



Zur Bestimmung lokaler Abbildungsverzerrungen in Altkarten mit Hilfe der multiquadratischen Interpolationsmethode

Dieter Beineke, Neubiberg

Für Genauigkeitsanalysen von Altkarten wird auf der Grundlage der multiquadratischen Interpolation nach Hardy eine analytische Abbildung vorgeschlagen, mit deren Hilfe lokale Verzerrungen berechnet werden können.

1 Aufgabenstellung

Die übliche Methode, lokale Abbildungsverzerrungen (Längen-, Flächen- und Winkelverzerrungen) von Kartennetzentwürfen zu bestimmen, beruht auf dem Vergleich einander entsprechender unendlich kleiner Größen zwischen dem Urbild (z.B. Kugel) und dem Abbild (Karte). Mit Hilfe der Verzerrungsellipse (Tissotsche Indikatrix) und Isodeformaten (Linien gleicher Längen-, Flächen- oder Winkelverzerrung) lassen sich diese Verzerrungen und damit die Abbildungseigenschaften eines Netzentwurfes über das gesamte Gebiet der Karte graphisch veranschaulichen.

Die Berechnung der infinitesimalen Größen erfolgt unter Anwendung der Differentialgeometrie aus den Abbildungsfunktionen des Kartennetzentwurfes, die in allgemeiner Form durch

$$\begin{aligned}x &= x(\lambda, \varphi) \\ y &= y(\lambda, \varphi)\end{aligned}\quad (1)$$

gegeben sind, wobei λ und φ die geographischen Koordinaten eines abzubildenden Punktes darstellen.

Für die Berechnung der lokalen Abbildungsverzerrungen ist daher die Kenntnis des Kartennetzentwurfes zwingend notwendig. Bei Genauigkeitsanalysen für Altkarten tauchen in diesem Zusammenhang zwei Probleme auf. Einerseits ist in der Regel der Netzentwurf unbekannt oder kann nur vermutet werden (z.B. die Plattkarte). Andererseits sind Altkarten aufgrund der damaligen unzureichenden Messmethoden (einschließlich grober Mess- und Kartierfehler sowie Materialdeformationen der verwendeten Druckformen wie z.B. Holz) mehr oder weniger geometrisch heterogen und entziehen sich daher einer einfachen analytischen Abbildungsfunktion, wie sie in der Kartennetzlehre üblich sind.

Zur Lösung des Problems muss zunächst eine Abbildungsvorschrift für die verzerrte Altkarte (im folgenden „Verzerrungsabbildung“ genannt) gefunden werden, die für einen beliebigen Punkt im Urbild mit den geographischen Soll-Koordinaten (λ, φ) den entsprechenden (fehlerhaften) Punkt im Abbild (Altkarte) mit den kartesischen Ist-Koordinaten (ξ, η) liefert

$$\begin{aligned}\xi &= X(\lambda, \varphi) \\ \eta &= Y(\lambda, \varphi)\end{aligned}\quad (2)$$

Ist diese Verzerrungsabbildung gefunden, lassen sich die gesuchten infinitesimalen Größen unter Anwendung der Differentialgeometrie berechnen.

2 Definition der Verzerrungsabbildung

Zur Generierung von Verzerrungsnetzen für Altkarten hat der Autor die „Multiquadratische Interpolation“ nach Hardy (1971) vorgeschlagen, die rechentechnisch sehr einfach umzusetzen ist und in ihrer gesamten Homogenität optimale Ergebnisse gewährt (BEINEKE, 2001). In jüngster Zeit hat auch BRETTNERBAUER (2005) die gleiche Interpolationsmethode empfohlen. Dieses Verfahren zur Generierung von Verzerrungsnetzen für Altkarten kann aber auch zur Lösung der Verzerrungsabbildung nach (2) herangezogen werden, da es sich im Grunde um die gleiche Aufgabenstellung handelt (Transformation von Soll- nach Ist-Koordinaten).

Die Verzerrungsabbildung als Funktion der geographischen Koordinaten λ und φ kann daher in allgemeiner Form folgendermaßen definiert werden

$$\begin{aligned}X(\lambda, \varphi) &= x'(\lambda, \varphi) + u(\lambda, \varphi) \\ Y(\lambda, \varphi) &= y'(\lambda, \varphi) + w(\lambda, \varphi)\end{aligned}\quad (3)$$

Sie setzt sich zusammen aus einem Koordinatentransformationsteil $x'(\lambda, \varphi)$ und $y'(\lambda, \varphi)$ sowie den multiquadratischen Interpolationsfunktionen $u(\lambda, \varphi)$ und $w(\lambda, \varphi)$. Die Qualität der Verzerrungsabbildung hängt natürlich im großen Maße von der Auswahl und Konstellation der korrespondierenden Passpunkte ab. Während die Auswahl der Passpunkte (in der Regel eindeutig identifizierbare Objekte wie Ortslagen) kaum Probleme bereiten, da ihre Zuordnung in der Altkarte über den Ortsnamen

und die Lage der Nachbarortschaften meistens gelingt, müssen bei der Konstellation – wünschenswert ist hier eine homogene Verteilung – Abstriche gemacht werden, weil z.B. mehr oder weniger große Teilgebiete der Altkarte keinerlei Ortsangaben enthalten, da sie durch Kartuschen oder grafische Ausschmückungen wie Wappen oder große figurative Darstellungen belegt sind. Das lässt sich bei Genauigkeitsanalysen von Altkarten leider nicht immer verhindern, so dass diese Gebiete mit Vorsicht zu interpretieren sind.

2.1 Zur Koordinatentransformation

Bei Genauigkeitsuntersuchungen von Altkarten wird in der Regel die Ähnlichkeitstransformation (auch: Helmerttransformation, engl. Euclidian transformation) verwendet

$$\begin{aligned} x'(\lambda, \varphi) &= t_1 + t_3 \cdot x(\lambda, \varphi) - t_4 \cdot y(\lambda, \varphi) \\ y'(\lambda, \varphi) &= t_2 + t_3 \cdot y(\lambda, \varphi) + t_4 \cdot x(\lambda, \varphi) \end{aligned} \quad (4)$$

Darin bedeuten

t_1, t_2, t_3, t_4 die vier Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation und $\begin{matrix} x(\lambda, \varphi) \\ y(\lambda, \varphi) \end{matrix}$ die Abbildungsfunktionen eines adäquaten Altkarten-Netzentwurf nach (1). Darüber hinaus kann auch die affine, die bilineare oder auch die projektive Koordinatentransformation verwendet werden. Diese sollten aber nur dann eingesetzt werden, wenn das äußere Erscheinungsbild der Altkarte (z.B. die Form des Kartenrahmens) dem „Verzerrungsbild“ dieser Transformationsarten weitgehend entspricht. Also zum Beispiel, wenn ein ursprünglich rechteckiger Kartenrahmen, durch Materialdeformationen (Druckform, Bedruckstoff) offensichtlich verschwenkt oder windschief ist.

