^2\} \neq E\{a^2\} + E\{b^2\} \quad (25)$$

und

$$E\{c\} \neq \sqrt{E\{a^2\} + E\{b^2\}}. \quad (26)$$

Die Hypotenuse  $c$  wird im Felde gemessen. Die Hypotenuse  $\bar{c}$  wird aus den gemessenen Katheten  $a$  und  $b$  über den Satz des Pythagoras berechnet. Ihr Erwartungswert ist die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Erwartungswerte von  $a$  und  $b$ .  $c$  und  $\bar{c}$  sind unterschiedliche Zufallsvariable, besitzen jedoch denselben Erwartungswert. Aufgrund von Gl. (20) gilt

$$E\{\bar{c}^2\} = E\{a^2\} + E\{b^2\} = E\{a\}^2 + E\{b\}^2 + 2\sigma^2 \quad (27)$$

bzw.

$$E\{\bar{c}\}^2 = E\{a\}^2 + E\{b\}^2 = E\{a^2\} + E\{b^2\} - 2\sigma^2. \quad (28)$$

Man erhält über Gl. (27) und Gl. (28) die Beziehung

$$E\{\bar{c}^2\} = E\{\bar{c}\}^2 + 2\sigma^2 \quad (29)$$

und durch Radizieren

$$\sqrt{E\{\bar{c}^2\}} = \sqrt{E\{a^2\} + E\{b^2\}} = \sqrt{E\{a\} + E\{b\}^2 + 2\sigma^2} \quad (30)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \sqrt{E\{\bar{c}\}^2} &= E\{\bar{c}\} = \sqrt{E\{a\}^2 + E\{b\}^2} \\ &= \sqrt{E\{a^2\} + E\{b^2\} - 2\sigma^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Betrachtet man die Realisierungen der o. a. Zufallsvariablen mit ihren empirischen Varianzen  $s^2$ , dann ergibt sich die Wurzel aus  $\bar{c}^2$  mit den biasfreien Schätzungen  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  gemäß Gl. (30) zu

$$\sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2\sigma^2}$$

bzw.

$$\sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2s^2} \quad (32)$$

und das biasfreie  $\bar{c}$  gemäß Gl. (31) zu

$$\bar{c} = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\sigma^2}$$

bzw.

$$\bar{c} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2s^2}. \quad (33)$$

## 3 ZAHLENBEISPIELE

### 3.1 Systematische Abweichungen in der Praxis

Nachfolgend soll der Einfluss der systematischen Abweichungen bei zwei Beispielen ermittelt werden.

#### 3.1.1. Systematische Abweichung des Sinus und des Cosinus eines gemessenen Winkels

Die Standardabweichung  $\sigma$  eines Winkels  $\lambda$  sei 1 mgon. Für den Sinus und den Cosinus dieses Winkels errechnet man nach Gl. (8) und Gl. (9) ein Bias  $\delta$  von jeweils

$$\delta = -\sin(\lambda)(\sigma^2/2) \approx -\sin(\lambda)(1,23 \cdot 10^{-10}) \quad (34)$$

oder

$$\delta = -\cos(\lambda)(\sigma^2/2) \approx -\cos(\lambda)(1,23 \cdot 10^{-10}). \quad (35)$$

Diese systematische Abweichung des Sinus und des Cosinus ist in der Praxis in aller Regel zu vernachlässigen.

#### 3.1.2. Systematische Abweichung der aus gemessenen Katheten abgeleiteten Hypotenuse

Der Einfluss der systematischen Abweichung in der Grundstücksmessung soll an einem Beispiel dargelegt werden. Der Satz des Pythagoras erzeugt in der aus den gemessenen Katheten abgeleiteten Hypotenuse eine systematische Abweichung (vgl. Abschnitt 2.2.3). Die Größe dieses Bias soll für einen kaum praxisnahen Grenzfall berechnet werden. Die Standardabweichung der beiden gemessenen Katheten  $a$  und  $b$  sei 1 cm, ihre Quadratsumme 100 cm<sup>2</sup>. Man berechne die Hypotenuse  $\bar{c}$  gemäß Gl. (33) zu

$$\bar{c} = \sqrt{100 \text{ cm}^2 - 2 \text{ cm}^2} = 10 \text{ cm} - 0,1 \text{ cm}. \quad (36)$$

Ihre systematische Abweichung beträgt  $-0,1$  cm. Der Einfluss dieses Bias ist in der Praxis also kaum zu beachten!

