Das arithmetische Mittel von Mehrfachmessungen unter Wiederholbedingungen

R. Lehmann

Untersucht werden Bedingungen, unter denen das einfache arithmetische Mittel aus Mehrfachmessungen unter Wiederholbedingungen zu einer optimalen Punktschätzung führt. Es werden die beste lineare erwartungstreue Schätzung im Gauß-Markoff-Modell und die Maximum-Likelihood-Schätzmethode betrachtet. Im Gauß-Markoff-Modell wird hauptsächlich der praktisch interessante Fall betrachtet, dass die Kofaktorenmatrix Toeplitz-Gestalt annimmt. Bemerkenswert sind vor allem die Ergebnisse der Maximum-Likelihood-Methode für unabhängige Messungen: Bei Doppelmessungen ist hinreichend, dass die Log-Dichte der Messabweichungen eine symmetrische konkave Funktion ist. Bei drei und mehr Messungen lassen nur normalverteilte Messabweichungen die Benutzung des arithmetischen Mittels zu.

1 Einleitung

Mehrfachmessungen spielen in allen messenden Ingenieurdisziplinen eine wichtige Rolle, so auch im Vermessungswesen, in Geodäsie und Photogrammetrie. Der Grund hierfür ist, dass der Vorgang der Messung als Zufallsexperiment aufgefasst wird. Den Messabweichungen schreibt man also stochastische Eigenschaften zu. Basierend auf einer möglichst großen Stichprobe und mit den Methoden der Mathematischen Statistik können so genaue und zuverlässige Aussagen über den unbekannten Wert der Messgröße getroffen werden.

Oft werden nur den sogenannten „zufälligen Messabweichungen“ stochastische Eigenschaften zugeordnet. Das ist jedoch nicht zwingend so. Entscheidend ist das Verständnis des zugrunde liegenden Zufallsexperiments und die Art und Weise seiner Wiederholung. Wir illustrieren dies an folgendem Beispiel: Die Maßstabsabweichung eines Messbands ist als systematische Messabweichung zu kategorisieren, aber nur, wenn man die Wiederholungsmessungen mit demselben Messband vornimmt. Greift man hingegen vor jeder neuen Messung wahllos in eine Kiste mit vielen verschiedenen Messbändern, so nimmt auch die Maßstabsabweichung zufälligen Charakter an. Das Auftreten grober Messabweichungen (Fehler im engeren Sinne) ist ebenfalls in gewissem Sinne zufällig. So wird etwa bei einem Laserscanner ein solcher Fehler erzeugt, wenn sich zufällig ein Hindernis im Strahlengang befindet. Für die Betrachtungen ist also entscheidend, wie die Wiederholbedingungen des Zufallsexperiments „Messung“ definiert werden.

Über die stochastischen Eigenschaften der Messabweichungen müssen oft Annahmen getroffen werden, die nicht überprüfbar sind. Deshalb ist man bestrebt, Methoden der Mathematischen Statistik zu entwickeln und einzusetzen, die auch dann noch brauchbare Ergebnisse liefern, wenn diese Annahmen verletzt sind. Man spricht dann von Robusten Verfahren. Der aktuelle Stand der Theorie und Praxis dieser Verfahren wird sehr ausführlich von Jäger u.a. (2005) zusammengefasst. Über die Fehlertheorie wurden in den letzten Jahren grundlegende Arbeiten u.a. von Kutterer (2002) geleistet.

Vom praktischen Standpunkt aus erscheint es in vielen Fällen plausibel, aus Mehrfachmessungen unter Wiederholbedingungen das einfache arithmetische Mittel zu bilden, um zu einem in gewissen Sinne optimalen Schätzwert für den unbekannten Wert der Messgröße (Punktschätzung) zu gelangen. Oft ist diese Berechnung in gängigen Softwareprodukten sogar fest vorgegeben, so dass man keine andere Wahl hat, als dafür zu sorgen, dass die Bedingungen der Messung dies rechtfertigen. Der folgende Beitrag geht der Frage nach, welche Bedingungen es genau sind, unter denen das einfache arithmetische Mittel zu einer optimalen Punktschätzung führt.