2.2 Zur Wahl eines adäquaten Kartennetzentwurfes für die Altkarte

Für den Altkarten-Netzentwurf sollte eine aus der Kartenetzlehre bekannte Abbildung gewählt werden, die der vorliegenden Altkarte am besten entspricht. Vielfach kann hier die so genannte „Plattkarte“ (mittabstandstreuer Zylinderentwurf) verwendet werden, die schon in der Antike bekannt war. Die Abbildungsgleichungen der Plattkarte lauten für die Einheitskugel

$$\begin{aligned} x(\lambda, \varphi) &= (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \cos \varphi_0 \\ y(\lambda, \varphi) &= (\varphi - \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

wobei $\bar{\lambda}$ und $\bar{\varphi}$ zumeist runde geographische Koordinaten der Blattmitte sind und φ_0 der längentreue Breitenkreis ist (alle Winkel sind hier und im Folgenden im Bogenmaß zu verstehen). In der Form (5.1) werden die Abbildungsgleichungen an späterer Stelle (siehe Kap. 3) für die partiellen Ableitungen der Verzerrungsabbildung benötigt. Für die praktische Anwendung, insbesondere hier für die ausgleichende Ähnlichkeitstransformation müssen die Abbildungsgleichungen noch mit dem Maßstabsfaktor R/m_K multipliziert werden, um konkrete Abbildungskoordinaten für den Vergleich mit den Passpunkt-Ist-Koordinaten der Altkarte zu erhalten

$$\begin{aligned} x(\lambda, \varphi) &= \frac{R}{m_K} \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \cos \varphi_0 \\ y(\lambda, \varphi) &= \frac{R}{m_K} \cdot (\varphi - \bar{\varphi}) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dabei ist R der Erdradius der Kugel in Einheiten der Auftragskoordinaten (mm bzw. cm) und m_K die Kartenmaßstabszahl. In der Form (5) wird die Abbildung auch als „Rechteckige Plattkarte“ bezeichnet, die für $\varphi_0 = 0^\circ$ (Äquator) in die „Quadratische Plattkarte“ übergeht. Der längentreue Breitenkreis φ_0 liegt bei Altkarten in der Regel nicht in Blattmitte, häufig sogar außerhalb des Blattes. Ist die Altkarte mit einer Graduierung im Kartenrahmen versehen, lässt er sich aus dem Gittermaschenverhältnis $s(\Delta\lambda)/s(\Delta\varphi) = \cos \varphi_0$ berechnen, wobei $s(\Delta\lambda)$ und $s(\Delta\varphi)$ die Strecken eines gleich großen geographischen Gitterabstandes in Meridian- und Parallelkreisrichtung sind (z.B. $\Delta\lambda = \Delta\varphi = 1^\circ$). Da die Graduierung von Altkarten erfahrungsgemäß fehlerhaft ist und häufig nicht zum Karteninhalt passt, empfiehlt es sich φ_0 aus dem Quotienten $m_x/m_y = \cos \varphi_0$ zu bestimmen, in dem m_x und m_y die Maßstabsfaktoren in den Hauptrichtungen sind, die aus einer zuvor berechneten ausgleichenden Affintransformation (unter Anwendung der quadratischen Plattkarte für die Altkarten-Netzabbildung) mit den homologen Passpunkten (Ortspositionen) stammen. Auf weitere Altkarten-Netzentwürfe (z.B. die Trapez-Abbildung) soll hier nicht näher eingegangen werden; siehe dazu BEINEKE (2001).

2.3 Zur ausgleichenden Ähnlichkeitstransformation

Die vier unbekanntenen Transformationsparameter werden im einfachsten Fall durch eine Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt. Mit den n Stützpunkten der Altkarte (Passpunkt-Ist-Koordinaten: ξ, η), die üblicherweise durch eine Digitalisierung gewonnen und hier als Messbeobachtungen (**I**) aufgefasst werden

$$\mathbf{I} = (\xi_1 \eta_1 \xi_2 \eta_2 \dots \xi_n \eta_n)^T, \quad (6.1)$$

den Verbesserungen

$$\mathbf{v} = (v_{\xi_1} v_{\eta_1} v_{\xi_2} v_{\eta_2} \dots v_{\xi_n} v_{\eta_n})^T, \quad (6.2)$$

dem Unbekanntenvektor

$$\hat{\mathbf{t}} = (t_1 t_2 t_3 t_4)^T, \quad (6.3)$$

und der Koeffizientenmatrix **A**, welche die n Passpunkt-Soll-Koordinaten $x_i = x(\lambda_i, \varphi_i)$ und $y_i = y(\lambda_i, \varphi_i)$ enthält, die nach den Abbildungsfunktionen eines adäquaten Kartennetzentwurfes wie z.B. der Plattkarte nach (5.2) berechnet werden

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & \dots & x_n & y_n \\ -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 & \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}^T, \quad (6.4)$$

lauten die Verbesserungsgleichungen im gebräuchlichen Gauß-Markov-Modell

$$\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{t}} \quad (6.5)$$



aus denen durch Minimierung der Summe der Verbesserungsquadrate $\mathbf{v}^T \mathbf{v} \rightarrow \min$ die Transformationsparameter der Ähnlichkeitstransformation erhalten werden

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} \quad (6.6)$$

Im Hinblick auf die multiquadratische Interpolation werden noch die Verbesserungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{l} \quad (6.7)$$

sowie die verbesserten Beobachtungen (bzw. transformierte Passpunkt-Soll-Koordinaten) benötigt

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{t}}, \quad (6.8)$$

die hier als (Soll-)Stützpunkte der multiquadratischen Interpolation dienen.

Das Schätzprinzip der Methode der kleinsten Quadrate liefert allerdings nur dann optimale Ergebnisse, wenn die Verbesserungen durch zufällige Messabweichungen verursacht sind. Das ist aber gerade bei Altkarten mit ihren groben Mess- und Kartierfehlern wie weiter oben schon erläutert im Allgemeinen nicht zu vermuten. Hier empfiehlt sich eine „Robuste Helmert-Transformation“ (CASPARY/BEINEKE, 2003), auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll.

Für die Aufstellung der A-Matrix in (6.4) müssen die Passpunkt-Soll-Koordinaten (normale Auftragskoordinaten nach (5.2)) berechnet werden. Diese Abbildungsfunktionen benötigen den Maßstab der Altkarte, der aber in der Regel aus Voruntersuchungen nur ungefähr bekannt ist. Die Ausgleichung kann somit im ersten Schritt nur mit der Näherungs-Maßstabszahl m_K^0 durchgeführt werden. Der tatsächliche (geschätzte) Maßstab der Altkarte ($1:m_K$) lässt sich anschließend mit Hilfe des Maßstabsfaktors m der Ausgleichung

$$m = \sqrt{t_3^2 + t_4^2} \quad (6.9)$$

wie folgt ermitteln

$$m_K = \frac{m_K^0}{m}. \quad (6.10)$$

Nach einer erneuten Durchrechnung der Ausgleichung mit dieser tatsächlichen Kartenmaßstabszahl erhält man die für die Bestimmung lokaler Abbildungsverzerrungen maßgeblichen Transformationsparameter, aus denen sich jetzt nach (6.9) ein Maßstabsfaktor von $m = 1$ ergibt.