### 3.2 Zahlenbeispiel in der Ebene, ausgewertet sowohl in rechtwinkligen, kartesischen als auch in polaren Koordinaten

In /Lenzmann et al. 2004/ wird ein Zahlenbeispiel einer strengen Ausgleichung im Gauß-Helmert-Modell unterzogen. Es handelt sich

dabei um die Schätzung des Parameters  $a$  einer Parabel durch den Nullpunkt. Als Beobachtungen gelten die gleichgewichtigen Koordinaten zweier unabhängiger Punkte im ebenen, rechtwinkligen Koordinatensystem. Diese sind Realisierungen der betreffenden Zufallsvariablen. Weitere Festlegungen werden für dieses Zahlenbeispiel nicht getroffen. /Lösler 2020/ transformiert die rechtwinkligen Ausgangskordinaten in ebene Polarkordinaten und ermittelt die zugehörigen Varianzen und Kovarianzen. Eine systematische Abweichung zieht er nicht in Betracht. Zwischen den Ergebnissen seiner polaren und der rechtwinkligen, kartesischen Ausgleichung besteht eine deutliche Differenz. Zur widerspruchsfreien Lösung transformiert er das Ausgleichungsergebnis aus den rechtwinkligen Koordinaten in das Polarkoordinatensystem. Das kann jedoch nicht als Lösung im polaren Koordinatensystem gelten! Zur Klärung muss man den Blick auf die Zufallsvariablen richten.

Im rechtwinkligen  $x, y$ -System werden sie, wie folgt, vorgegeben: Beide Punkte sind unabhängig, beider Korrelationskoeffizient verschwindet und beide besitzen in  $x$  und  $y$  die gleiche Varianz. Systematische Abweichungen treten nicht auf.

In Polarkoordinaten ermittelt man die Radien aus dem rechtwinkligen Koordinatensystem für  $i = 1, 2$  über

Zahlenergebnis im polaren Koordinatensystem		Lösung der Ausgleichung im rechtwinkligen Koordinatensystem	
$a = 0,456218634812$		$\hat{a} = 0,456218634812$	
$s_0^2 = 0,924351204993$		$\hat{s}_0^2 = 0,924351204993$	
$r'_1 = 5,238444195562$	$\varphi_1 = 0,948316977523$	$\hat{X}_1 = 3,164899182452$	$\hat{Y}_1 = 4,569753571381$
$r'_2 = 6,257099774657$	$\varphi_2 = 0,997409113864$	$\hat{X}_2 = 3,376830098830$	$\hat{Y}_2 = 5,202252660185$

Tab. 1 | Ergebnisse der Parabelberechnung im polaren und rechtwinkligen Koordinatensystem

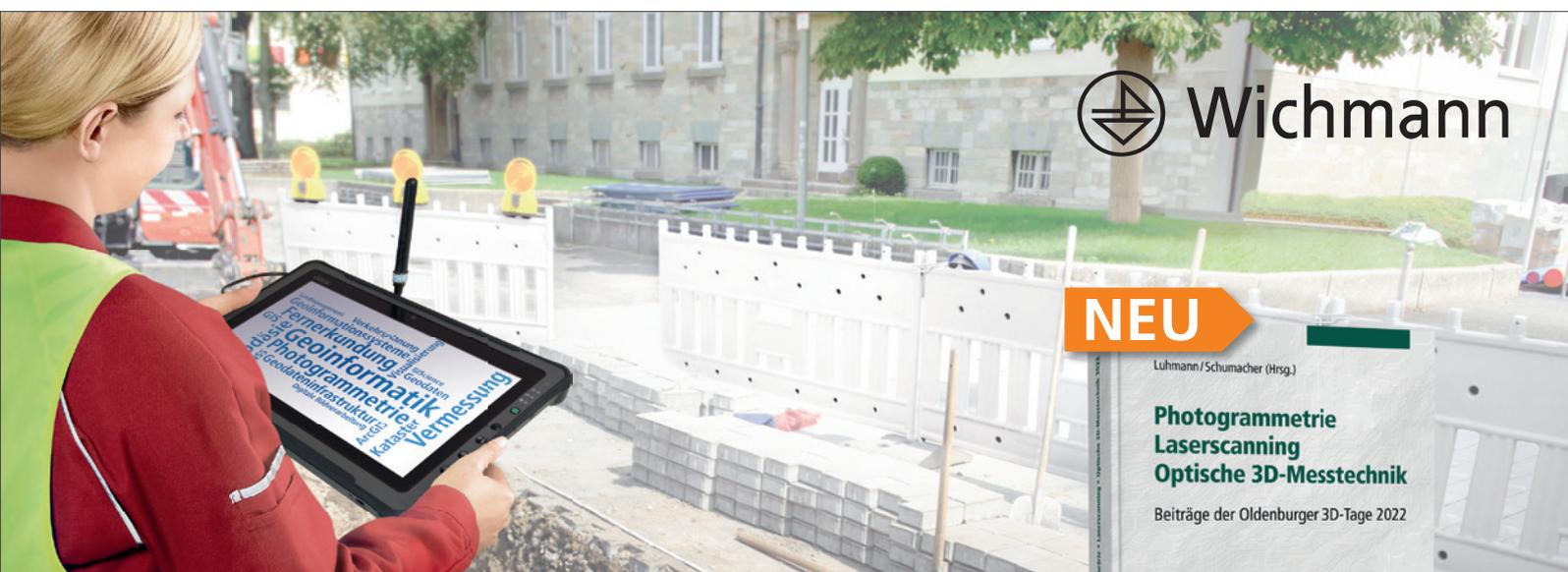
$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}. \tag{37}$$