Formulierung

Es wurden n Mehrfachmessungen oder -bestimmungen unter Wiederholbedingungen durchgeführt. Dabei wurden die Messwerte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ erhalten. Unter welchen Voraussetzungen ist

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

eine sinnvolle Punktschätzung für den wahren Wert der mehrfach gemessenen oder bestimmten Größe?

Wir betrachten das Gauß-Markoff-Modell, häufigstes Modell der Parameterschätzung in der Geodäsie. Ein Vorteil dieses Modells besteht darin, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messabweichungen nicht explizit benötigt wird, sondern nur deren Momente erster und zwei-

ter Ordnung. Eine Punktschätzung konstriert man nach den Prinzipien der Erwartungstreue und der Minimalvarianz als lineare Funktion der Messwerte.
Alternativ dazu untersuchen wir die Eigenschaften der Maximum-Likelihood-Methode. Hierbei wird explizit ein Typ für die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messabweichungen unterstellt, der aber noch unbekannte feste Parameter enthält. Diese werden nun so geschätzt, dass die Wahrscheinlichkeit, gerade die gefundenen Messwerte zu erhalten, maximal wird. Diese Methode läßt sich an viele Anwendungen sehr flexibel anpassen.

2 Gauß-Markoff-Modell

Die Punktschätzung soll zunächst im Gauß-Markoff-Modell (z.B. KOCH 1997) vorgenommen werden, welches mit dem Messwertvektor $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ und dem Vektor $\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)'$ folgende Gestalt hat:

$$E(\boldsymbol{y}) = \mathbf{1}\mu, D(\boldsymbol{y}) = \sigma^2 \boldsymbol{P}^{-1}$$

(E = Erwartungswert, D = Dispersion, P = reguläre symmetrische Gewichtsmatrix mit Elementen p_{ij}, $i = 1\ldots n$, $j = 1\ldots n$). Die beste lineare erwartungstreue Schätzung lautet in diesem Fall (siehe KOCH 1997):

$$\bar{y} = (\mathbf{1}'\boldsymbol{P}\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$$

und nimmt die Form an:

$$\bar{y} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i \frac{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$$

Damit dies für alle **y** gleich dem einfachen arithmetischen Mittel ist, muss gelten:

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{ij} = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n}\sum\nolimits_{j=1}^{n} p_{ij}$$

für alle i, d.h. alle Spalten- und Zeilensummen der Matrix **P** müssen konstant sein.
Unkorreliertheit der Messungen (**P** ist Diagonalmatrix) ist also keineswegs notwendig, damit das arithmetische Mittel eine sinnvolle Punktschätzung ist.
Im Fall $n = 2$ (Doppelmessungen) gilt unter Wiederholbedingungen $p_{11} = p_{22}$ und sowieso $p_{12} = p_{21}$, also sind alle Spalten- und Zeilensummen der Matrix **P** konstant. Das einfache arithmetische Mittel ist in jedem Fall eine optimale Punktschätzung. Bei doppelten Bestimmungen von abgeleiteten Größen, etwa Koordinaten von doppelt eingeschnittenen Punkten, dürfen diese also einfach arithmetisch gemittelt werden, vorausgesetzt, die Bestimmungen sind gleich genau erfolgt und die Originalmesswerte lassen sich nicht gemeinsam auswerten.
Beispiel: Doppelter Bogenschnitt mit etwa gleich großem Schnittwinkel, wobei ein Messwert in beiden Bestimmungen verwendet werden darf.
Im Fall $n > 2$ ist die Eigenschaft konstanter Spalten- und Zeilensummen der Matrix **P** nur ausnahmsweise erfüllt.
Beispiel: Unter Wiederholbedingungen und wenn die Messwerte in der zeitlichen Reihenfolge ihrer Erhebung sortiert sind, sowie gleiche Zeitabstände zwischen den Messungen liegen, ist folgende Band-Struktur der Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ denkbar und oft sinnvoll:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \ldots & q_n \\ q_2 & q_1 & q_2 & q_3 & \ldots \\ q_3 & q_2 & q_1 & q_2 & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots \\ q_n & \ldots & q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix}$$