Auf eine erneute Durchrechnung kann aber auch verzichtet werden, da die Transformationsparameter t_3 und t_4 (t_1 und t_2 bleiben unverändert) auf einfache Weise aus den Ergebnissen der ersten Ausgleichung wie folgt korrigiert werden können

$$\begin{aligned} t_3 &:= t_3/m \\ t_4 &:= t_4/m \end{aligned} \quad (6.11)$$

2.4 Zur multiquadratischen Interpolationsfunktion

Die multiquadratische Interpolation wird durch eine Summation von n Flächen 2. Grades (Hyperboloiden) gebildet. Dazu wird eine so genannte Kernfunktionsmatrix \mathbf{D} definiert, deren Elemente d_{ij} durch die Distanzen zwischen

jeweils zwei Punkten (hier im Punktfeld der SollStützpunkte nach (6.8)) und einem noch zu definierenden Glättungsfaktor G berechnet werden

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix};$$

$$d_{ij} = +\sqrt{(\hat{x}_i - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_i - \hat{y}_j)^2} + G; \quad i, j = 1 \dots n \quad (7.1)$$

Die Matrix ist wegen $d_{ij} = d_{ji}$ symmetrisch und entlang der Hauptdiagonalen für $G = 0$ mit Nullen und für $G > 0$ mit \sqrt{G} besetzt. Mit Hilfe dieser Kernfunktionsmatrix \mathbf{D} lassen sich zwei lineare Gleichungssysteme aufstellen

$$\mathbf{f}_\xi = \mathbf{D} \mathbf{a}, \quad \mathbf{f}_\eta = \mathbf{D} \mathbf{b} \quad (7.2)$$

worin \mathbf{a} und \mathbf{b} die zu bestimmenden Interpolationskoeffizienten für die x-y-Hauptachsenrichtungen bedeuten und \mathbf{f} die Fehlervektoren (= negative Verbesserungen nach (6.7)) mit den Komponenten

$$\mathbf{f}_\xi = -\mathbf{v}_\xi, \quad \mathbf{f}_\eta = -\mathbf{v}_\eta. \quad (7.3)$$

Die unbekanntenen Interpolationskoeffizienten erhält man somit aus

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}_\xi = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_\xi \\ \mathbf{b} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{f}_\eta = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{v}_\eta \end{aligned} \quad (7.4)$$

Die multiquadratische Interpolation eines Fehlervektors (u, w) innerhalb des Stützstellengebietes für einen beliebigen Punkt des Urbildes (λ, φ) erfolgt durch

$$\begin{aligned} u(\lambda, \varphi) &= \mathbf{a}^T \mathbf{s} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot s_i(\lambda, \varphi) \\ w(\lambda, \varphi) &= \mathbf{b}^T \mathbf{s} = \sum_{i=1}^n b_i \cdot s_i(\lambda, \varphi) \end{aligned} \quad (7.5)$$

worin $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2 \ \dots \ s_n)^T$ der Streckenvektor ist, der aus den Distanzen des Interpolationspunktes $P'(x'(\lambda, \varphi), y'(\lambda, \varphi))$ nach (4) zu allen (Soll-)Stützpunkten $\hat{P}(\hat{x}, \hat{y})$ nach (6.8) unter Einbeziehung von G gebildet wird

$$\begin{aligned} s_i(\lambda, \varphi) &= \\ &+ \sqrt{x'(\lambda, \varphi) - \hat{x}_i)^2 + (y'(\lambda, \varphi) - \hat{y}_i)^2} + G; \quad i = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Fällt ein Interpolationspunkt exakt auf einen (Soll-)Stützpunkt $P'(x', y') = \hat{P}(\hat{x}, \hat{y})$, geht der berechnete Fehlervektor (u, w) nach (7.5) exakt in den gegebenen Fehlervektor \mathbf{f} (f_ξ, f_η) nach (7.3) über.

Die Formeln (7.1) und (7.4) brauchen nur einmal ausgeführt werden (sie sind für den gesamten Interpolationsbereich konstant), während die Formeln (7.5) und (7.6) für jeden Punkt berechnet werden müssen.

2.5 Zum Glättungsfaktor G

Mit (7.5) ist die multiquadratische Interpolationsfläche eindeutig bestimmt und entspricht einer Überlagerung von n Hyperboloiden. Über den Glättungsfaktor G kann

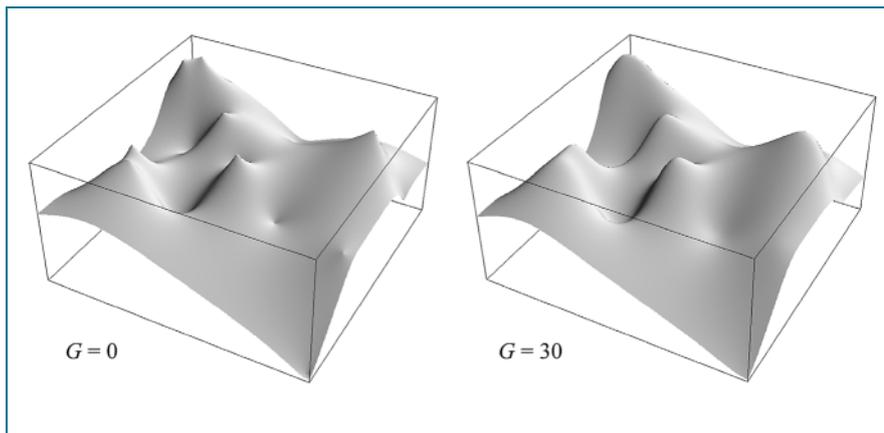


Abb. 1: Multiquadratische Interpolationsflächen für die Glättungsfaktoren $G = 0$ und $G = 30$

die Ausformung der Interpolationsfläche beeinflusst werden. Für $G = 0$ entstehen in den (Soll-)Stützpunkten nach (6.8) Kegelspitzen, während für $G > 0$ in den Stützpunkten glatte Übergänge entstehen, die je nach der Größe von G mehr oder weniger gekrümmt sind. In Abb. 1 wird dieser Effekt deutlich veranschaulicht.

Für die Wahl von $G = 0$ spricht, dass die Interpolation absolut von jeglicher subjektiven Manipulation frei ist, hat aber den Nachteil, dass sie in den Stützpunkten – wegen der Kegelspitzen – unstetig und damit nicht differenzierbar ist. Im Hinblick auf die Berechnung der Abbildungsverzerrungen muss die Interpolationsfläche jedoch über den gesamten Bereich, also auch in den Stützpunkten, differenzierbar sein. Das ist nur gegeben, wenn $G > 0$ gewählt wird. Wie groß soll aber G nun konkret festgelegt werden? GÖPFERT (1977) schlägt dazu einen empirisch ermittelten Wert von

$$G = 0,6 \cdot s_{\min}^2 \text{ mit } s_{\min} = \min(d_{ij}); i, j = 1 \dots n; i \neq j$$

vor, den auch BRETTNERBAUER (2005) für sein Beispiel übernahm. Bei genauerer Betrachtung ist diese Funktion für die vorliegende Aufgabenstellung (wenn nicht sogar generell) indessen ungeeignet, denn sie liefert einen viel zu großen Wert, der sich infolgedessen sehr ungünstig auf die Interpolation und den Folgeberechnungen (Verzerrungselipsen, Isolinien) auswirkt.