Wegen Gl. (27) tritt in Gl. (37) ein Bias von  $2\sigma^2$  auf; bei empirischer Varianz beträgt dieser gemäß Gl. (32)  $2s^2$ ! Die Winkel berechnet man in geläufiger Darstellung für  $x_i \neq 0$  zu

$$\phi_i = \arctan(y_i/x_i). \tag{38}$$

Wenn man die stochastischen Eigenschaften korrekt berücksichtigt, erhält man die zutreffende, zweidimensionale Zufallsvariable. Das rechtwinklige und das polare Modell nutzen gemeinsam den Parabelparameter  $a$  und die empirische Varianz der Gewichtseinheit  $s_0^2$ . Für diese Größen müssen sich also in beiden Modellen identische Werte ergeben.

Im Folgenden wird das Beispiel mit der in Polarkoordinaten zusätzlich auftretenden systematischen Abweichung von  $2s_0^2$  gelöst. Im Gegensatz zur Analyse in kartesischen Koordinaten erhält



**NEU**



Technikwissen punktgenau:

## Neueste Forschungsergebnisse und Anwendungen

Die Oldenburger 3D-Tage bieten seit 2002 jährlich eine Plattform für Expertinnen und Experten aus den Bereichen Photogrammetrie, Geodäsie und industrielle Messtechnik. Der aktuelle Tagungsband enthält alle Beiträge der 20. Oldenburger 3D-Tage, u. a. zu den Themen Urban Mobile Mapping, optische Messtechnik für den Unterwassereinsatz oder UAV-RTK.

2022, X, 422 Seiten  
 68,- € (Buch/E-Book)  
 95,20 € (Kombi)

Preisänderungen und Irrtümer vorbehalten. Sowohl das E-Book als auch das Kombiangebot (Buch + E-Book) sind ausschließlich auf [www.vde-verlag.de](http://www.vde-verlag.de) erhältlich.

Bestellen Sie jetzt: (030) 34 80 01-222 oder [www.vde-verlag.de/buecher/537726](http://www.vde-verlag.de/buecher/537726)



man wegen der zusätzlichen Unbekannten  $s_0^2$  kein überbestimmtes System. Die zu ermittelnden Größen sind  $a$ ,  $\Delta\phi_1$ ,  $\Delta\phi_2$  und  $s_0^2$ . In der folgenden Berechnung wird  $\phi_i + \Delta\phi_i$  durch  $\varphi_i$  substituiert. Die biasfreien Abstände  $r_i'$  vom Koordinatenursprung zur Parabel ergeben sich in Anlehnung an /Lenzmann et al. 2004/ über  $y_i = ax_i^2$  in Polarkoordinaten zu

$$r_1' = \sin \varphi_1 / a / \cos^2 \varphi_1, \quad r_2' = \sin \varphi_2 / a / \cos^2 \varphi_2. \quad (39)$$

Da die beobachteten Radien  $r_i$  nach Gl. (37) ermittelt werden, sind sie mit einem Bias von  $2s_0^2$  behaftet. Ihre Berechnung erfolgt unter Berücksichtigung von Gl. (39) und ergibt

$$r_1 = \sqrt{(\sin \varphi_1 / a / \cos^2 \varphi_1)^2 + 2s_0^2}, \\ r_2 = \sqrt{(\sin \varphi_2 / a / \cos^2 \varphi_2)^2 + 2s_0^2}. \quad (40)$$

Die Beobachtungen des betrachteten Beispiels im polaren System lauten

$$I^T = [\sqrt{29,29} \arctan(4,8/2,5) \quad \sqrt{41,00} \arctan(5,0/4,0)] \quad (41)$$

mit der Gewichtsmatrix

$$\text{Diag } P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4] = [1,00 \quad 29,29 \quad 1,00 \quad 41,00]. \quad (42)$$

Da die Lösung des Problems in Polarkoordinaten um eine Unbekannte erweitert werden muss, liegt dort keine Überbestimmung vor. Die Gewichtsmatrix  $P$  muss daher nicht in Ansatz gebracht werden. Bei korrekter Modellbildung in beiden Koordinatensystemen müssen die gemeinsamen Größen  $a$  und  $\hat{a}$  sowie  $s_0^2$  und  $\hat{s}_0^2 = [v \quad v \quad p]$ , die empirische Varianz der Gewichtseinheit mit einem Freiheitsgrad, identische Zahlenwerte annehmen. Man kann mithilfe der Ergebnisse aus der Ausgleichung in rechtwinkligen Koordinaten über Gl. (40) die Größen  $\varphi_i$  direkt berechnen, ohne auf die Iteration zurückgreifen zu müssen. Anschließend ermittelt man mit Gl. (30) die Abstände  $r_i'$  der Parabel zum Koordinatenursprung an der Stelle  $\varphi_i$ , Tab. 1.