Die Bedingungen $|q_1| \leq |q_2| \leq q_3| \leq \ldots \leq |q_n|$ würden insbesondere bedeuten, dass die Messwerte mit größerem zeitlichen Abstand schwächer korreliert sind. **Q** nimmt die Gestalt einer symmetrischen Toeplitz-Matrix an. Leider ist **P** im Allgemeinen nicht von dieser Gestalt, sondern nur symmetrisch. Kann man **Q** so festlegen, dass **P** konstante Zeilen- und Spaltensummen hat? Tatsächlich ist das zumindest auf eine Art immer möglich, nämlich wenn $q_2 = q_3 = \ldots = q_n$ gewählt werden kann. **P** hat dann die Gestalt

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_2 & \ldots & p_2 \\ p_2 & p_1 & p_2 & p_2 & \ldots \\ p_2 & p_2 & p_1 & p_2 & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots \\ p_2 & \ldots & p_2 & p_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$p_2 = \frac{q_2}{(n-1)q_2^2 - q_1^2 - (n-2)q_1q_2}$$

$$p_1 = -\frac{p_2}{q_2}(q_1 + (n-2)q_2)$$

In diesem Fall sind also alle Messwerte entweder unkorreliert ($q_2 = 0$) oder auf dieselbe Weise untereinander korreliert. Jedoch sollte dieser zweite, nicht triviale Fall für $n > 2$ bei praktischen Anwendungen im Vermessungswesen recht selten auftreten.
Für $n = 3$ findet man leicht auch die einzige weitere Möglichkeit, unter den vorliegenden Voraussetzungen **Q** so festlegen, dass **P** konstante Zeilen- und Spaltensummen hat:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q_2 & q_1 & q_2 \\ q_3 & q_2 & q_1 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{P} =$$

$$\begin{pmatrix} q_1^2 - q_2^2 & q_2(q_3 - q_1) & q_2^2 - q_1q_3 \\ q_2(q_3 - q_1) & q_1^2 - q_3^2 & q_2(q_3 - q_1) \\ q_2^2 - q_1q_3 & q_2(q_3 - q_1) & q_1^2 - q_2^2 \end{pmatrix}$$

Wegen der Symmetrie von **P** liegt nur eine einzige Summenbedingung vor, die sich wie folgt umformen lässt:

$$q_1^2 - q_2^2 + q_2(q_3 - q_1) + q_2^2 - q_1q_3 =$$

$$q_2(q_3 - q_1) + q_1^2 - q_3^2 + q_2(q_3 - q_1)$$

$$q_3^2 - q_2(q_3 - q_1) - q_1q_3 = 0$$

$$(q_3 - q_1)(q_3 - q_2) = 0$$

Hieraus folgt $q_2 = q_3$ (s.o.) oder $q_1 = q_3$. Für $n > 3$ ist noch nichts bekannt.

3 Maximum-Likelihood-Schätzung für unabhängige Doppelmessungen

Betrachten wir im Folgenden den Fall n = 2. Außerdem setzen wir zunächst Unabhängigkeit der Doppelmessungen voraus.
Bei der Maximum-Likelihood-Methode wird explizit ein Typ für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsvektors **y** unterstellt, der aber noch gewisse unbekannte feste Parameter β enthalten kann. Die Verteilung wird durch eine Dichtefunktion $f_\beta(\mathbf{y})$ repräsentiert. Es wird die Likelihood-Funktion $L(\mathbf{y},\beta) = f_\beta(\mathbf{y})$ eingeführt und β so geschätzt, dass den Messwerten maximale Wahrscheinlichkeitsdichte zukommt (vgl. KOCH 1997):

$$\bar{\beta} = \arg\ \max_\beta L(\mathbf{y},\beta)$$

Im vorliegenden Problem interessiert nur der zentrale Schätzer „Erwartungswert" $\beta = (\mu)$ als einziger zu bestimmender Parameter. Dieser ist als plausibelster Wert (Maximum-Likelihood-Schätzwert) für die unbekannte Messgröße anzusehen. Unter Wiederholbedingungen können wir die Dichtefunktion als symmetrisch ansetzen:

$$f_\mu(\mathbf{y}) = f_\mu(y_1, y_2) = f_\mu(y_2, y_1)$$

Weiter stellt sich die Dichtefunktion wegen der angenommenen Unabhängigkeit wie folgt dar:

$$L(\mathbf{y},\mu) = f_\mu(\mathbf{y}) = f_\mu(y_1) \cdot f_\mu(y_2)$$

Es soll untersucht werden, für welche Klasse von Dichtefunktionen f_μ stets

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

die Likelihood-Funktion L maximiert. Man kann sich diese Klasse auch aus einer einzigen Funktion f durch Verschiebung erzeugt denken: $f_\mu(y) = f(y-\mu)$. Gesucht ist also eine Dichtefunktion f mit der Eigenschaft