Eingehende Untersuchungen haben gezeigt, dass bei großen G -Werten sich die relativen Max- und Minima merklich von den Stützstellen wegbewegen (siehe Abb. 2), so dass auf den Stützstellen und in deren näherer Umgebung fehlerhafte differentielle Ableitungen berechnet werden. Ganz extreme Lageverschiebungen können sich bei eng benachbarten Punkten ergeben.

Der Glättungsfaktor G sollte deshalb so gewählt werden, dass bei der Bestimmung der Abbildungsverzerrungen (siehe Kap. 3) z.B. die Halbachsen der Verzerrungselipse (a und b) ab einem bestimmten Wert von G hinreichend genau sind, sich also nicht mehr gravierend unterscheiden. In Abb. 3 ist der obere rechte Ausschnitt einer Verzerrungselipse für einen Punkt eines Testdatensatzes für verschiedene G -Werte dargestellt. Wie deutlich zu sehen ist, ändert sich die Form der Ellipse nur noch unerheblich ab einem Wert von ca. $G \leq 0,01$ und bleibt innerhalb der Zeichengenauigkeit des Beispiels. Für höhere Genauigkeiten

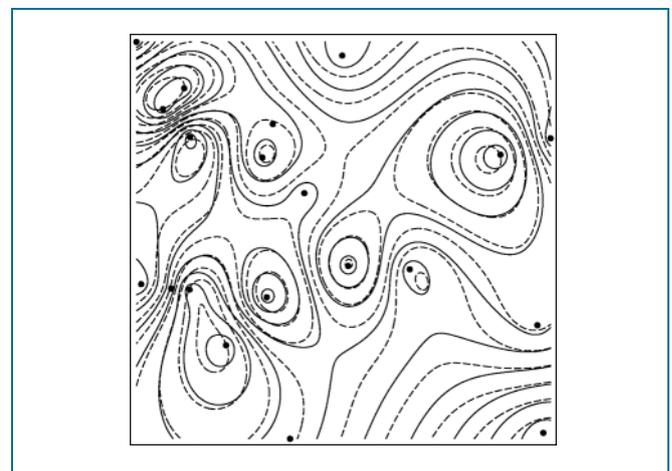


Abb. 2: Isolinienvergleich der multiquadratischen Interpolationsflächen nach Abb. 1 mit Eintrag der Stützpunkte. Die durchgezogenen Isolinien entsprechen $G = 0$, die gestrichelten Isolinien entsprechen $G = 30$

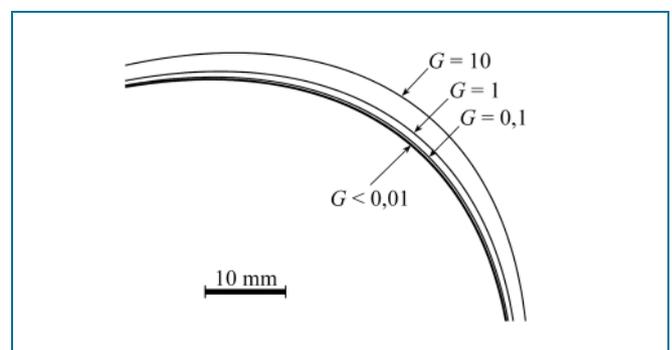


Abb. 3: Einfluss des Glättungsfaktors G auf die Verzerrungselipse (Ausschnitt) nach Tissot

kann in Abhängigkeit der Nachkommastellen folgende empirisch gewonnene Formel dienen

$$G = 10^{-\text{Round}(0,4K^2)}; K = \text{Anzahl der Nachkommastellen} \quad (8)$$

Da es für die vorliegende Aufgabenstellung hinlänglich genau ist, die Werte der Abbildungsverzerrungen auf $K = 4$ Nachkommastellen zu beschränken, reicht es aus



$G = 10^{-6}$ zu setzen. Damit ist ein Glättungsfaktor festgelegt worden, der einerseits sehr klein ist ($G \approx 0$) und deshalb dem Kriterium nach Objektivität erfüllt, andererseits aber noch groß genug, um unverfälscht die benötigten differentiellen Ableitungen in den Passpunkten zu berechnen.

3 Bestimmung lokaler Abbildungsverzerrungen

Mit der in Kapitel 2 definierten Verzerrungsabbildung (3) lassen sich unter Anwendung der Differentialgeometrie die lokalen Verzerrungsverhältnisse einer Altkarte als Funktion beliebiger geographischer Punktkoordinaten berechnen. Im Folgenden werden zunächst die speziell für Genauigkeitsanalysen von Altkarten benötigten Grundformeln der Abbildungsverzerrungen zusammengestellt, wobei alle – wie es in der Kartennetzlehre bei kleinmaßstäbigen Netzentwürfen üblich ist – für die Abbildung einer Kugeloberfläche in die Kartenebene gelten. Der interessierte Leser kann entsprechende Formeln für die ellipsoidische Abbildung bei *BUGAYEVSKIY* und *SNYDER* (1995) finden, aus dem auch (in modifizierter Form für die sphärische Abbildung) die hier wiedergegeben Formeln stammen. In einem eigenen Abschnitt wird anschließend auf die Berechnung der notwendigen partiellen Ableitungen eingegangen.

3.1 Grundfunktionen der Abbildungsverzerrungen

Zwecks einfacher Schreibweise sollen nachfolgend die partiellen Ableitungen der Verzerrungsabbildung (3) nach den geographischen Koordinaten in der üblichen Kurzform $X_\varphi = \partial X / \partial \varphi$, $X_\lambda = \partial X / \partial \lambda$, $Y_\varphi = \partial Y / \partial \varphi$, $Y_\lambda = \partial Y / \partial \lambda$ wiedergegeben werden, wobei des Weiteren auch auf die symbolische Variablenliste (λ, φ) der Funktionen verzichtet wird.

Zu den elementaren Grundformeln zählen die lokalen Längenverzerrungen

in Meridianrichtung

$$h = \sqrt{X_\varphi^2 + Y_\varphi^2} \quad (9.1)$$

und in Parallelkreisrichtung

$$k = \frac{\sqrt{X_\lambda^2 + Y_\lambda^2}}{\cos \varphi}. \quad (9.2)$$

Da die Kehrwerte $1/h$ und $1/k$ den lokalen Maßstabsverzerrungen in den Hauptrichtungen entsprechen, folgen daraus unmittelbar die relativen lokalen Maßstabsabweichungen

$$\text{in Meridianrichtung } \Delta m_M = \left(\frac{1}{h} - 1 \right) 100\% \quad (10.1)$$

$$\text{und in Parallelkreisrichtung } \Delta m_P = \left(\frac{1}{k} - 1 \right) 100\% \quad (10.2)$$

Weil sich der Maßstab bei Wahl der Rechteckigen Plattkarte als adäquater Altkarten-Netzentwurf nach (5) lediglich nur auf die Nord-Süd-Richtung bezieht (man spricht hier auch von Kugelmaßstab oder Äquatormmaßstab), ist in diesem Falle lediglich die Maßstabsabweichung in Meridianrichtung von Bedeutung, die insbesondere bei der Generierung von Linien gleicher Maßstabsabweichung (Äquidiformate) zur Darstellung kommt.