Die Terme  $\sin \varphi_i / r_i' \cdot \cos^2 \varphi_i$  und  $\hat{y}_i / \hat{x}_i^2$  ergeben jeweils denselben Zahlenwert für  $a$  bzw.  $\hat{a}$  und weisen damit nach, dass alle vier Punkte auf derselben Parabel liegen. Allerdings befinden sie sich im polaren System an anderer Stelle als im rechtwinkligen. Das polare Ergebnis stimmt in den direkt vergleichbaren Werten natürlich mit dem rechtwinkligen Resultat überein. In Polarkoordinaten ist das behandelte Problem nicht überbestimmt, daher müssen die unterschiedlichen Gewichte der „Beobachtungen“ dort nicht berücksichtigt werden.

Im Folgenden wird das Zahlenbeispiel um einen Messpunkt erweitert, damit auch im System der Polarkoordinaten eine Überbestimmung vorliegt. Der erweiterte Beobachtungsvektor in rechtwinkligen  $x, y$ -Koordinaten dazu lautet

$$I^T = [2,5 \quad 4,8 \quad 4,0 \quad 5,0 \quad 3,4 \quad 5,3]. \quad (43)$$

Der Parameter  $a'$  der Parabel und die empirische Varianz  $s_0'^2$  der Gewichtseinheit treten bei der Lösung des Problems in beiden Systemen auf. Für sie ergeben sich die jeweils identischen, fünfzehnstelligen Werte

$$a' = 0,457\,019\,191\,658\,750 \quad \text{und} \quad s_0'^2 = 0,462\,196\,252\,396\,726.$$

Man erhält wiederum für die identischen Größen dieselben Zahlenenergebnisse! Es handelt sich nicht um eine „maßlose Schärfe im Zahlenrechnen“ (C. F. Gauß), sondern um den Versuch, das theoretisch Dargelegte noch einmal mit Zahlen plausibel zu untermauern.

Es ist Herrn Löslers Verdienst, dieses Problem in den Fokus gerückt zu haben.

## 4 SCHLUSSBETRACHTUNG

Die systematischen Abweichungen, die bei der Anwendung der Winkelfunktionen (vgl. Abschnitt 2.1) und des Pythagoras in der Grundstücksmessung (vgl. Abschnitt 3.1) entstehen, erweisen sich als sehr gering, sodass sie in der Praxis zu vernachlässigen sein werden. Im Zahlenbeispiel (vgl. Abschnitt 3.2) jedoch ergibt sich erst dann in Polarkoordinaten die richtige Lösung, wenn man die dort auftretende systematische Abweichung in Ansatz bringt. Bei stochastisch korrekter Umwandlung der Realisierungen von rechtwinkligen in polare Koordinaten müssen in beiden Systemen die identischen Zielgrößen  $a$  und  $\hat{a}$  sowie  $s_0^2$  und  $\hat{s}_0^2$  identische Werte annehmen! Die entsprechenden, übereinstimmenden zwölf- bzw. fünfzehnstelligen Zahlenenergebnisse sind eine numerische Bestätigung, dass die korrekte Umwandlung in Abschnitt 3.2 gelungen ist.

## LITERATUR

Großmann, W. (1964): Geodätische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung. Wittwer, Stuttgart.

Lenzmann, L. et al. (2004): Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN) 111(2004)2, 68–73.

Lenzmann, L. et al. (2007): Zur Lösung des nichtlinearen Gauß-Makov-Modells. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 132(2007)2, 108–110.

Lösler, M. (2020): Zur Parameterschätzung mit unterschiedlichen Koordinatendarstellungen. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement (zfv) 145(2020)6, 385–392.

Reinking, J. (2022): Zur Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell beim Übergang zwischen Beobachtungsräumen. In: Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement 147(2022)2, 129–138.

Wolfram (2017): Wolfram MathWorld. <https://mathworld.wolfram.com> (29.11.2017).

## Prof. Dr.-Ing. Lothar Lenzmann



Kurt-Weill-Weg 3 | 45657 Recklinghausen  
LLenzmann@t-online.de