$$\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \arg\ \max_\mu f(y_1 - \mu) \cdot f(y_2 - \mu)$$

für alle Messwerte (y_1, y_2). Wir betrachten zur Vereinfachung weiter nur differenzierbare Dichtefunktionen f, da sich alle anderen Dichtefunktionen durch diese in gewissem Sinne beliebig gut approximieren lassen. So ist eine notwendige Bedingung für das Maximum gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(f(y_1 - \mu) \cdot f(y_2 - \mu)) = 0$$

$$\text{an der Stelle} \quad \mu = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

mit f' der ersten Ableitung von f und $\delta := (y_2 - y_1)/2$:

$$f'(y_1 - (y_1 + y_2)/2) \cdot f(y_2 - (y_1 + y_2)/2) +$$
$$f(y_1 - (y_1 + y_2)/2) \cdot f'(y_1 - (y_1 + y_2)/2) =$$
$$f'(-\delta) \cdot f(\delta) + f(-\delta) \cdot f'(\delta) \equiv 0$$

Die Identität muss für alle reellen Argumente δ bestehen. Das Problem, welche Dichtefunktionen f der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messabweichungen die Anwendung des einfachen arithmetischen Mittels erlauben, führt somit auf eine Differentialgleichung erster Ordnung.
Nutzt man die Tatsache, dass sich jede reelle Funktion eindeutig als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion darstellen lässt:

$$f = g + u$$
$$g(-\delta) = g(\delta), \quad g'(-\delta) = -g'(\delta)$$
$$u(-\delta) = -u(\delta), \quad u'(-\delta) = u'(\delta)$$

So erhält man:

$$(g'(-\delta) + u'(-\delta))(g(\delta) + u(\delta)) + (g(-\delta) +$$
$$u(-\delta))(g'(\delta) + u'(\delta)) = (-g' + u')(g + u) +$$
$$(g - u)(g' + u') \equiv 2(u'g - g'u) \equiv 0$$

Die resultierende Differentialgleichung

$$u'g \equiv g'u$$

hat die Lösungen g = Cu oder u = Cg, wobei C je eine Integrationskonstante ist. In beiden Gleichungen steht auf der einen Seite eine gerade und auf der anderen eine ungerade Funktion. Dies kann nur bestehen, wenn wenigstens eine von beiden Funktionen identisch verschwindet. Da jedoch f = g + u nichtnegativ sein muss und nicht identisch verschwindet, kann nur u verschwinden. Also muss f eine gerade Funktion sein.
Für jede Dichtefunktion f_μ, die symmetrisch zum Erwartungswert μ ist, und alle Messwertvektoren $(y_1, y_2)'$ hat die Likelihood-Funktion L bei $\mu = (y_2 + y_1)/2$ einen stationären Punkt. Es soll eine hinreichende Bedingung dafür angegeben werden, dass es sich um ein globales Maximum handelt. Die einfachste Bedingung dieser Art ist, dass L bzgl. μ eingipflig sein muss, d.h. links vom arithmetischen Mittel monoton ansteigt:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(f(y_1 - \mu) \cdot f(y_2 - \mu)) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad y_1 y_2$$
$$\text{und} \quad \mu < \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

Aus der Symmetrie ergibt sich automatisch das monotone Abfallen auf der rechten Seite. Für differenzierbare Dichtefunktionen f erhält man für die entsprechenden Argumente

$$f'(y_1 - \mu) \cdot f(y_2 - \mu) + f(y_1 - \mu) \cdot f'(y_2 - \mu) \leq 0$$

An einer Nullstelle von f muss wegen $f \geq 0$ auch f' verschwinden und die Ungleichung ist erfüllt. An allen anderen Stellen können wir die Log-Dichtefunktion l(y) mit

$$l(y) := \log f(y), \quad f(y) = \exp(l(y)),$$
$$f'(y) = \exp(l(y)) \cdot l'(y)$$