Unter zu Hilfenahme des Abbildungswinkels Θ zwischen dem Meridian und Parallelkreis im Schnittpunkt $P(\lambda, \varphi)$

$$\Theta = \arccos \frac{X_\varphi X_\lambda + Y_\varphi Y_\lambda}{hk \cos \varphi} \quad (11)$$

lassen sich mit (9) direkt die Halbachsen ($a \geq b$) der Verzerrungsellipse nach Tissot ermitteln

$$a = \frac{1}{2} (\sqrt{h^2 + 2hk \sin \Theta + k^2} + \sqrt{h^2 - 2hk \sin \Theta + k^2})$$

$$b = \frac{1}{2} (\sqrt{h^2 + 2hk \sin \Theta + k^2} - \sqrt{h^2 - 2hk \sin \Theta + k^2}) \quad (12)$$

und daraus die lokale maximale Winkelverzerrung

$$w = 2 \arcsin \frac{a - b}{a + b} \quad (13)$$

sowie die lokale Flächenverzerrung

$$\Phi = ab = hk \sin \Theta. \quad (14)$$

Im Hinblick auf die Visualisierung von Verzerrungsellipsen, bei denen zusätzlich noch die Richtungen der Halbachsen in der Abbildung bestimmt werden müssen, empfiehlt sich allerdings statt (12) ein anderer Berechnungsweg. So ist die Funktion für die lokale Längenverzerrung (μ) in eine beliebige Richtung α gegeben durch

$$\mu(\alpha) = \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + hk \cos \Theta \sin 2\alpha + k^2 \sin^2 \alpha}, \quad (15.1)$$

wobei α das Azimut im Urbild, also auf der Kugeloberfläche darstellt. Diese Funktion nimmt für die Azimute

$$\alpha_{01} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2hk \cos \Theta}{h^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \alpha_{02} = \alpha_{01} + 90^\circ \quad (15.2)$$

Extremwerte an. Werden diese in (15.1) eingesetzt erhält man die maximale und minimale Längenverzerrung

$$\mu_1 = \mu(\alpha_{01}), \quad \mu_2 = \mu(\alpha_{02}) \quad (15.3)$$

und daraus die Halbachsen der Verzerrungsellipse nach Tissot

$$a = \max(\mu_1, \mu_2), \quad b = \min(\mu_1, \mu_2). \quad (15.4)$$

Die Richtung der maximalen Längenverzerrung α_0 im Urbild erhält man über eine logische Fallunterscheidung

$$\alpha_0 = \begin{cases} \alpha_{01} & \text{wenn : } a = \mu_1 \\ \alpha_{02} & \text{wenn : } a = \mu_2 \end{cases}, \quad (15.5)$$

woraus die (verzerrte) Richtung der maximalen Längenverzerrung β_0 – bezogen auf die Richtung des abgebildeten Meridians – in der Abbildung berechnet werden kann

$$\beta_0 = \arccot \left(\frac{h \cot \alpha_0}{k \sin \Theta} + \cot \Theta \right). \quad (15.6)$$

Mit dem lokalen Richtungswinkel des abgebildeten Meridians (auch: Meridiankonvergenz)

$$\gamma = \arctan(X_\varphi/Y_\varphi) \quad (15.7)$$

erhält man schließlich den Richtungswinkel (zählt positiv im Uhrzeigersinn von der senkrechten y-Achse aus) der großen und kleinen Halbachse (a , b) in der Kartenabbildung

$$\beta_a = \beta_0 + \gamma, \quad \beta_b = \beta_a + \frac{\pi}{2}. \quad (15.8)$$

Für die Generierung einer Verzerrungsellipse mit entsprechenden Rechen- und Graphikprogrammen ist hier allerdings nur die Richtung der großen Halbachse a von Bedeutung.

3.2 Partielle Ableitungen der Verzerrungsabbildung

Die vier partiellen Ableitungen der Verzerrungsabbildung, die jeweils nur einmal pro Punkt $P(\lambda, \varphi)$ für die Formeln (9) und (11) benötigt werden, sind relativ einfach zu ermitteln. In der üblichen Kurzform ergibt sich zunächst aus Formel (3)

$$\begin{aligned} X_\varphi &= x'_\varphi + u_\varphi \\ Y_\varphi &= y'_\varphi + w_\varphi \\ X_\lambda &= x'_\lambda + u_\lambda \\ Y_\lambda &= y'_\lambda + w_\lambda \end{aligned} \quad (16.1)$$

Für die partiellen Ableitungen der Ähnlichkeitstransformation nach (4) erhält man

$$\begin{aligned} x'_\varphi &= t_3 x_\varphi - t_4 y_\varphi \\ y'_\varphi &= t_3 y_\varphi + t_4 x_\varphi \\ x'_\lambda &= t_3 x_\lambda - t_4 y_\lambda \\ y'_\lambda &= t_3 y_\lambda + t_4 x_\lambda \end{aligned} \quad (16.2)$$

und für den multiquadratischen Interpolationsanteil nach (7.5)

$$\begin{aligned} u_\varphi &= \mathbf{a}^T \mathbf{s}_\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \frac{x'_\varphi(x' - \hat{x}_i) + y'_\varphi(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ w_\varphi &= \mathbf{b}^T \mathbf{s}_\varphi = \sum_{i=1}^n b_i \frac{x'_\varphi(x' - \hat{x}_i) + y'_\varphi(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ u_\lambda &= \mathbf{a}^T \mathbf{s}_\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \frac{x'_\lambda(x' - \hat{x}_i) + y'_\lambda(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ w_\lambda &= \mathbf{b}^T \mathbf{s}_\lambda = \sum_{i=1}^n b_i \frac{x'_\lambda(x' - \hat{x}_i) + y'_\lambda(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \end{aligned} \quad (16.3)$$

Somit folgt **allgemein**, also unabhängig vom verwendeten adäquaten Altkarten-Netzentwurf

$$\begin{aligned} X_\varphi &= t_3 x_\varphi - t_4 y_\varphi + \sum_{i=1}^n a_i \frac{(t_3 x_\varphi - t_4 y_\varphi)(x' - \hat{x}_i) + (t_3 y_\varphi + t_4 x_\varphi)(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ Y_\varphi &= t_3 y_\varphi + t_4 x_\varphi + \sum_{i=1}^n b_i \frac{(t_3 x_\varphi - t_4 y_\varphi)(x' - \hat{x}_i) + (t_3 y_\varphi + t_4 x_\varphi)(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ X_\lambda &= t_3 x_\lambda - t_4 y_\lambda + \sum_{i=1}^n a_i \frac{(t_3 x_\lambda - t_4 y_\lambda)(x' - \hat{x}_i) + (t_3 y_\lambda + t_4 x_\lambda)(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \\ Y_\lambda &= t_3 x_\lambda - t_4 y_\lambda + \sum_{i=1}^n b_i \frac{(t_3 x_\lambda - t_4 y_\lambda)(x' - \hat{x}_i) + (t_3 y_\lambda + t_4 x_\lambda)(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \end{aligned} \quad (17.1)$$