einführen und erhalten mit

$$\exp(l(y_1 - \mu)) \cdot l'(y_1 - \mu) \cdot \exp(l(y_2 - \mu)) +$$
$$\exp(l(y_1 - \mu)) \cdot \exp(l(y_2 - \mu)) \cdot l'(y_2 - \mu) \leq 0$$

schließlich

$$l'(y_1 - \mu) + l'(y_2 - \mu) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad y_1 y_2$$

$$mit \quad \mu < \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$$

l ist wie f gerade und l' also eine ungerade Funktion:

$$l'(y_2 - \mu) \leq l'(\mu - y_1)$$

Das Argument von l' auf der linken Seite der Ungleichung ist offenbar größer als auf der rechten. Dies ist gleichbedeutend damit, dass l' eine überall monoton fallende Funktion ist. l nennt man dann eine konkave Funktion.
Diese Bedingung ist hinreichend für ein globales Maximum der Likelihood-Funktion L am arithmetischen Mittel. Notwendig ist sie jedoch nicht, da weitere lokale Maxima von L (Nebenmaxima) existieren könnten. L wäre dann nicht eingipflig und hätte trotzdem ein globales Maximum am arithmetischen Mittel.
Beispiel: Ein wichtiger Typ einer geraden, überall konkaven Funktion l wird durch $l(y) = b - a|y|^m$ mit $a > 0,\ m \geq 1$ dargestellt. Im Fall $m = 2$ liegen offenbar normalverteilte Messabweichungen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1/a vor. Das arithmetische Mittel hat hier die bekannte Optimalitätseigenschaft.
Beispiel: Eine weitere symmetrische, der Normalverteilung sehr nahe kommende Verteilung ist die Student- oder t-Verteilung. Die Log-Dichtefunktion ist hier im Allgemeinen keine konvexe Funktion. Die Folge ist, dass in manchen Fällen das arithmetische Mittel aus Mehrfach-

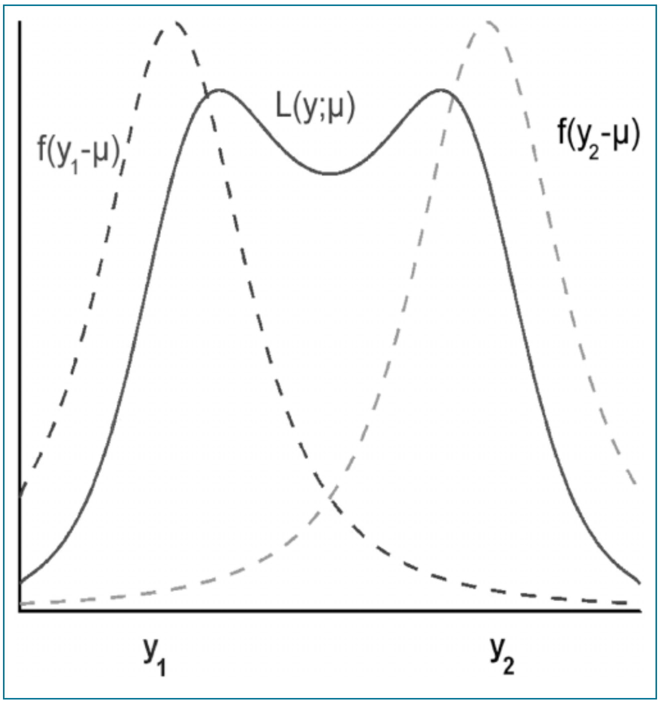

Abb. 1: Dichtefunktionen der nichtzentralen t-Verteilung mit zwei Freiheitsgraden und zugehörige Likelihood-Funktion (Mitte) bzgl. Parameter μ

messungen mit t-verteilten Messabweichungen keine optimale Schätzung für die unbekannte Messgröße darstellt. Ein solcher Fall ist in Abb. 1 dargestellt. Die Likelihood-

Funktion hat am arithmetischen Mittel zwar einen stationären Punkt, dieser ist jedoch ein Minimum! Dieser Fall zeigt, dass selbst im Fall einer „vernünftigen" Fehlerverteilung das arithmetische Mittel einen gerade besonders ungünstigen Schätzwert liefert.

4 Maximum-Likelihood-Schätzung für unabhängige Mehrfachmessungen (n $>$ 2)

Liegen mehr als zwei Wiederholungsmessungen vor, so gelten die meisten Ausführungen des vorangegangenen Abschnitts entsprechend:

$$L(\mathbf{y},\mu) = f_\mu(\mathbf{y}) = \prod\nolimits_{i=1}^{n} f_\mu(y_i)$$

Die notwendige Bedingung für einen stationären Punkt der Likelihood-Funktion lautet:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\prod\nolimits_{i=1}^{n} f(y_i-\mu)\right) = 0 \text{ an der Stelle } \quad \mu = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i$$

Gesucht ist wieder eine Dichtefunktion f, die diese Bedingung für alle Messwertvektoren $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ erfüllt. Auch hier kann der Fall $f = 0$ ausgeschlossen werden, da ein stationärer Punkt hier einem Minimum von L entsprechen würde, also keine gesuchte Lösung darstellt. Der Übergang zur Log-Dichtefunktion $l = \log(f)$ liefert die äquivalente Bedingung:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} l'(y_i-\mu) = 0 \quad \text{an der Stelle} \quad \mu = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i$$

Setzt man alle Messwerte y_i konstant, so erhält man sofort $l'(0) = 0$. Setzt man nun $y_1 = -y_2$ und $y_3 = y_4 = \ldots = y_n = 0$, erhält man:

$$l'(y_1) + l'(-y_1) = 0$$

Also ist l' eine ungerade Funktion. Setzt man $y_3 = -y_1 - y_2$ und $y_4 = \ldots = y_n = 0$, so folgt schließlich:

$$l'(y_1) + l'(y_2) = l'(y_1 + y_2)$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass l' eine lineare Funktion ist. Tatsächlich erfüllt jede lineare Funktion $l'(y) = ay$ die untersuchte Bedingung. f ergibt sich dann als Dichtefunktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0.
Im Fall von mehr als zwei Messwerten ist das arithmetische Mittel also nur optimal im Sinne der Maximum-Likelihood-Methode, wenn $N(0,\sigma^2)$-verteilte Messabweichungen vorliegen.

5 Ausblick

Man kann als nächstes Problem die Bestimmung von Maximum-Likelihood-Dichtefunktionen untersuchen, wenn man die Einschränkung der Unabhängigkeit fallen lässt. Sehr schnell erkennt man, dass die Menge möglicher Dichtefunktionen sehr groß und kaum vernünftig zu charakterisieren ist. Allein schon, wenn man sich auf mehrdimensionale Normalverteilungen beschränkt, ergibt sich keine Eindeutigkeit, auch nicht im Fall $n > 2$. Das wird klar, wenn man bedenkt, dass in diesem Fall die Punktschätzung äquivalent zur besten linearen erwartungstreuen Schätzung im Gauß-Markoff-Modell ist (z.B. Koch 1997), welche nur auf die Bedingung konstanter Zeilen- und Spaltensummen der Gewichtsmatrix führte. Interessanter ist die bereits andiskutierte Frage, welche dieser Dichtefunktionen praktische Relevanz besitzen. Dieser soll hier nicht weiter nachgegangen werden.
Bemerkung: Es mag zunächst erstaunen, dass die Verhältnisse bei Doppelmessungen bzw. -bestimmungen grundsätzlich anders liegen, als im Fall $n > 2$. Leichter sieht man dies ein, wenn man bedenkt, dass für $n = 2$ das arithmetische Mittel mit anderen Stichprobenfunktionen wie dem Median und dem Extremenmittel (Midrange) $y_{midrange} = (y_{max} + y_{min})/2$ zusammen fällt.

Literatur

[1] Jäger, R.; Müller, T.; Saler, H.; Schwäble, R.: Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern Herbert Wichmann Verlag 2005
[2] Koch, K. R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 3. Auflage, Dümmler Verlag Bonn 1997
[3] Kutterer, H.: Zum Umgang mit Ungewissheit in der Geodäsie – Bausteine für eine neue Fehlertheorie. München, Bayer. Akademie d. Wissenschaften, Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Heft-Nr.553. 2001

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr.-Ing. Rüdiger Lehmann,
Hochschule f. Technik und Wirtschaft Dresden (FH),
Fachbereich Vermessungswesen/Kartographie,
Friedrich-List-Platz 1, 01069 Dresden,
Tel 03 51-4 62-31 46, Fax 03 51-4 62-21 91,
mailto:r.lehmann@htw-dresden.de