Speziell für die bei Genauigkeitsanalysen von Altkarten wichtige **Rechteckige Platkarte** mit den partiellen Ableitungen $x_\varphi = 0$, $y_\varphi = 1$, $x_\lambda = \cos \varphi_0$ und $y_\lambda = 0$ für die Einheitskugel nach (5.1), ergeben sich folgende stark vereinfachte Ausdrücke

$$\begin{aligned} X_\varphi &= -t_4 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{t_3(y' - \hat{y}_i) - t_4(x' - \hat{x}_i)}{s_i} \\ Y_\varphi &= t_3 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{t_3(y' - \hat{y}_i) - t_4(x' - \hat{x}_i)}{s_i} \\ X_\lambda &= \left(t_3 + \sum_{i=1}^n a_i \frac{t_3(x' - \hat{x}_i) + t_4(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \right) \cos \varphi_0 \\ Y_\lambda &= \left(t_4 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{t_3(x' - \hat{x}_i) + t_4(y' - \hat{y}_i)}{s_i} \right) \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (17.2)$$

Bei hoher Punktzahl wirken sich die Summationen in (17) spürbar auf die Rechengeschwindigkeit aus. Es empfiehlt es sich daher für eine schnelle Berechnung, häufig wiederkehrende Terme, wie z.B. den Streckenvektor \mathbf{s} oder die Koordinatendifferenzen $(x' - \hat{x}_i)$ und $(y' - \hat{y}_i)$ usw. vorab zu berechnen.

4 Die inverse Verzerrungsabbildung (Entzerrungsabbildung)

Die Verzerrungsabbildung nach (2) bzw. (3) entspricht immer einer Koordinatentransformation vom Urbild (Kugel: λ, φ) zum Abbild (Altkarte: ξ, η). Mit Hilfe der in Kapitel 3 definierten Funktionen für die Abbildungsverzerrungen, können für beliebige geographischer Koordinaten die lokalen Verzerrungsverhältnisse nach den speziellen Formeln (9) bis (17) berechnet werden, wobei die Verzerrungswerte in der Altkarte immer für den jeweiligen Abbildungspunkt $\{\xi, \eta\}$, $\{X(\lambda, \varphi), Y(\lambda, \varphi)\}$ gelten.

So lassen sich zum Beispiel Verzerrungsellipsen auf den Passpunkten der Altkarte als Funktion ihrer korrespondierenden geographischen Soll-Koordinaten generieren (siehe Abb. 4). Des Weiteren ist die Darstellung von Verzerrungsellipsen auf den Gitternetzschneitpunkten eines geographischen Verzerrungsnetzes möglich (siehe Abb. 5). Erfahrungsgemäß liegt aber ein Verzerrungsnetz mehr oder weniger verdreht in der Altkarte vor, einige Gitternetzschneitpunkte oder Passpunkten liegen eng, andere weit auseinander und führen infolgedessen zu inhomogenen Darstellungen, wie auch die Beispiele zeigen.

Hier kann es sinnvoll sein, über das gesamte Gebiet der Altkarte (im Koordinatensystem der Beobachtungen nach (6.1) = Digitizer-Koordinaten) ein reguläres Gitternetz zu legen und auf den einzelnen Gitterpunkten z.B. die Verzerrungsellipsen darzustellen (siehe Abb. 6). Auch für die Darstellung von Isolinen (siehe Abb. 7), die über rechnerische Interpolationsverfahren auf regel- oder unregelmäßig verteilten Stützpunkten in der Altkarte generiert werden, ist es erforderlich, die Verzerrungswerte als Funktion beliebiger kartesischer Koordinaten zu berechnen.

Um das zu ermöglichen, ist es zunächst notwendig, die Verzerrungsabbildung umzukehren

$$\begin{aligned} \lambda &= X^{-1}(\xi, \eta) \\ \varphi &= Y^{-1}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (18.1)$$

Da dies der Transformation eines (fehlerhaften bzw. verzerrten) Kartenpunktes (ξ, η) nach den (unverfälschten) geographischen Soll-Koordinaten (λ, φ) entspricht, kann die inverse Verzerrungsabbildung somit auch als **Entzerrungsabbildung** bezeichnet werden, mit deren Hilfe anschließend die gewünschten Abbildungsverzerrungen nach Kapitel 3 für den ausgewählten Altkartenpunkt (ξ, η) abgeleitet werden können.

Die Entzerrungsabbildung (18.1) kann allerdings nur über numerisches Näherungsverfahren gelöst werden, weil sich die komplexen Abbildungsformeln nach (3) nicht direkt (analytisch) umkehren lassen. Zur Lösung empfiehlt sich hier die zweidimensionale Newton-Iteration

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \lambda^{k+1} \\ \varphi^{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda^k \\ \varphi^k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} X_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) & X_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) \\ Y_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) & Y_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{Jacobi-Matrix}} \\ &\cdot \begin{pmatrix} X(\lambda^k, \varphi^k) - \xi \\ Y(\lambda^k, \varphi^k) - \eta \end{pmatrix} \cdot \frac{m_k}{R} \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (18.2)$$

die abgebrochen werden kann, wenn die Beträge der Änderungen $|\Delta\lambda^k| = |\lambda^{k+1} - \lambda^k|$ und $|\Delta\varphi^k| = |\varphi^{k+1} - \varphi^k|$ in der k -ten Iteration hinreichend klein ausfallen.

Die Invertierung der Jacobi-Matrix (mit den partiellen Ableitungen der Verzerrungsabbildung nach Kapitel 3.2) kann auf einfache Weise direkt gelöst werden

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) & X_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) \\ Y_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) & Y_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) \end{pmatrix}^{-1} &= \\ \frac{\begin{pmatrix} Y_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) & -X_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) \\ -Y_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) & X_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) \end{pmatrix}}{X_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) \cdot Y_\varphi(\lambda^k, \varphi^k) - Y_\lambda(\lambda^k, \varphi^k) \cdot X_\varphi(\lambda^k, \varphi^k)} & \end{aligned} \quad (18.2)$$

Bleibt nur noch die Frage der Startwerte λ^0, φ^0 offen, die gute Näherungswerte der gesuchten geographischen Koordinaten sein sollen, um mit wenigen Iterationen ans Ziel zu kommen. Die Ermittlung dieser Startwerte kann in **drei Schritten** erfolgen:

(1) Bestimmung von (multiquadratisch) interpolierten Verbesserungsvektoren (\bar{u}, \bar{w})

Die Berechnung erfolgt analog wie im Kapitel 2.4 beschrieben, nur das jetzt eine neue Kernfunktionsmatrix $\bar{\mathbf{D}}$ definiert wird, deren Elemente Funktionen der Beobachtungen (ξ_i, η_i) nach (6.1) sind, also den Passpunkten in der Altkarte

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}(\bar{d}_{ij}); \quad \bar{d}_{ij} &= +\sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2} + G; \\ i, j &= 1 \dots n. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Unter zu Hilfenahme der nach (6.7) ermittelten Verbesserungen ergeben sich die Interpolationskoeffizienten zu

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{v}_\xi, \quad \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{v}_\eta. \quad (19.2)$$

Mit dem Streckenvektor

$$\bar{s}_i(\xi, \eta) = +\sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2} + G; \quad i = 1 \dots n \quad (19.3)$$

für den aktuell zu bestimmenden Punkt (ξ, η) , erhält man dann die Komponenten des (interpolierten) Verbesserungsvektors

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \bar{u}(\xi, \eta) = \bar{\mathbf{a}}^T \bar{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \cdot \bar{s}_i(\xi, \eta) \\ \bar{w} &= \bar{w}(\xi, \eta) = \bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \cdot \bar{s}_i(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (19.4)$$

(2) Inverse Ähnlichkeitstransformation

Die Invertierung von (4) ergibt

$$\begin{aligned} x^0 &= \bar{t}_1 + \bar{t}_3 \cdot \xi^0 + \bar{t}_4 \cdot \eta^0 \\ y^0 &= \bar{t}_2 + \bar{t}_3 \cdot \eta^0 - \bar{t}_4 \cdot \xi^0 \end{aligned} \quad (20.1)$$

und liefert die Näherungs-Abbildungskordinaten (x^0, y^0) , wie man sie mit der adäquaten Altkartenabbildung nach (5.2) für (λ^0, φ^0) erhalten würde. Dabei sind

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \xi + \bar{u}(\xi, \eta) \\ \eta^0 &= \eta + \bar{w}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (20.2)$$

die Näherungs-Soll-Koordinaten des aktuellen Punktes (ξ, η) in der Altkarte und

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= -\frac{t_1 \cdot t_3 + t_2 \cdot t_4}{t_3^2 + t_4^2}, \quad \bar{t}_2 = \frac{t_1 \cdot t_4 - t_2 \cdot t_3}{t_3^2 + t_4^2}, \\ \bar{t}_3 &= \frac{t_3}{t_3^2 + t_4^2}, \quad \bar{t}_4 = \frac{t_4}{t_3^2 + t_4^2}, \end{aligned} \quad (20.3)$$

die (inversen) Transformationsparameter, die Funktionen der nach (6.6) und (6.11) bereits ermittelten Transformationsparameter für die Normaltransformationsrichtung (Soll \rightarrow Ist) sind.

(3) Inverse Altkartenabbildung

Aus der Umkehrung der adäquaten Altkartenabbildung in allgemeiner Form nach (1)

$$\begin{aligned} \lambda &= x^{-1}(x, y) \\ \varphi &= y^{-1}(x, y) \end{aligned} \quad (21.1)$$

ergeben sich – hier speziell für die Rechteckige Plattkarte nach (5.2) – durch Einsetzen der Näherungs-Koordinaten (x^0, y^0) nach (20.1) schließlich die gesuchten Startwerte

$$\begin{aligned} \lambda^0 &= x^{-1}(x^0, y^0) = \bar{\lambda} + \frac{m_K}{R} \cdot \frac{x^0}{\cos \varphi_o} \\ \varphi^0 &= y^{-1}(x^0, y^0) = \bar{\varphi} + \frac{m_K}{R} \cdot y^0 \end{aligned} \quad (21.2)$$

5 Anwendungsbeispiele

Die hier ausgewählten Beispiele entstammen einer Genauigkeitsanalyse für die ostorientierte Preußenkarte von Heinrich Zell aus dem Jahre 1542, die im Original ein Holzschnitt von vier Druckstöcken ist und eine Fläche von ca. 50 × 70 cm² im Querformat abdeckt. Zwecks besserer Veranschaulichung für eine Schwarz-Weiß-Darstellung

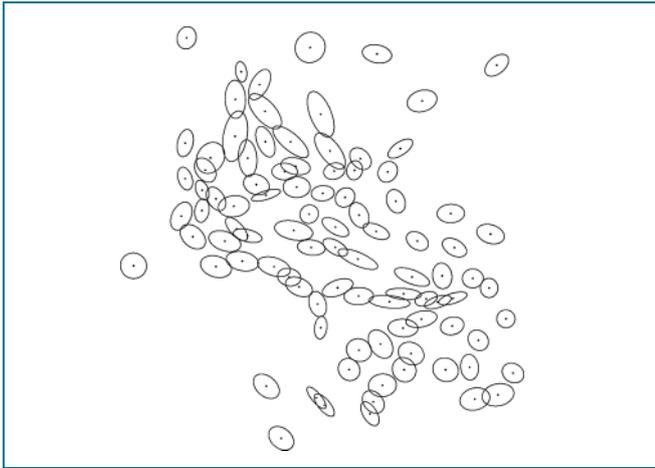


Abb. 4: Verzerrungsellipsen auf den unregelmäßig verteilten Passpunkten in der Altkarte

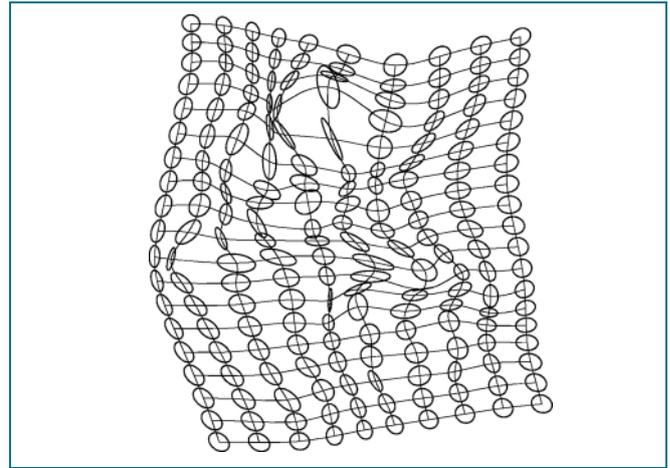


Abb. 5: Verzerrungsellipsen auf den Gitternetzschrittpunkten eines geographischen Verzerrungsnetzes

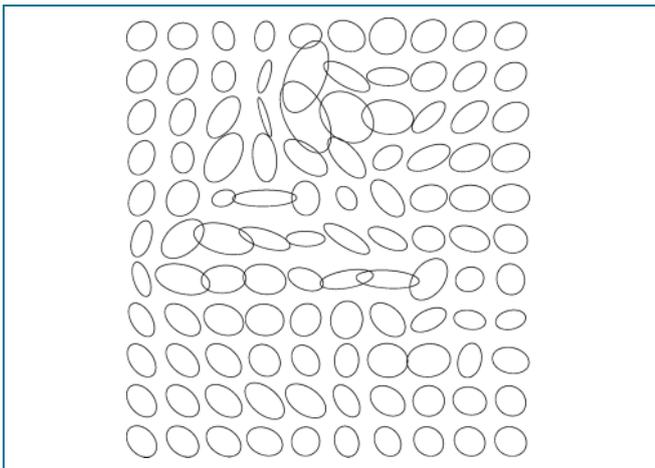


Abb. 6: Verzerrungsellipsen auf einem regulären Gitternetz im Koordinatensystem der Altkarte

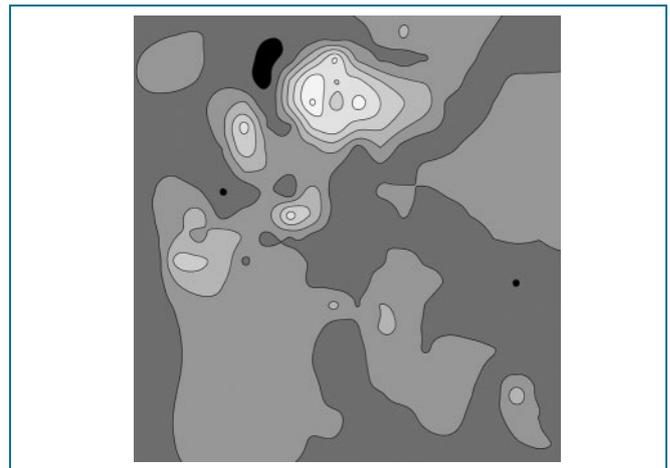


Abb. 7: Linien gleicher relativer Flächenverzerrung in Stufen von jeweils 50%, von schwarz ($< -50\%$) bis weiß ($> 250\%$)

lung ist bei den Abbildungen auf eine Hinterlegung der Karte verzichtet worden. Bei Bedarf können die Datensätze (Soll- und Ist-Koordinaten der korrespondierenden Passpunkte) als ACSII-Files vom Autor angefordert werden.

Die Abb. 4 und 5 zeigen die Anwendungen für den Einsatz der direkten Verzerrungsabbildung nach (3), und Abb. 6 und 7 die Anwendungen für den Einsatz der inversen Verzerrungsabbildung nach (18).

6 Abriss

Um die Verzerrungen einer Karte unter Anwendung der Differentialgeometrie zu bestimmen, ist die Kenntnis der Abbildungsfunktion des verwendeten Kartennetzentwurfes notwendig. Bei Altkarten besteht das Problem, dass die Abbildungen in der Regel nur vermutet werden können und dass sie darüber hinaus geometrisch heterogen sind. Infolgedessen entziehen sie sich einer gebräuch-

lichen analytischen Abbildungsfunktion, wie sie in der Kartennetzlehre verwendet werden.

Für Genauigkeitsanalysen von Altkarten wurde deshalb auf der Grundlage der multiquadratischen Interpolation nach Hardy eine analytische Abbildungsvorschrift vorgeschlagen (hier „Verzerrungsabbildung“ genannt), mit deren Hilfe infinitesimale Größen zur Bestimmung lokaler Verzerrungen in Altkarten berechnet werden können. Diese Verzerrungsabbildung setzt sich zusammen aus einem Koordinatentransformationsteil (Helmerttransformation) mit integrierter Abbildungsfunktion für einen adäquaten Altkarten-Netzentwurf sowie einem multiquadratischen Interpolationsanteil, der die „Lücke“ von der Soll-Lage eines Punktes zu dessen Ist-Lage schließt. Die Abbildung entspricht somit einer Koordinatentransformation vom (unverzerrten) Urbild (Kugel: λ, φ) bis zum (verzerrten) Abbild (Altkarte: ξ, η).

Das Verfahren lässt sich im Prinzip auf alle Altkarten anwenden, solange ein annähernd passender Kartennetzentwurf mit bekannter Abbildung gewählt wird, der hier nur die Funktion einer Näherungsabbildung hat und erfah-

rungsgemäß gefunden werden kann. Exemplarisch wurde hier die „Plattkarte“ (mittabstandstreuer Zylinderentwurf) verwendet, die wegen der einfachen Handhabung für zahlreiche Altkarten Konstruktionsgrundlage war.

Da es für bestimmte Darstellungen im Koordinatensystem der Altkarte (z.B. Isolinien oder Verzerrungsellipsen auf einem regulären Gitternetz) erforderlich ist, die Verzerrungen auch als Funktion beliebiger kartesischer Koordinaten zu ermitteln, wurde zu diesem Zweck noch die inverse Verzerrungsabbildung (hier „Entzerrungsabbildung“ genannt) eingegangen, die über ein numerisches Näherungsverfahren (zweidimensionale Newton-Iteration) gelöst werden kann.

Neben der Behandlung und Festlegung des Glättungsfaktors G für die multiquadratische Interpolation und einer Zusammenstellung aller relevanten Berechnungsformeln für die Abbildungsverzerrungen, die bei Genauigkeitsanalysen von Altkarten anfallen, wurden an Hand einiger Anwendungsbeispiele die vorgestellten Methoden veranschaulicht.

Literatur

- [1] BEINEKE, D.: Verfahren zur Genauigkeitsanalyse für Altkarten. Schriftenreihe UniBwM, Heft 71, 2001, Download „Dissertation.pdf“ (8,1 MB): <http://www.unibw.de/ipk/karto/schriften/pubbeineke/buchwerke>
- [2] BRETTERBAUER, K.: Zur Konstruktion von Verzerrungslinien mittels der multiquadratischen Methode von Hardy. In: Kartographische Nachrichten (KN), Heft 2, 2005
- [3] BUGAYEVSKIY, L. M.; SNYDER, J. P.: Map Projections – A Reference Manual. Taylor & Francis, London, 1995
- [4] CASPARY, W.; BEINEKE, D.: Robuste Helmert-Transformation. In: Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 110. Jahrgang, Heft 7, Heidelberg, S. 242–246, <http://www.wichmann-verlag.de/>
- [5] GÖPFERT, W.: Interpolationsergebnisse mit der Multiquadratischen Methode. In: Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 10, S. 457 – 460, 1977
- [6] HAKE, G.; GRÜNREICH, D.: Kartographie. Walter de Gruyter, 7. Auflage, Berlin, New York 1994
- [7] HARDY, R. L.: Geodetic application of multiquadratic analysis. In: Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 10, Seite 398–406, 1972
- [8] WAGNER, K.: Kartographische Netzentwürfe. Bibliographisches Institut AG, 2. Auflage, Mannheim 1962

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. DIETER BEINEKE

Institut für Photogrammetrie und Kartographie

Universität der Bundeswehr München

D-85577 Neubiberg

Tel.: ++49-89/60 04-34 50

Fax: ++49-89/60 04-40 90

E-Mail: dieter.beineke@unibw.de

Web-Link: [http://www.unibw.de/ipk/karto/](http://www.unibw.de/ipk/karto/perskarto/beineke/index_html)

[perskarto/beineke/index_html](http://www.unibw.de/ipk/karto/perskarto/beineke/index_html)

Zusammenfassung

Auf der Grundlage der multiquadratischen Interpolation nach Hardy wird für Genauigkeitsanalysen von Altkarten eine analytische Abbildung vorgeschlagen, mit deren Hilfe infinitesimale Größen zur Bestimmung lokaler Verzerrungen in Altkarten berechnet werden können. Die Methode wird detailliert aufgezeigt und an Hand einiger Graphiken veranschaulicht.

Abstract

For accuracy analyses of old maps on the basis of the multiquadratic interpolation by Hardy an analytic projection is suggested, with their assistance infinitesimal values for the determination of local distortions in old maps can be computed. The method is described in detail and illustrated with some graphics.